ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, 13 (1965)

O STOSOWALNOŚCI ANALOGII SPRĘŻYSTEJ W ZAKRESIE NIELINIOWEJ GEOMETRYCZNIE TEORII PEŁZANIA MEMBRAN KOŁOWYCH

ZBIGNIEW BYCHAWSKI (KRAKÓW)

1. Analogia sprężysta w zastosowaniu do problemów nieliniowego pełzania wykorzystana została przez HOFFA [1]. Idea tej analogii polega na tym, że naprężenia w materiale pełzającym w zakresie stanu ustalonego wyznaczamy opierając się na rozwiązaniu dla naprężeń w materiale o nieliniowej charakterystyce sprężystej. Zastosowanie analogii umożliwia identyczna formalnie budowa praw określających nieliniowość fizykalną w obu przypadkach [1], mianowicie dla pełzania

$$\dot{\varepsilon} = \Phi_c \sigma^n \tag{1.1}$$

oraz dla nieliniowej sprężystości

$$\varepsilon = \Phi_e \sigma^n.$$

W powyższych wzorach Φ_c, Φ_e i n są stałymi materiałowymi, ε i σ są odpowiednio odkształceniem i naprężeniem, kropka zaś oznacza różniczkowanie względem czasu. Prosta zamiana prędkości odkształcenia na odkształcenie lub odwrotnie oraz zamiana odpowiednich stałych pozwala na przejście od rozwiązań jednego zagadnienia od rozwiązań drugiego. Analogia rozciąga się również na warunki brzegowe, w których warunki dla prędkości przemieszczeń, odpowiadające problemowi pełzania, równoważne są odpowiednim warunkom przemieszczeniowym dla nieliniowej sprężystości.

Możliwość wykorzystania analogii Hoffa dla płyt i membran była przedmiotem analizy ODQVISTA [2]. Dochodzi on do wniosku, że jest to możliwe tylko w tym przypadku, gdy rozważany problem mieści się w zakresie teorii geometrycznie liniowej, tzn. gdy przemieszczenia są małe. Ponieważ analogia Hoffa dotyczy fizycznej strony zagadnienia, ODQVIST nie znajduje możliwości stosowania analogii sprężystej w zakresie teorii geometrycznej nieliniowej, tzn. dla dużych przemieszczeń.

Wykażemy, że analogia sprężysta może być wykorzystana również w przypadku geometrycznej nieliniowości, a co za tym idzie, że ma ona ogólniejszy charakter, aniżeli analogia Hoffa. Istota rzeczy polega tutaj na wykorzystaniu rozwiązań dla naprężeń w zakresie nieliniowej geometrycznie i fizykalnie teorii membran kołowych przy rozważaniu analogicznego problemu w zakresie pełzania ustalonego. To, że analogia sprężysta da się w tym przypadku zastosować, wynika z faktu,

[1] Dla stanu pełzania jednoosiowego.

że w równaniu nieliniowym problemu pełzania można rozdzielić zmienne. Otrzymujemy w wyniku dwa niezależne równania, z których jedno jest formalnie identyczne z równaniem dla membrany kołowej o nieliniowej geometrycznie i nieliniowej fizykalnie charakterystyce sprężystej[1]. Rozwiązanie tego ostatniego zagadnienia bez analogii podane zostało przez Odqvista, [3, 4 i 7]. W pracy naszej podstawowe równania wyprowadzimy inną metodą.

2. Rozważamy duże ugięcia membrany kołowej z materiału pełzającego według prawa ogólnego

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \Phi_c s_{ij}, \tag{2.1}$$

w którym $\dot{\varepsilon}_{ij}$ oznacza składowe prędkości odkształceń, s_{ij} składowe dewiatora naprężenia oraz Φ_c współczynnik ciekłości, który jest funkcją stanu naprężenia.

Zgodnie z prawem dla ustalonego pełzania Φ_c jest funkcją potęgową intensywności naprężeń σ_i:

$$\Phi_c = \frac{3}{2} B\sigma_i^{n-1}, \tag{2.2}$$

gdzie B i n są stałymi. Przyjmujemy, że n jest liczbą całkowitą, większą od jedności.

Zakładamy, że membrana jest utwierdzona na brzegu $r = R$ (R oznacza promień membrany) i obciążona stałym obciążeniem o intensywności p. Ponieważ problem jest osiowo-symetryczny, prędkości odkształceń, odpowiednio w kierunku promieniowym i obwodowym, mają postać

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr}\frac{dw}{dr}, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{\dot{u}}{r}, \tag{2.3}$$

gdzie u, w są odpowiednio przemieszczeniami w kierunku promieniowym i poprzecznym (ugięcie). Z warunku nieściśliwości ośrodka pełzającego otrzymujemy poprzeczną prędkość odkształcenia:

$$\dot{\varepsilon}_z = -(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi). \tag{2.4}$$

Z drugiej strony równanie fizyczne (2.1) daje prędkości odkształceń w postaci

$$\dot{\varepsilon}_r = \Phi_c s_r, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \Phi_c s_\varphi, \tag{2.5}$$

lub też, jeśli wprowadzimy składowe tensora naprężenia, w formie

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{3}\Phi_c(2\sigma_r - \sigma_\varphi), \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{3}\Phi_c(2\sigma_\varphi - \sigma_r). \tag{2.6}$$

Równania równowagi membrany kołowej sprowadzają się do następującego układu:

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_r\frac{dw}{dr} = -\frac{pr}{2h}, \tag{2.7}$$

gdzie h jest grubością membrany.

[1] Ogólnie biorąc charakterystyka może dotyczyć stanu natychmiastowego.

Wprowadzając bezwymiarowe wielkości

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \varrho = \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad z = \varrho \frac{\sigma_r}{C}, \quad C = \frac{p}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^2, \tag{2.8}$$

otrzymamy przy wykorzystaniu równania $(2.7)_1$

$$\sigma_r = C\frac{z}{\varrho}, \quad \sigma_\varphi = C\left(2z' - \frac{z}{\varrho}\right), \quad z' = \frac{dz}{d\varrho}, \tag{2.9}$$

a równanie $(2.7)_2$ przyjmie postać

$$\frac{d\bar{w}}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{z}. \tag{2.10}$$

Intensywność naprężeń wyrażoną przez naprężenia można napisać w formie

$$\sigma_i^2 = \sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 = C^2\Omega, \tag{2.11}$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$\Omega = 3\left(\frac{z}{\varrho}\right)^2 - 6\frac{z}{\varrho}z' + 4z'^2. \tag{2.12}$$

Wtedy Φ_c według wzoru (2.2) wyniesie

$$\Phi_c = \frac{3}{2}BC^{n-1}\Omega^{\frac{1}{2}(n-1)}. \tag{2.13}$$

Podstawiając (2.9) oraz (2.13) do wzorów na prędkości odkształceń (2.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \frac{1}{2}BC^n\Omega^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(3\frac{z}{\varrho} - 2z'\right), \\ \dot{\varepsilon}_\varphi &= \frac{1}{2}BC^n\Omega^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(4z' - 3\frac{z}{\varrho}\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Warunek nierozdzielności

$$\frac{d}{dr}(r\dot{\varepsilon}_\varphi) - \dot{\varepsilon}_r = -\frac{1}{r}\frac{d\dot{w}}{dr}\frac{dw}{dr} \tag{2.15}$$

przekształcamy za pomocą (2.8) do postaci

$$2\frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho}(\dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r) = -\frac{p}{C}\frac{d\dot{w}}{d\varrho}\frac{dw}{d\varrho}, \tag{2.16}$$

a następnie wprowadzając prędkości odkształceń (2.14) oraz zależność (2.10), otrzymujemy ostatecznie

$$\Omega^{\frac{1}{2}(n-3)}\left[8\Omega' z'' + (n-1)\Omega'\left(4z' - 3\frac{z}{\varrho}\right)\right]\varrho = 2\gamma_c\dot{z}\left(\frac{\varrho}{z}\right)^3. \tag{2.17}$$

Tutaj oznaczono przez Ω' pochodną względem ϱ oraz

$$\gamma_c = \frac{p}{BC^{n+1}}. \tag{2.18}$$

Równanie (2.17) można otrzymać z równań Odqvista wyprowadzonych inną metodą w pracy [7] [por. wzory (19)].

Równanie (2.17) łącznie z warunkami brzegowymi i początkowymi ujmuje problem pełzania membrany kołowej, a rozwiązanie jego określa stan naprężenia w membranie. Równanie (2.10) pozwala z kolei na wyznaczenie funkcji ugięcia.

Warunki brzegowe są następujące (t jest dowolne):

1) na brzegu membrany, tzn. dla $\varrho = 1$,

$$\dot{u}(1) = 0 \quad \text{lub} \quad \left[4\dot{z}' - 3\frac{\dot{z}}{\varrho}\right]_{\varrho=1} = 0; \tag{2.19}$$

2) na brzegu membrany

$$\overline{w}(1) = 0; \tag{2.20}$$

3) w środku membrany, tzn. dla $\varrho = 0$, naprężenia powinny być sobie równe:

$$[\sigma_r - \sigma_\varphi]_{\varrho=0} = 0 \quad \text{lub} \quad \left[z' - \frac{z}{\varrho}\right]_{\varrho=0} = 0. \tag{2.21}$$

Warunki początkowe przyjmują postać (ϱ jest dowolne):

1) naprężenia

$$\begin{aligned} [\sigma_r]_{t=0} &= \sigma_{r0} \quad \text{lub} \quad \left[\frac{z}{\varrho}\right]_{t=0} = \frac{z_0}{\varrho}, \\ [\sigma_\varphi]_{t=0} &= \sigma_{\varphi 0} \quad \text{lub} \quad \left[2z' - \frac{z}{\varrho}\right]_{t=0} = 2z_0' - \frac{z_0}{\varrho}; \end{aligned} \tag{2.22}$$

2) ugięcie początkowe

$$[\overline{w}]_{t=0} = \overline{w}_0. \tag{2.22'}$$

Początkowy stan naprężenia i przemieszczenia (dla $t = 0$) jest dany i określony za pomocą wielkości z_0 i $\overline{w}$, które zależą od sprężystych własności materiału w chwili obciążenia (własności tych dla $t > 0$ nie uwzględniamy).

Wykażemy teraz, że rozwiązanie problemu pełzania membrany może być łatwo znalezione, jeżeli znane jest odpowiednie rozwiązanie problemu nieliniowego geometrycznie i fizykalnie w zakresie sprężystym (natychmiastowym).

Przyjmujemy rozwiązanie równania (2.17) w postaci

$$z(\varrho, t) = \bar{z}(\varrho)\,\varphi(z). \tag{2.23}$$

Podstawiając tę funkcję do równania stwierdzimy, że rozdzielenie zmiennych jest możliwe. Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$\frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{\bar{z}}{\varrho}\right)^2\left[8\overline{\Omega}\bar{z}'' + (n-1)\,\overline{\Omega}'\left(4\bar{z}' - 3\frac{\bar{z}}{\varrho}\right)\right]\overline{\Omega}^{\frac{1}{2}(n-3)} = 2\,\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^{n+3}} = -\lambda, \tag{2.24}$$

gdzie $\overline{\Omega} = \Omega(\bar{z})$, a $\lambda > 0$ jest stałą, którą należy wyznaczyć.

Analogiczne do przypadku równania (2.24) równanie problemu sprężystego znajdujemy zastępując w wyrażeniach (2.6) wielkości $\dot{\varepsilon}_r$, $\dot{\varepsilon}_\varphi$ i Φ_c, odpowiednio przez ε_r, φ_φ oraz

$$\Phi_e = \frac{3}{2} A \sigma^{m-1}, \tag{2.25}$$

gdzie A i m oznaczają stałe (m jest liczbą całkowitą większą od 1). Otrzymujemy w ten sposób

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{2} A C^m \Omega_*^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(3 \frac{z_*}{\varrho} - 2z_*'\right), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2} A C^m \Omega_*^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(4z_*' - 3 \frac{z_*}{\varrho}\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Podstawiając powyższe odkształcenia do równania nierozdzielności

$$2 \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho}(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) = -\frac{1}{2} \frac{p}{C} \left(\frac{d\overline{w}}{d\varrho}\right)^2 \tag{2.27}$$

oraz wykorzystując równanie (2.10) znajdziemy po prostych przekształceniach

$$\begin{gathered} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{z_*}{\varrho}\right)^2 \left[8\Omega_* z_*'' + (m-1)\Omega_*' \left(4z_*' - 3\frac{z_*}{\varrho}\right)\right] \Omega_*^{\frac{1}{2}(m-3)} = -1, \\ \Omega_* = \Omega(z_*), \quad \gamma = \frac{p}{AC^{m+1}}. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Równanie powyższe jest równaniem dla membrany sprężystej.

Na podstawie (2.24) otrzymujemy dwa równania niezależne ze względu na zmienne ϱ i t:

$$\frac{1}{\lambda \gamma_c} \left(\frac{\bar{z}}{\varrho}\right)^2 \left[8\overline{\Omega} \bar{z}'' + (n-1)\overline{\Omega}' \left(4\bar{z}' - 3\frac{\bar{z}}{\varrho}\right)\right] \overline{\Omega}^{\frac{1}{2}(n-3)} = -1, \tag{2.29}$$

$$2 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi^{n+3}} = -\lambda. \tag{2.30}$$

Porównując równania (2.28) i (2.29), dostrzegamy pełną analogię formalną. Jeżeli zatem znane jest rozwiązanie równania (2.28)

$$z_* = f(\gamma, m, \varrho), \tag{2.31}$$

to rozwiązanie pierwszego z równań dla problemu pełzania (2.29) otrzymamy w postaci

$$\bar{z} = f(\lambda \gamma_c, n, \varrho). \tag{2.32}$$

Drugie z równań problemu pełzania (2.30) daje

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{[1 + \frac{1}{2}\lambda \varphi_0^{n+2}(n+2)\, t]^{1/(n+2)}}, \tag{2.33}$$

gdzie φ_0 jest wartością φ w chwili $t = 0$. Pełne rozwiązanie może być zatem przedstawione zgodnie z (2.23) w postaci

$$z = \varphi(t) f(\lambda\gamma_c, n, \varrho), \tag{2.34}$$

w którym czas odgrywa rolę parametru.

Zgodnie z warunkami początkowymi (2.22)

$$[z]_{t=0} = z_0, \tag{2.35}$$

a zatem zgodnie z (2.34) mamy

$$z_0 = \varphi_0 f(\lambda\gamma_c, n, \varrho). \tag{2.36}$$

Jeżeli stan naprężenia i przemieszczenia początkowy membrany określony jest jej nieliniowo-sprężystą reakcją (dla $t = 0$), to wówczas stan ten wyznacza (2.31), czyli

$$z_* = z_0 = f(\gamma, m, \varrho). \tag{2.37}$$

Ponieważ stan początkowy jest funkcją stałych sprężystości, przeto w rozwiązaniu (2.32) należy przyjąć odpowiednio γ i m za $\lambda\gamma_c$ i n. Wynika stąd równość

$$z_* = \bar{z} = z_0. \tag{2.38}$$

Dla $t > 0$ pomijamy wpływ własności sprężystych membrany. Rozwiązanie (2.38) musi w tym przypadku spełniać równocześnie równania (2.28) i (2.29). Porównując lewe strony obu równań przy podstawieniu (2.38), otrzymujemy warunek dla λ, który powinien być spełniony dla dowolnego $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$ $(\Omega_0 = \Omega(z_0))$:

$$\lambda = \frac{B}{A} C^{n-m} \frac{8\Omega_0 z_0'' \varrho + (n-1)\, \Omega_0'(4z_0'\varrho - 3z_0)}{8\Omega_0 z_0'' \varrho + (m-1)\, \Omega_0'(4z_0'\varrho - 3z_0)} \Omega_0^{\frac{1}{2}(n-m)} = \text{const}. \tag{2.39}$$

W szczególnym przypadku $m = n$, tzn. wtedy, gdy nieliniowość sprężystą i nieliniowość pełzania określa identyczny wykładnik potęgowy, mamy

$$\lambda = \frac{B}{A} \tag{2.40}$$

oraz $\varphi_0 = 1$. Dla tej ostatniej wartości λ pełne rozwiązanie ma postać [według wzoru (2.23)]

$$z = \varphi(t)\, z_0(\varrho), \tag{2.41}$$

gdzie

$$\varphi(t) = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2}(n+2)\frac{B}{A}t\right]^{1/(n+2)}}, \qquad z_0(\varrho) = f(\gamma, n, \varrho). \tag{2.42}$$

Jak wynika z powyższego rozwiązania, stan naprężenia w membranie w chwili początkowej $t = 0$ określa funkcja f jako rozwiązanie problemu sprężystego. Przy $t \to \infty$ naprężenia zmierzają do zera, a prędkość ich spadku określa stosunek stałych A i B.

Przechodząc z kolei do wyznaczenia przemieszczenia w przyjmujemy rozwiązanie równania (2.10) w postaci

$$\bar{w} = \bar{w}_0(\varrho)\,\psi(t). \tag{2.43}$$

Rozdzielając zmienne otrzymujemy tutaj dwa równania:

$$\frac{d\bar{w}_0}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{z}, \tag{2.44}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t)}, \tag{2.45}$$

z których ostatnie określa związek pomiędzy funkcjami czasu. Wynika stąd charakter rozwiązania dla przemieszczenia $\bar{w}$ w zależności od czasu. W chwili początkowej $t = 0$ funkcję ugięcia określa $\bar{w}_0$, które może być w szczególnym przypadku ugięciem nieliniowo-sprężystym. Dla $t \to \infty$ ugięcie $\bar{w}$ wzrasta nieograniczenie.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę przypadek (2.40), to na podstawie (2.43) oraz (2.44) i (2.45) otrzymamy

$$\frac{d\bar{w}}{d\varrho} = -\frac{1}{\varphi(t)}\,\frac{\varrho}{f(\gamma, n, \varrho)}, \tag{2.46}$$

a stąd przez całkowanie

$$\bar{w} = -\left[1 + \frac{1}{2}(n+2)\frac{B}{A}t\right]^{1/(n+2)} \left[\int_0^{\varrho} \frac{\varrho d\varrho}{f(\gamma, n, \varrho)} - D\right]. \tag{2.47}$$

W powyższym rozwiązaniu D oznacza ugięcie początkowe w środku membrany ($\varrho = 0$). i jest liczbą stałą (niezależną od czasu), którą wyznaczamy z warunków brzegowych.

Stałą λ wyznaczamy w ogólnym przypadku warunków początkowych dla materiału pełzającego wykorzystując warunki brzegowe. Jeżeli stan membrany określony jest dla $t = 0$ warunkami (2.22) i (2.22'), to wówczas warunek brzegowy (2.19) pozwala na napisanie równania

$$f'(\lambda\gamma_c, n, 1) - \frac{3}{4} f(\lambda\gamma_c, n, 1) = 0, \tag{2.48}$$

z którego wyznaczyć można wielkość λ.

3. Na podstawie wyników przedstawionych w p. 2 można stwierdzić, że analogia sprężysta znajduje zastosowanie również w przypadku, gdy oprócz nieliniowości fizykalnej, związanej ze sprężystością i pełzaniem, zachodzi konieczność uwzględnienia nieliniowości geometrycznej, tzn. gdy rozważamy duże ugięcia. Przykład zastosowania analogii pokazano w zakresie teorii dużych ugięć pełzających membran kołowych; nie ogranicza to jednak możliwości jej wykorzystania w szczególnych przypadkach innych rodzajów konstrukcji powierzchniowych, np. w zakresie teorii geometrycznie nieliniowej płyt i powłok pełzających w stanie membranowym. Jak można stwierdzić opierając się na podanych powyżej wynikach analogia pozwala na proste znalezienie fizycznie uzasadnionego i dopuszczalnego rozwiązania dla zakresu pełzania.

Literatura cytowana w tekście

1. N. J. Hoff, *Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformations*, Quart. Appl. Math., 12, 1954.

2. F. K. G. Odqvist, *Applicability of the Elastic Analogue to Creep Problems of Plates, Membranes and Beams, Creep in Structures*, Colloquium Stanford University, 1962.

3. F. K. G. Odqvist, *Membrane creep of circular plates*, Arkiv för Fysik, 16, nr 9, 1959.

4. F. K. G. Odqvist, *Non-steady membrane creep of circular plates*, Arkiv för Fysik, 43, **16** (1960).

5. Z. Bychawski, *Badanie wyboczenia przy pełzaniu płyt kołowych w zakresie małych i dużych ugięć*, Rozpr. Inżyn., 4, **9** (1961).

6. Z. Bychawski, *Nieliniowe zagadnienia pełzania membran kołowych*, Streszczenia referatów na Konf. Nauk. ZMOC IPPT PAN w Zakopanem, Warszawa 1964.

7. Ф. К. Г. Одквист, *Одна нелинейная задача о собственных значениях в теории ползучести*, Изд. АН СССР, Москва 1961.

Резюме

О ПРИМЕНИМОСТИ УПРУГОЙ АНАЛОГИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ КРУГОВЫХ МЕМБРАН

Упругую аналогию, в применении к вопросам нелинейной ползучести в области геометрической линейности, предложил Гофф. Исследуя область геометрически нелинейных вопросов ползучести, Одквист высказал мнение, что упругая аналогия не может иметь применения к этим проблемам, между прочим также к мембранам.

Автор доказал существование упругой аналогии для геометрически нелинейной ползучей мембраны кругового контура. Возможность использования аналогии вытекает из того, что в уравнениях мембраны существует возможность разделения переменных (линейной и временной). Уравнения для двух функций времени можно легко интегрировать, тогда как, уравнения для искомых функций, зависящих от линейной переменной, являются формально идентичными как для упругой задачи.

Summary

APPLICABILITY OF THE ELASTIC ANALOGUE TO THE GEONETRICALLY NONLINEAR CREEP THEORY OF CIRCULAR MEMBRANES

For problems of nonlinear creep with linear geometric relations, an elastic analogue has been given by Hoff. In a study of geometrically nonlinear creep problems Odqvist expressed an opinion that elastic analogue cannot find application to such problems, for membranes in particular.

The present author shows the existence of an elastic analogue for a geometrically nonlinear circular membrane undergoing creep. The possibility of application of this analogue follows from the fact that the geometrical and time variables can be separated in the membrane equations. The equations expressing the two functions of time can easily be integrated. Those for the functions of the geometrical variable are formally the same as in the elastic problem.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lipca 1964 r.