

ZŁOŻONE SFEROIDY POD DZIAŁANIEM OBCIĄŻEŃ SKUPIONYCH

S. C. DAS i R. SUBRAMANIAN (MADRAS)

Oznaczenia

x, y, z	współrzędne kartezjańskie,
u, v, w	współrzędne elipsoidalne określone za pomocą wzorów (1),
h_u, h_v, h_w	współczynniki dystorsji,
U, V, W	składowe przemieszczenia,
$\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$	normalne składowe naprężenia,
λ, μ	stałe Lamégo,
G	moduł ścinania (Kirchhoffa),
ν	współczynnik Poissona,
α	$= (\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$,
A_n, A'_n, B_n, B'_n	stałe,
$\tau_{uv}, \tau_{vw}, \tau_{wu}$	styczne składowe naprężenia.

Wstęp. M. A. SADOWSKY i E. STERNBERG [1] przedyskutowali rozwiązania dla zagadnień pustek sferoidalnych poddanych jednoosiowemu napięciu prostopadłemu do osi pustki, A. H. NEUBER [2] rozważył podobne zagadnienie dla obciążeń równoległych do osi S. C. DAS otrzymał koncentrację naprężeń wokół małego sferoidalnego wtrącenia na osi skręcanego walca [3] oraz naprężenia w skręcanych złożonych kulach i sferoidach [4]. J. GOŁECKI [5] studiował rozkład naprężeń w przypadku kuli poddanej siłom ściskającym wzdłuż średnicy, uwzględniając przy tym istnienie kulistej pustki lub wtrącenia.

Niniejsza praca stanowi studium wpływu niejednorodności strukturalnej w postaci sferoidalnej pustki lub podobnego sztywnego wtrącenia na rozkład naprężeń w sferoidzie poddanej siłom ściskającym wzdłuż wspólnej osi obrotu.

1. Sferoidy wydłużone. Przyjmując wspólny środek sferoid jako początek układu współrzędnych oraz wspólną oś obrotu zgodną z osią x -ów, wprowadzamy następujące współrzędne:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \operatorname{ch} u \cos v, \\ y &= \operatorname{sh} u \sin v \cos w, \\ z &= \operatorname{sh} u \sin v \sin w, \end{aligned}$$

gdzie $u = \text{const}$ przedstawia sferoidę wydłużoną. Zewnętrzna powierzchnia została zdefiniowana jako $u = u_1$, a powierzchnia podziału między dwoma materiałami

jako $u = u_0$. Siły działają wzdłuż osi x , tj. osi obrotu. Trzy współczynniki dystorsji są następujące:

$$(2) \quad h_u = h_v = h = (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)^{1/2}, \quad h_w = \operatorname{sh} u \sin v.$$

2. Równania równowagi. Rozwiązania. Niech U, V, W oznaczają przemieszczenia w obranym układzie współrzędnych. Przyjmujemy $W = 0$, oraz U, V niezależne od w , ponieważ zagadnienie jest osiowosymetryczne i nie rozważamy skręcania. Przestrzenna dylatacja Δ jest określona następująco:

$$(3) \quad \Delta = \frac{1}{h^2 h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h h_w U) + \frac{\partial}{\partial v} (h h_w V) \right]$$

a składowe obrotu

$$(4) \quad 2\tilde{w}_u = 2\tilde{w}_v = 0, \quad 2\tilde{w}_w = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (Vh) - \frac{\partial}{\partial v} (Uh) \right].$$

Jedno z równań równowagi jest spełnione tożsamościowo, natomiast pozostałe dwa przyjmują postać

$$(5) \quad (\lambda + 2\mu) h_w \frac{\partial \Delta}{\partial u} - 2\mu \frac{\partial}{\partial v} (h_w \tilde{w}_w) = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu) h_w \frac{\partial \Delta}{\partial v} + 2\mu \frac{\partial}{\partial u} (h_w \tilde{w}_w) = 0.$$

Jako rozwiązanie przydatne w naszym zagadnieniu bierzemy

$$(6) \quad 4GU = \frac{1}{h} \sum_0^{\infty} p_n(u) P_n(\cos v),$$

$$(7) \quad 4GV = \frac{1}{h} \sum_0^{\infty} q_n(u) \frac{dP_n}{dv}(\cos v),$$

przy czym $p_n(u)$ i $q_n(u)$ są określone w sposób następujący:

$$(8) \quad p_n(u) = -x'_n + (2\alpha - 1) \operatorname{sh} u \left[\frac{n}{2n-1} y_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} y_{n+1} \right] -$$

$$- \operatorname{ch} u \left[\frac{n}{2n-1} y'_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} y'_{n+1} \right],$$

$$q_n(u) = -x_n + \frac{(2\alpha - n)}{n} \operatorname{ch} u y_{n-1} - \frac{(n+1+2\alpha)}{(2n+3)} \operatorname{ch} u y_{n+1},$$

gdzie

$$(9) \quad x_n = A_n P_n(\operatorname{ch} u) + A'_n Q_n(\operatorname{ch} u),$$

$$y_n = B_n P_n(\operatorname{ch} u) + B'_n Q_n(\operatorname{ch} u);$$

P_n i Q_n są funkcjami Legendre'a n -tego stopnia, odpowiednio pierwszego i drugiego

rodzaju, kreski oznaczają różniczkowanie względem u , a A_n, A'_n, B_n i B'_n są stałymi. Wówczas naprężenia są następujące:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma_{uu} &= \frac{1}{h^4} \sum_0^{\infty} f_n(u) P_n(\cos v), \\ \sigma_{uv} &= \frac{1}{h^4} \sum_0^{\infty} g_n(u) \frac{dP_n(\cos v)}{dv}. \end{aligned}$$

Funkcje $f_u(u)$ i $g_u(u)$ są określone w sposób następujący:

$$(11) \quad \begin{aligned} f_n(u) &= \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} x''_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)} x_{n-2} - \\ &- \delta x''_n + \text{ch } u \text{ sh } u x'_n + \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} x_n + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} x''_{n+2} + \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} x_{n+2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \text{ ch } u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \times \\ &\times [n(1-\alpha) - 4 + 2\alpha] y_{n-3} + \frac{(n-1)(n-2) \text{ sh } u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} [4 - \alpha(n+2)] y'_{n-3} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2) \text{ ch } u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} y''_{n-3} + \frac{n \text{ ch } u}{(2n-1)} y_{n-1} \left[\frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} - \right. \\ &- \delta(\alpha - 1 + n(2 - \alpha)) + \text{sh}^2 u + \left. \frac{(n-1)^2 \{7 - 2\alpha - n(3 - \alpha)\}}{(2n-1)(2n-3)} \right] + \\ &+ \frac{\text{sh } u}{(2n-1)} y'_{n-1} \left[\alpha n \delta + n \text{ ch}^2 u + \frac{(n-1)^2 (4 - 2\alpha - \alpha n)}{(2n-1)(2n-3)} \right] + \\ &+ \frac{n \text{ ch } u}{(2n-1)} y''_{n-1} \left[-\delta + \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} \right] + \frac{(n+1) \text{ ch } u}{(2n+3)} y_{n+1} \times \\ &\times \left[\delta \{3 - 2\alpha + n(2 - \alpha)\} + \text{sh}^2 u + \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} + \right. \\ &+ \left. \frac{(n+2)^2 \{6 - \alpha + n(3 - \alpha)\}}{(2n+3)(2n+5)} \right] + \frac{(n+1) \text{ sh } u}{(2n+3)} y'_{n+1} \left[\alpha \delta + \text{ch}^2 u - \right. \\ &- \left. \frac{(n+2)^2 \alpha}{(2n+3)(2n+5)} \right] + \frac{(n+1) \text{ ch } u}{(2n+3)} y''_{n+1} \left[-\delta + \frac{(n+2)^2}{(2n+3)(2n+5)} \right] + \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(\alpha - 1)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \text{ch } u y_{n+3} - \\ &- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \alpha \text{sh } u y'_{n+3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \text{ch } u y''_{n+3} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 (12) \quad g_n(u) = & \frac{(n-1)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)} x'_{n-2} + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u x_n - \\
 & - \left[\delta' + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right] x'_n + \frac{(n+2)(n+4)}{(2n+3)(2n+5)} x'_{n+2} + \\
 & + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(1+\alpha) \operatorname{sh} u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} y_{n-3} + \\
 & + \frac{(n-1)(n-2)(n-3-\alpha) \operatorname{ch} u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} y'_{n-3} + \frac{\operatorname{sh} u}{(2n-1)} y_{n-1} \times \\
 & \times \left[-\frac{n}{(2n-1)(2n+3)} + n \operatorname{ch}^2 u - \delta' \{ \alpha(n-1) + n \} + \right. \\
 & + \frac{(n-1) \{ n^2(1+\alpha) - 2n(2+\alpha) + 3 \}}{(2n-1)(2n-3)} \left. \right] + \frac{\operatorname{ch} u}{(2n-1)} y'_{n-1} \left[(\alpha-n) \delta' - \right. \\
 & - \frac{n}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{(n-1) \{ (n-1)(n-3) + \alpha(n-2) \}}{(2n-1)(2n-3)} \left. \right] + \\
 & + \frac{\operatorname{sh} u}{(2n+3)} y_{n+1} \left[-\delta' \{ (n+1) + \alpha(n+2) \} + (n+1) \operatorname{ch}^2 u - \right. \\
 & - \frac{(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} + \frac{(n+2) \{ (n+2)(n+4) + \alpha(n+1)(n+3) \}}{(2n+3)(2n+5)} \left. \right] + \\
 & + \frac{\operatorname{ch} u}{(2n+3)} y'_{n+1} \left[-\delta' (n+1+\alpha) - \frac{(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} + \right. \\
 & + \frac{(n+2) \{ (n+2) - \alpha(n+3) \}}{(2n+3)(2n+5)} \left. \right] + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(1+\alpha) \operatorname{sh} u}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} y_{n+3} - \\
 & - \frac{(n+2)(n+3)(n+4+\alpha) \operatorname{ch} u}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} y'_{n+3},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \delta &= \operatorname{ch}^2 u - \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n+3)(2n-1)}, \\
 \delta' &= \operatorname{ch}^2 u - \frac{2n^2 + 2n - 3}{(2n+3)(2n-1)}, \quad \alpha = (\lambda + 2\mu)/(h\lambda + \mu).
 \end{aligned}$$

Ponieważ obliczenia naprężeń obejmują dużo algebraicznych przekształceń, a ostateczne wyrażenia są dość długie, podajemy explicite tylko dwa z nich. Pozostałe wyrażenia są podobnego typu. Należy pamiętać, że w powyższych równaniach stałe z ujemnymi wskaźnikami przyjmujemy za zero.

3. Interpretacja zagadnienia. Wprowadźmy stan naprężenia sprężystość równoważny działaniu na wydłużoną sferoidę $u = u_1$ dwóch sił P skierowanych wzdłuż osi obrotu

$$(14) \quad \sigma_u^0 = \lim_{l \rightarrow 0} \sigma_u^0(l), \quad \tau_{uv}^0 = \tau_{uv}^0(l) = 0,$$

gdzie

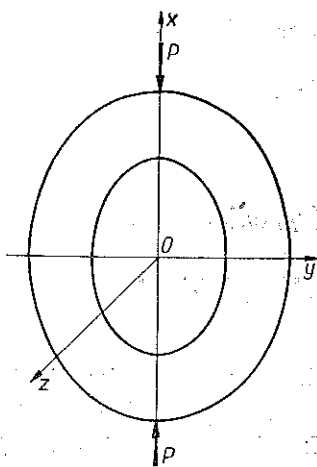
$$(15) \quad \sigma_u^0(l) = - \frac{P(l+1) \cos^{2l} v}{\pi \operatorname{sh}^2 u_1}.$$

Zdefiniowany w ten sposób stan naprężenia jest zgodny z zasadą Saint Venanta w jej pełnej postaci oraz tworzy granicę ciągu przybliżonych stanów naprężeń $[\sigma_u^0(l), \tau_{uv}^0(l)]$, spełniających zasadę sprężystej równoważności jedynie w sposób całkowy. Otrzymujemy

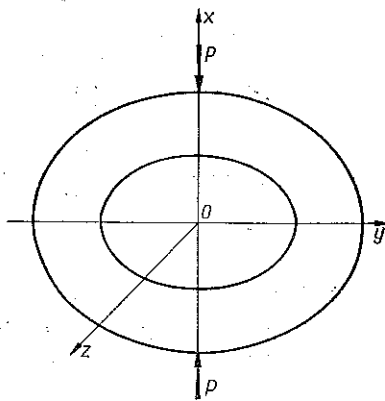
$$(16) \quad \sigma_u^0(l) = \frac{-P}{\pi \operatorname{sh}^2 u_1} \left[\frac{l+1}{2l+1} + \sum_1^{\infty} (4n+1) a_{l,2n} P_{2n}(\cos v) \right], \quad \tau_{uv}^0(l) = 0,$$

gdzie

$$a_{l,2n} = \frac{(l+1) 2l(2l-2) \dots (2l-2n+2)}{(2l+1)(2l+3) \dots (2l+2n+1)}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Przechodząc formalnie do granicy przy $l \rightarrow \infty$ powyższe równania redukujemy do postaci

$$(17) \quad \sigma_u^0 = \frac{-P}{\pi \operatorname{sh}^2 u_1} \sum_0^{\infty} (4n+1) P_{2n}(\cos v), \quad \tau_{uv}^0 = 0,$$

którą można przepisać jako

$$(18) \quad \sigma_u^0 = \frac{\sigma_s}{2h^4} \sum_0^{\infty} (4n+1) P_{2n}(\cos v), \quad \tau_{uv}^0 = 0,$$

przy czym

$$\sigma_s = - \frac{P \operatorname{sh}^2 u_1}{\pi}.$$

Szereg $\sum_0^{\infty} (4n+1) P_{2n}(\cos v)$ jest zbieżny w sensie Abela-Poissona dla $v \neq 0, \pi$, natomiast rozbieżny dla $v = 0, \pi$ i jego granica dąży do ∞ . Na tej podstawie otrzymujemy ostatecznie [por. (5)]

$$(19) \quad \begin{aligned} \sigma_u^0 &= 0, & v &\neq 0, \pi, \\ \sigma_u^0 &= -\infty, & v &= 0, \pi. \end{aligned}$$

4. Warunki brzegowe. Rozwiązanie zagadnienia przedstawionego na wstępie sprowadza się do określenia stanu naprężenia $\sigma = [U, V, \sigma_u, \sigma_v, \sigma_w, \tau_{uv}]$ spełniającego warunki brzegowe [18] na powierzchni $u = u_1$, przy czym na $u = u_0$ naprężenia znikają $[\sigma_u = \tau_{uv} = 0]$ w przypadku pustki, w przypadku zaś sztywnego wtrącenia znikają odpowiednie przemieszczenia $[U = V = 0]$.

Wymagany w naszym zagadnieniu rozkład naprężeń σ' powinien być taki, ażeby przyjmował wartości σ na $u = u_1$ i nie wywoływał żadnych naprężeń lub przemieszczeń na $u = u_0$, odpowiednio dla przypadku pustki lub wtrącenia sztywnego. Stąd warunki brzegowe spełnione, jeżeli

$$(20) \quad \begin{aligned} [f_{2n}(u)]_{u=u_1} &= \frac{4n+1}{2} \sigma_s, & [g_{2n}(u)]_{u=u_1} &= 0, \\ [f_{2n}(u)]_{u=u_0} &= 0, & [g_{2n}(u)]_{u=u_0} &= 0 \end{aligned}$$

dla przypadku pustki wewnętrznej i

$$(21) \quad \begin{aligned} [f_{2n}(u)]_{u=u_1} &= \frac{4n+1}{2} \sigma_s, & [g_{2n}(u)]_{u=u_1} &= 0, \\ [p_{2n}(u)]_{u=u_0} &= 0, & [q_{2n}(u)]_{u=u_0} &= 0 \end{aligned}$$

dla przypadku sztywnego wtrącenia.

Równania te tworzą nieskończony układ jednoczesnych równań liniowych. Z powodu złożoności współczynników nie jest możliwe przejście do analitycznego rozwiązania tych równań. Każda interesująca konfiguracja musi być traktowana oddzielnie, a wymagana liczba stałych A_n, A'_n, B_n i B'_n wyliczona w sposób numeryczny. Naprężenia σ' obliczamy w następstwie znajomości odpowiednich stałych.

5. Sferoidy spłaszczone. Przyjmując wspólny środek sferoid jako początek układu współrzędnych oraz wspólną oś obrotu zgodną z osią x -ów wprowadzamy następujące współrzędne:

$$(22) \quad \begin{aligned} x &= \operatorname{sh} u \cos v, \\ y &= \operatorname{ch} u \sin v \cos w, \\ z &= \operatorname{ch} u \sin v \sin w, \end{aligned}$$

gdzie $u = \text{const}$ przedstawia sferoidę spłaszczoną. Zewnętrzna powierzchnia została zdefiniowana jako $u = u_1$, a powierzchnia podziału między dwoma materiałami

jako $u = u_0$. Siły działają wzdłuż osi x , tj osi obrotu. Trzy współczynniki dystorsji są określone w sposób następujący:

$$(23) \quad h_u = h_v = h = (\text{sh}^2 u + \cos^2 v)^{1/2}, \quad h_w = \text{ch } u \sin v.$$

Niech U, V, W oznaczają przemieszczenia w założonym układzie współrzędnych. Przyjmujemy, że $W = 0$ oraz, że U, V są niezależne od w , ponieważ zagadnienie jest osiowosymetryczne i nie pojawia się skrećanie. Przestrzenna dylatacja jest dana za pomocą równania (3), a składowe obrotu za pomocą równania (4). Równania równowagi są również określone równaniami (5) z tym, że należy pamiętać, że h i h_w są określone za pomocą równania (22) a nie (2). Jako rozwiązanie przydatne w naszym zagadnieniu bierzemy

$$(24) \quad 4GU = \frac{1}{h} \sum_0^{\infty} r_n(u) P_n(\cos v),$$

$$4GU = \frac{1}{h} \sum_1^{\infty} s_n(u) \frac{d}{dv} P_n(\cos v),$$

przy czym $r_n(u)$ i $s_n(u)$ są określone następująco:

$$(25) \quad r_n(u) = -x'_n + (2\alpha - 1) \text{ch } u \left[\frac{n}{2n-1} y_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} y_{n+1} \right] -$$

$$- \text{sh } u \left[\frac{n}{2n-1} y'_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} y'_{n+1} \right]$$

oraz

$$(26) \quad s_n(u) = -x_n + y_{n-1} \text{sh } u \frac{(2\alpha - n)}{(2n-1)} - y_{n+1} \text{sh } u \frac{(n+1+2\alpha)}{(2n+3)}.$$

W powyższych wyrażeniach

$$(27) \quad x_n = A_n P_n(i \text{sh } u) + A'_n Q_n(i \text{sh } u),$$

$$y_n = B_n P_n(i \text{sh } u) + B'_n Q_n(i \text{sh } u),$$

gdzie P_n i Q_n są funkcjami Legendre'a n -tego stopnia, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju. Kreski oznaczają różniczkowanie względem u . A_n, A'_n, B_n i B'_n są stałymi.

Naprężenia są następujące:

$$(28) \quad \sigma_{uu} = \frac{1}{h^4} \sum_0^{\infty} h_n(u) P_n(\cos v), \quad \sigma_{uv} = \frac{1}{h^4} \sum_0^{\infty} k_n(u) \frac{d}{dv} P_n(\cos v),$$

gdzie $h_n(u)$ i $k_n(u)$ są dane przez

$$(29) \quad h_n(u) = \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)} x_{n-2} - \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} x''_{n-2} +$$

$$+ \text{sh } u \text{ch } u x'_n - \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+3)} x_n - \delta x''_n -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} x_{n+2} - \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} x''_{n+2} - \\
& - y_{n-3} \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \operatorname{sh} u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} [n(1-a) + 2a - 4] + \\
& + y'_{n-1} \frac{(n-1)(n-2) \operatorname{ch} u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} [2a - 4 - 3n] - \\
& - \frac{n(n-1)(n-2) \operatorname{sh} u}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} y''_{n-3} + y_{n-1} \frac{n \operatorname{sh} u}{(2n-1)} \times \\
& \times \left[\operatorname{ch}^2 u - \delta \{a - 1 + n(2-a)\} - \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+3)} + \right. \\
& \left. + \frac{(n-1)^2 \{2a - 7 + n(3-a)\}}{(2n-1)(2n-3)} \right] + y'_{n-1} \frac{\operatorname{ch} u}{(2n-1)} \left[-a n \delta + n \operatorname{sh}^2 u + \right. \\
& \left. + \frac{(n-1)^2 \{2a - 4 - 3an\}}{(2n-1)(2n-3)} \right] - y''_{n-1} \frac{n \operatorname{sh} u}{(2n-1)} \left[\delta + \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} \right] + \\
& + y_{n+1} \frac{(n+1) \operatorname{sh} u}{(2n+3)} \left[\delta \{3 - 2a + n(2-a)\} + \operatorname{ch}^2 u - \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} + \right. \\
& \left. + \frac{(n+2)^2 \{a - 6 - n(3-a)\}}{(2n+3)(2n+5)} \right] + y'_{n+1} \frac{(n+1) \operatorname{ch} u}{(2n+3)} \left[-3a\delta + \operatorname{sh}^2 u - \right. \\
& \left. - \frac{a(n+2)^2}{(2n+3)(2n+5)} \right] - y''_{n+1} \frac{(n+1) \operatorname{sh} u}{(2n+3)} \left[\delta + \frac{(n+2)^2}{(2n+3)(2n+5)} \right] + \\
& + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(1-a)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \operatorname{sh} u y_{n+3} - \\
& - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \cdot 3a \operatorname{ch} u y'_{n+3} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \operatorname{sh} u y''_{n+3}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
(30) \quad k_n(u) &= \frac{-(n+1)(n+3)}{(2n-1)(2n-3)} x'_{n+3} + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u x_n + \\
& + x'_n \left[-\delta' + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right] + \frac{(n+2)(n+4)}{(2n+3)(2n+5)} x'_{n+2} + \\
& + y_{n-3} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(a-1)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \operatorname{ch} u + \\
& + y'_{n-3} \frac{(n-1)(n-2)(3+a-n)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \operatorname{sh} u + y_{n-1} \frac{\operatorname{ch} u}{(2n-1)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[-\delta' \{n + (n-1)a\} + n \operatorname{sh}^2 u + \frac{n}{(2n-1)(2n+3)} + \right. \\
 & + \left. \frac{(n-1)\{an(n-2) - (n-1)(n-3)\}}{(2n-1)(2n-3)} \right] + y'_{n-1} \frac{\operatorname{sh} u}{(2n-1)} \left[(\alpha-n)\delta' + \right. \\
 & + \left. \frac{n}{(2n-1)(2n+3)} - \frac{(n-1)\{\alpha(n-2) + (n-3)(n-1)\}}{(2n-1)(2n-3)} \right] + \\
 & + y_{n+1} \frac{\operatorname{ch} u}{(2n+3)} \left[\delta' \{\alpha(n+2) - (n+1)\} + (n+1) \operatorname{sh}^2 u + \right. \\
 & + \left. \frac{(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{(n+2)\{(n+4)(n+2) + \alpha(n+1)(n+3)\}}{(2n+3)(2n+5)} \right] + \\
 & + y'_{n+1} \frac{\operatorname{sh} u}{(2n+3)} \left[-\delta'(n+1+a) + \frac{(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} + \right. \\
 & + \left. \frac{(n+2)\{\alpha(n+3) - (n+2)\}}{(2n+3)(2n+5)} \right] + y_{n+3} \operatorname{ch} u \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(\alpha-1)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} - \\
 & - y'_{n+3} \operatorname{sh} u \frac{(n+2)(n+3)(n+4+a)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)},
 \end{aligned}$$

przy czym

$$(31) \quad \delta = \operatorname{sh}^2 u + \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+3)}, \quad \delta' = \operatorname{sh}^2 u + \frac{2n^2 + 2n - 3}{(2n-1)(2n+3)}.$$

Pozostałe naprężenia są podobnego typu. Należy pamiętać, że w powyższych równaniach stałe z ujemnymi wskaźnikami przyjmuje się za zero.

Wprowadzimy stan naprężenia sprężystości równoważny działaniu na spłaszczoną sferoidę $u = u_1$ dwóch sił P skierowanych wzdłuż osi obrotu

$$(32) \quad \sigma_u^0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_u^0(l), \quad \tau_{uv}^0 = \tau_{uv}^0(l) = 0,$$

gdzie

$$(33) \quad \sigma_u^0(l) = \frac{-P(l+1) \cos^{2l} v}{\pi \operatorname{ch}^2 u_1}.$$

Uwaga wyrażona po zależności (15) stosuje się i w tym przypadku. Otrzymujemy

$$(34) \quad \sigma_u^0 = \frac{-P}{\pi \operatorname{ch}^2 u_1} \left[\frac{l+1}{2l+1} + \sum_1^{\infty} (4n+1) a_{l,2n} P_{2n}(\cos v) \right], \quad \tau_{uv}^0 = 0,$$

gdzie

$$a_{l,2n} = \frac{(l+1) 2l (2l-2) \dots (2l-2n+2)}{(2l+1) (2l+3) \dots (2l+2n+1)}$$

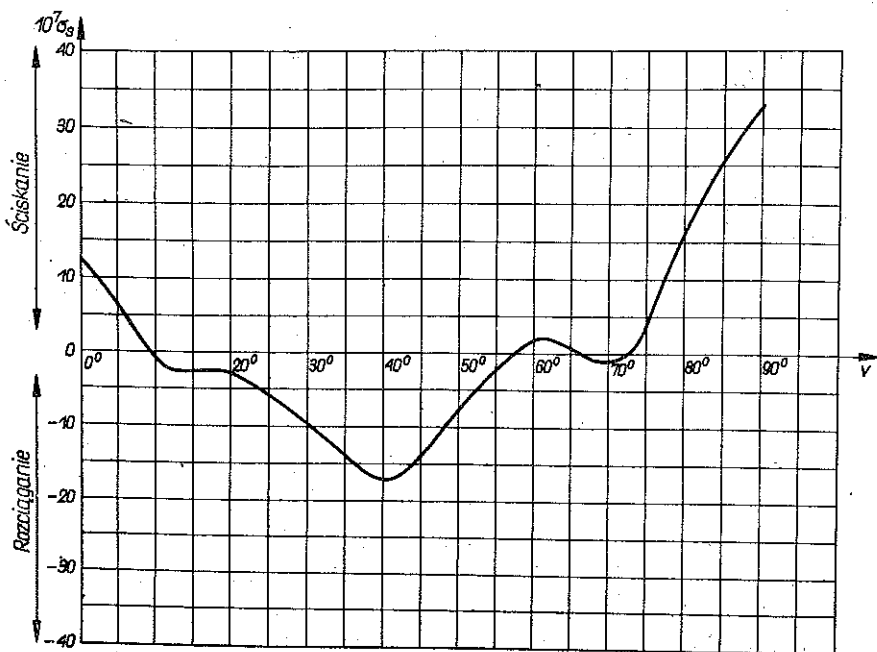
i równania (17) przybierają postać

$$(35) \quad \sigma_u^0 = \frac{-P}{2\pi \operatorname{ch}^2 u_1} \sum_0^{\infty} (4n+1) P_{2n}(\cos v), \quad \tau_{uv}^0 = 0,$$

gdzie

$$(36) \quad \sigma_s = \frac{-P(\operatorname{ch}^2 u_1)}{\pi}.$$

Uwagi odnośnie szeregu $\sum_0^{\infty} (4n+1) P_{2n}(\cos v)$ pozostają bez zmiany.



Rys. 3. Wykres σ_v w przypadku pustki wewnętrznej

Warunki brzegowe będą spełnione, jeżeli

$$(37) \quad [h_{2n}(u)]_{u=u_1} = \frac{4n+1}{2} \sigma_s, \quad [k_{2n}(u)]_{u=u_1} = 0,$$

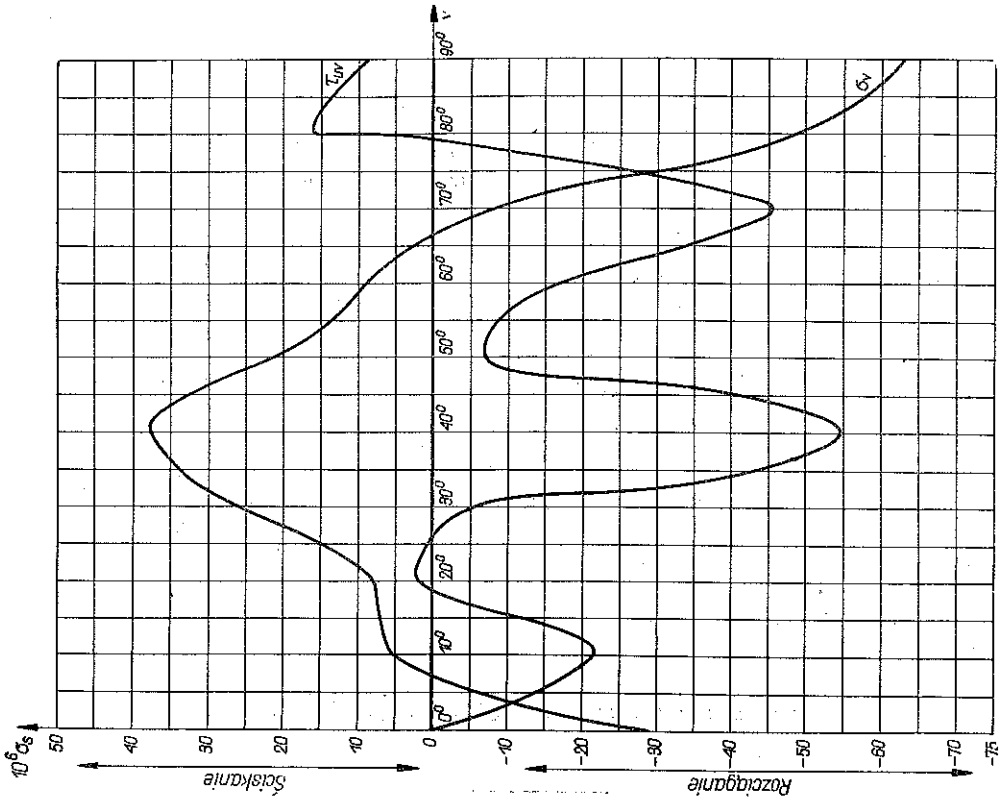
$$[h_{2n}(u)]_{u=u_0} = 0, \quad [k_{2n}(u)]_{u=u_0} = 0,$$

dla przypadku pustki wewnętrznej i

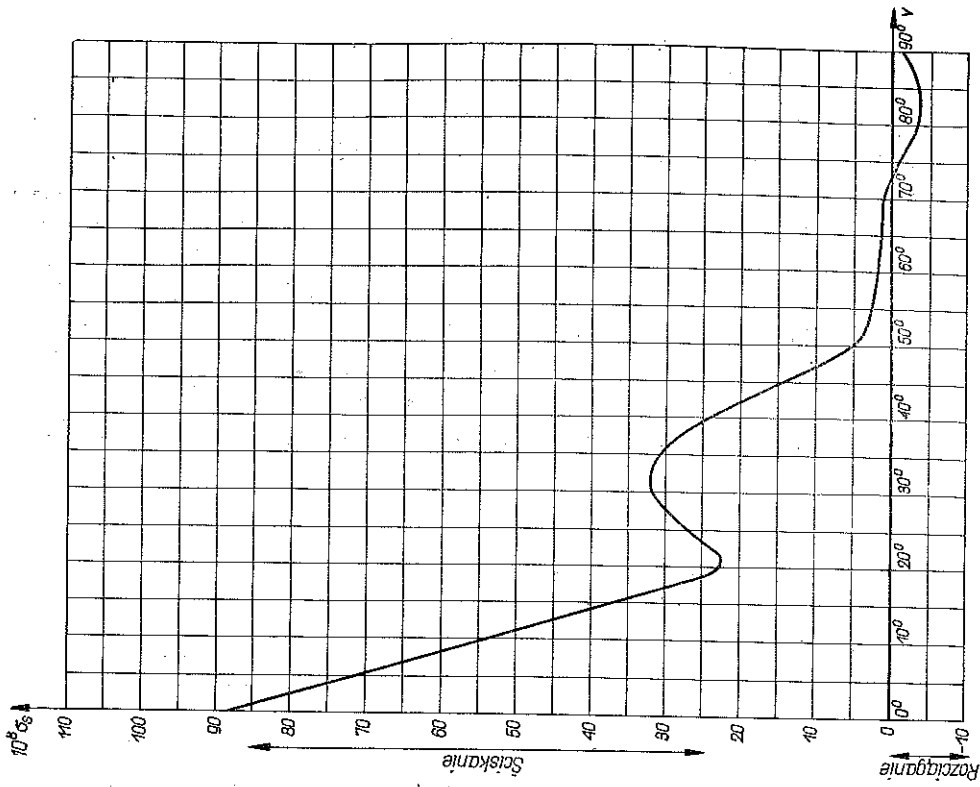
$$(38) \quad [h_{2n}(u)]_{u=u_1} = \frac{4n+1}{2} \sigma_s, \quad [k_{2n}(u)]_{u=u_1} = 0,$$

$$[r_{2n}(u)]_{u=u_0} = 0, \quad [s_{2n}(u)]_{u=u_0} = 0$$

dla przypadku sztywnego wtrącenia.



Rys. 4. Wykres σ_y i τ_{xy} w przypadku sztywnego wtrącenia



Rys. 5. Wykres σ_x i τ_{xy} w przypadku sztywnego wtrącenia

Równania te znowu tworzą nieskończony układ jednoczesnych równań liniowych i każda interesująca konfiguracja musi być traktowana oddzielnie.

6. Wyniki numeryczne i ilustracja graficzna. Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone w przypadku sferoidy wydłużonej. Zewnętrzną powierzchnię $u = u_1$ przyjęto jako $ch u_1 = 3$, a powierzchnię podziału $u = u_0$ jako $ch u_0 = 2$. Współczynnik Poissona założono równy 0,3. Obliczenia wykonywano zachowując pięć wyrazów w każdym wyrażeniu. Jednakże zbieżność wyników nie została przedyskutowana. Końcowe wykresy dla σ_v na wewnętrznej powierzchni w przypadku pustki zamieszczono na rys. 3, a wykresy dla σ_u , σ_v i τ_{uv} wyrażone w jednostkach σ_s na powierzchni podziału w przypadku sztywnego wtrącenia pokazano na rys. 4 i 5.

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. SADOWSKY and E. STERNBERG, *Stress concentration around an ellipsoidal cavity in an infinite body under arbitrary plane stress perpendicular to the axis of revolution of the cavity*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **69** (1947).
2. H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Second Edition, Springer Verlag, Berlin 1958.
3. S. C. DAS, *Stress concentrations around a small spherical or spheroidal inclusion on the axis of a circular cylinder in torsion*, J. Appl. Mech., **21** (1954).
4. S. C. DAS, *On the stresses in twisted composite spheres and spheroids*, Canadian J. Phys., **7**, 35 (1957).
5. J. GOLECKI, *The sphere weakened by a concentric inclusion of different elastic properties under concentrated loads*, Arch. Mech. Stos., **9** (1957).

Резюме

СЛОЖНЫЕ СФЕРОИДЫ ПОДВЕРЖЕННЫЕ ДЕЙСТВИЮ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК

Определяются напряжения в сфероиде состоящих из двух различных упругих материалов, подверженных силам сжатия, действующим вдоль общей оси вращения, Решение получено в виде рядов. Приводятся также числовые результаты. -

Summary

COMPOSITE SPHEROIDS UNDER CONCENTRATED LOADS

Stresses in composite spheroids of two different isotropic elastic materials, under compressive forces acting along the common axis of revolution have been obtained. The solution is in series form. Numerical results are provided.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MADRAS

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lipca 1964 r.