ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, 13 (1965)

UWAGI O DYSLOKACJACH W NIEJEDNORODNYCH I IZOTROPOWYCH PIERŚCIENIACH KOŁOWYCH O ZMIENNEJ GRUBOŚCI[1]

GOURI DAS (CALCUTTA)

1. Pierścień kołowy, którego moduł Younga zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do odległości od środka

Rozważając zagadnienie płaskiego stanu naprężenia otrzymujemy we współrzędnych biegunowych związki typu naprężenie-odkształcenie w postaci

$$e_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \quad e_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta}, \tag{1.1}$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona materiału pierścienia i jako wielkość mała — stałym z założenia. E jest modułem Younga zależnym od odległości r od środka pierścienia; punkt ten jest biegunem.

Równania równowagi są spełnione, jeśli składowe naprężenia wyrazimy za pośrednictwem funkcji naprężenia Airy'ego, mianowicie

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right). \tag{1.2}$$

Jeżeli $E = E_0/r$, gdzie E_0 jest wielkością stałą, to otrzymamy z równania nierozdzielności

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)e_{rr} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(re_{\theta\theta}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}(re_{r\theta}),\\ \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4\chi}{\partial\theta^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^4\chi}{\partial r^4} + \frac{4}{r}\frac{\partial^3\chi}{\partial r^3} + \frac{1-\nu}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4\chi}{\partial r^2\,\partial\theta^2} = 0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Rozwiązanie niezależne od θ jest dane przez

$$\chi = Br + Cr^\lambda + Dr^{-(\lambda-1)}, \tag{1.4}$$

gdzie $\lambda = {}^1/_2 + {}^1/_2\sqrt{5+4\nu}$.

Jeśli składowe przemieszczenia u_r, u_θ przedstawimy jako

$$u_r = \frac{Br}{E_0}, \quad u_\theta = -\frac{B(1+\nu)}{E_0}r\theta, \tag{1.5}$$

[1] Z angielskiego przetłumaczył S. ZAHORSKI.

to zauważymy, że

$$\sigma_r = \frac{B}{r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \tag{1.6}$$

przy czym składowe te spełniają równania równowagi. Odpowiadają one wyrażowi Br w (1.4), zatem składowe przemieszczenia (1.5) mogłyby być określone na jego podssawie.

Ponieważ funkcja naprężenia $\chi = Cr^{\lambda}+Dr^{-(\lambda-1)}$ powoduje jednoznaczne przemieszczenia z wyjątkiem przemieszczeń jako ciało sztywne, widzimy stąd, że przemieszczenie promieniowe u_r, odpowiadające funkcji naprężenia (1.4), jest jednoznaczne i ciągłe, natomiast poprzeczna składowa u_θ jest wieloznaczna. Można przemieszczenie u_θ określić jednoznacznie, zakładając że $2\pi+\alpha > \theta > \alpha$; jednak wtedy staje się ono nieciągłe, przy czym skok, w którym funkcja ta jest nieciągła, wynosi $-2\pi rB(1+\nu)/E_0$. Ponieważ wielkość ta jest proporcjonalna do r, może istnieć dyslokacja odpowiadająca usunięciu cienkiej warstwy pierścienia, wyznaczonej przez dwie płaszczyzny

$$\theta = \alpha \pm \frac{B(1+\nu)}{E_0}\pi,$$

i następnemu połączeniu płaskich końców.

Można określić stałe C i D w (1.4) na podstawie faktu, że powierzchnie pierścienia są wolne od naprężeń. Obliczając naprężenia z (1.4) otrzymamy

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{B}{r} + C\lambda r^{\lambda-2} - D(\lambda-1)r^{-\lambda-1}, \\ \sigma_\theta &= C\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} + D\lambda(\lambda-1)r^{-\lambda-1}, \quad \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Wykorzystując warunki brzegowe: $\sigma_r = 0$ na $r = a$ i $r = b$, mamy

$$C = -\frac{B}{\lambda}\frac{a^{\lambda}-b^{\lambda}}{a^{2\lambda-1}-b^{2\lambda-1}}, \quad D = \frac{B}{\lambda-1}\frac{b^{-(\lambda-1)}-a^{-(\lambda-1)}}{b^{-(2\lambda-1)}-a^{-(2\lambda-1)}}. \tag{1.8}$$

W ten sposób funkcja (1.4) wraz z C i D określonymi za pomocą (1.8) wyraża napięcia w niejednorodnym kołowym pierścieniu, którego powierzchnie są wolne od naprężeń i który znajduje się w stanie naprężeń wstępnych, wywołanych usunięciem cienkiej warstwy ograniczonej płaszczyznami

$$\theta = \alpha \pm \frac{B(1+\nu)}{E_0}\pi.$$

2. Pierścień kołowy o grubości zmiennej wzdłuż promienia

Jeśli h jest grubością pierścienia w odległości r od jego środka, to równania równowagi będą spełnione, o ile przyjmiemy

$$h\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}, \quad h\sigma_\theta = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}, \quad h\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right). \tag{2.1}$$

Ponieważ zagadnienie dotyczy płaskiego stanu naprężenia, związki typu naprężenie-odkształcenie są dane przez (1.1), przy czym w tym przypadku ν i E są wielkościami stałymi.

Jeśli przyjmiemy $h = kr^{-2}$, to po wykorzystaniu (1.1) i (2.1) równanie nierozdzielności we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać

$$r^4 \frac{\partial^4 \chi}{\partial r^4} + 6r^3 \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^3} + (5-2\nu) r^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - (2\nu+1) r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial \theta^4} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + 2r \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial \theta^2} + 2r^2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial r^2 \partial \theta^2} = 0. \tag{2.2}$$

Rozwiązanie tego równania, niezależne od θ, dane jest przez

$$\chi = B \log r + Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda}, \tag{2.3}$$

gdzie $\lambda = \sqrt{2(1+\nu)}$.

Jeśli przemieszczenia u_r, u_θ przyjmiemy jako

$$u_r = \frac{B(1+\nu)}{kE} r, \quad u_\theta = -\frac{2B(1+\nu)}{kE} r\theta, \tag{2.4}$$

to odpowiednie naprężenia są określone przez

$$\sigma_r = \frac{B}{k}, \quad \sigma_\theta = -\frac{B}{k}, \quad \tau_{r\theta} = 0. \tag{2.5}$$

Powyższe składowe naprężenia spełniające równania równowagi mogą być wprowadzone z funkcji naprężenia $B \log r$. Otrzymane w tym przypadku składowe przemieszczenia (2.4) mogły być określone na podstawie tej funkcji naprężenia.

Obecnie rozważmy składnik $(Cr^{\lambda}+Dr^{-\lambda})$ funkcji naprężenia (2.3). Ponieważ powyższe wyrazy powodują niejednoznaczne przemieszczenia, oczywiście poza przemieszczeniami odnoszącymi się do ruchu ciała sztywnego, widzimy, że u_r odpowiadające funkcji naprężenia (2.3) jest jednoznaczne i ciągłe, u_θ jest wieloznaczne. Jeżeli ograniczymy θ tak, że $2\pi+\alpha > \theta > \alpha$, to u_θ staje się jednoznaczne, lecz nieciągłe z nieciągłością o skoku $-4\pi rB(1+\nu)/kE$. A zatem może istnieć dyslokacja odpowiadająca usunięciu cienkiej warstwy ograniczonej przez płaszczyzny

$$\theta = \alpha \pm \frac{2B(1+\nu)}{kE} \pi.$$

Aby uzyskać stałe C i D, obliczamy naprężenia zgodnie z (2.3) w ten sposób, że

$$\begin{aligned} k\sigma_r &= B+\lambda Cr^{\lambda} - D\lambda r^{-\lambda}, \\ k\sigma_\theta &= -B+C\lambda(\lambda-1) r^{\lambda}+D\lambda(\lambda+1) r^{-\lambda}, \quad k\tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Jeśli krawędzie pierścienia są wolne od naprężeń, to $\sigma_r = 0$ na $r = a$ i $r = b$. Otrzymamy

$$C = -\frac{B}{\lambda} \frac{a^{\lambda}-b^{\lambda}}{a^{2\lambda}-b^{2\lambda}}, \quad D = \frac{B}{\lambda} \frac{b^{-\lambda}-a^{-\lambda}}{b^{-2\lambda}-a^{-2\lambda}}. \tag{2.7}$$

W ten sposób podobnie jak w przypadku poprzednim funkcja naprężenia (2.3) wraz ze stałymi C i D danymi przez (2.7) stosuje się do kołowego pierścienia o grubości zmiennej wraz z promieniem, który ponadto jest wolny od sił zewnętrznych oraz znajduje się w stanie wstępnych naprężeń wywołanych usunięciem cienkiej warstwy ograniczonej przez płaszczony

$$\theta = \alpha \pm \frac{2B(1+\nu)}{kE}\pi.$$

Na zakończenie wyrażam moje szczere podziękowania Profesorowi B. SENOWI, D.Sc., F.N.I., z Uniwersytetu Viswabharati, za jego uprzejmą pomoc i przewodnictwo w trakcie przygotowywania tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1927, 221.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ О ДИСЛОКАЦИЯХ
В НЕОДНОРОДНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ КРУГОВЫХ КОЛЬЦАХ
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Несмотря на то, что дислокациям разных типов в изотропных полых цилиндрах и круговых кольцах (ср. [1]), посвящено много внимания, автор сомневается в том, что вопрос дислокации в неоднородном материале и в круговом кольце переменной толщины, врядли был решен. В настоящей работе рассматривается вопрос дислокации для кругового кольца, характеризующегося простым типом неоднородности и вопрос дислокации в изотропном круговом кольце, толщина которого изменяется с квадратом расстояния от центра.

Summary

NOTE ON DISLOCATIONS IN NON-HOMOGENEOUS CIRCULAR RINGS
AND ISOTROPIC CIRCULAR RINGS OF VARYING THICKNESS

Through dislocations of various types in isotropic hollow cylinders and circular rings have received much attention (cf. Love, p. 221), it is believed that no problem of dislocation concerned with non-homogeneous material or that concerning isotropic circular ring of varying thickness has yet been solved. In this note a dislocation problem of a circular ring possessing a simple type of non-homogeneity and a dislocation problem of a circular ring of isotropic material with thickness varying inversely as the square of the distance from the centre of the ring have been considered.

ZAKŁAD MATEMATYKI
BETHUNE COLLEGE, CALCUTTA (INDIA)

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lipca 1964 r.