

PROJEKTOWANIE ELEMENTÓW MASZYN METODĄ NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W konstrukcjach elementów maszyn nie narażonych na zniszczenie zmęczeniowe współczynnik bezpieczeństwa powinien być obliczany jako stosunek pewnego obciążenia granicznego, przy którym powstają znaczne odkształcenia plastyczne, do obciążenia roboczego. To obciążenie graniczne może być wyznaczone jako nośność graniczna obliczona przy założeniu, że materiał jest sztywno-plastyczny, a jego granica plastyczności jest równa granicy plastyczności materiału rzeczywistego. Obciążenie niszczące będzie oczywiście większe od tak określonego obciążenia granicznego, gdyż rzeczywisty materiał wykazuje wzmocnienie, ale przekroczenie wartości obciążenia granicznego wywołuje duże odkształcenia plastyczne uniemożliwiające dalszą prawidłową pracę elementu. Przy niższych wartościach obciążenia mogą w rzeczywistym materiale powstać lokalne obszary plastyczne w miejscach koncentracji naprężeń, ale do chwili gdy nie obejmą one całego przekroju, sprężyste partie materiału nie pozwolą na rozwinięcie się dużych odkształceń plastycznych i element zachowuje zdolność do prawidłowej pracy.

W nielicznych przypadkach dla elementów o prostych kształtach, takich np. jak skręcane wały, nośność graniczna może być wyznaczona w sposób ścisły. Przy bardziej złożonych kształtach elementu uzyskanie ścisłego rozwiązania sprawia duże trudności. W takich przypadkach nośność może być wyznaczona z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością przez oszacowanie jej górnej i dolnej granicy za pomocą granicznych twierdzeń teorii plastyczności (por. np. [1]). Z twierdzeń tych wynika, co następuje.

1. Granica dolna. Obciążenie graniczne określone z dowolnego rozkładu naprężeń, który spełnia warunki równowagi i warunki brzegowe dla naprężeń oraz w żadnym punkcie nie przekracza warunku plastyczności, nie jest większe od ścisłej wartości obciążenia granicznego.

2. Granica górna. Przyjmijmy dowolny schemat odkształcenia, spełniający warunki ciągłości i przemieszczeniowe warunki brzegowe. Zakładając następnie, że występują małe odkształcenia, i porównując pracę wykonaną przez naprężenia niezbędne dla zrealizowania przyjętego schematu z pracą sił zewnętrznych, otrzymujemy wielkość obciążenia granicznego. Wielkość ta nie jest mniejsza od ścisłej wartości obciążenia granicznego. Rozkład naprężeń związany z założonym sposobem odkształcenia może nie spełniać warunków równowagi i warunków brzegowych dla naprężeń.

Przez odpowiedni dobór statycznie dopuszczalnego pola naprężeń i następnie kinematycznie dopuszczalnego schematu odkształcenia można uzyskać wystarczająco wąsko określony zakres, w jakim musi znajdować się nieznaną ścisła wartość obciążenia granicznego. Uzyskanie rozwiązania ścisłego wymagałoby jednoczesnego spełnienia wszystkich warunków statycznych i kinematycznych, czego przeważnie nie udaje się osiągnąć.

2. Ogólne zasady projektowania

Powyższe twierdzenia graniczne mogą być bezpośrednio zastosowane przy obliczaniu optymalnych wymiarów projektowanych elementów maszynowych. Zagadnienie polega na takim doborze poszczególnych wymiarów, aby przy obciążeniu granicznym w całym materiale elementu został jednocześnie osiągnięty stan plastyczny. Taki idealny dobór wymiarów, zapewniający najlepsze wykorzystanie materiału, jest bardzo trudny do osiągnięcia. Tym niemniej w wielu przypadkach możliwe jest znaczne zbliżenie się do tego ideału.

W przeciwieństwie do wyznaczania obciążenia granicznego dla konstrukcji o określonych wymiarach, mamy teraz daną wielkość obciążenia granicznego równą obciążeniu robocznemu pomnożonemu przez żądany współczynnik bezpieczeństwa oraz ogólny schemat przenoszenia sił, a wyznaczyć musimy wymiary.

Z podanych we wstępie twierdzeń granicznych wynikają następujące wnioski pomocnicze:

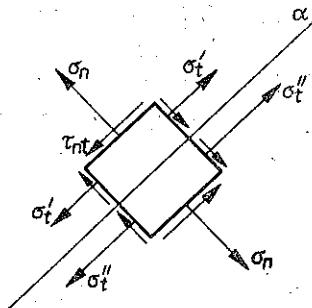
Wniosek 1. Dobierzmy tak wymiary projektowanego elementu, że wbudowane wewnątrz niego pole naprężeń spełnia warunki równowagi, warunki brzegowe dla naprężeń oraz daje siły zewnętrzne, równe żadanemu obciążeniu granicznemu. Jeżeli ponadto w żadnym punkcie stan naprężenia nie przekracza warunku plastyczności, to rzeczywiste obciążenie graniczne będzie co najmniej równe obciążeniu żadanemu.

Wniosek 2. Przyjmijmy wymiary w taki sposób, aby przyjęty szczególny schemat odkształcenia, spełniający warunki ciągłości i przemieszczeniowe warunki brzegowe, dawał na małym odkształceniu pracę związanego z nim stanu naprężenia równą pracy żadanego obciążenia granicznego. Rzeczywiste obciążenie graniczne tak zaprojektowanego elementu będzie co najwyżej równe obciążeniu żadanemu.

Z powyższych wniosków wynika, że wymiary należy projektować według statycznie dopuszczalnego pola naprężeń, gdyż w takim przypadku konstrukcja z pewnością ma wytrzymałość nie mniejszą od żądanej. Gdybyśmy wymiary wyznaczyli z kinematycznie dopuszczalnego schematu odkształcenia, to element miałby rzeczywistą wytrzymałość mniejszą od żądanej. Jednakże wyznaczenie wymiarów również na podstawie kinematycznego schematu jest wskazane, gdyż pozwala ocenić ewentualną maksymalną nadwyżkę wymiarową konstrukcji zaprojektowanej według statycznie dopuszczalnego pola naprężeń.

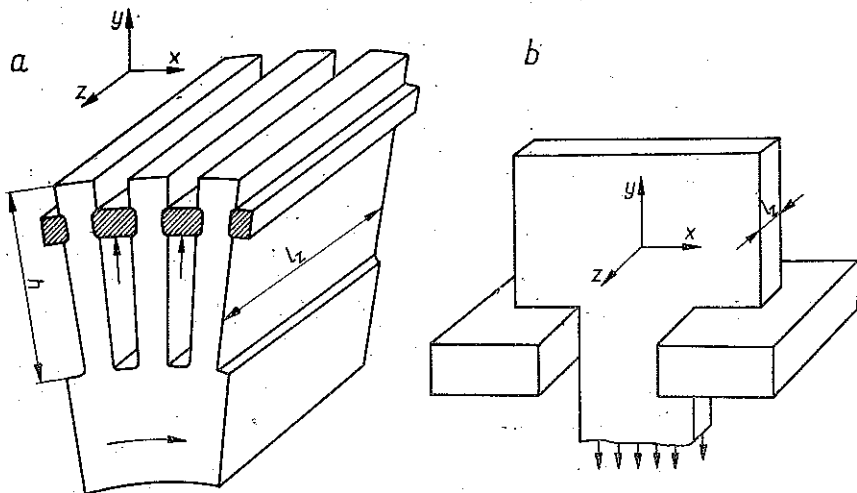
Poniżej podano kilka przykładów zastosowania powyższych zasad projektowania. Wszystkie rysunki wykonano w skali, tak że podają one proporcje wymiarowe wynikające z przeprowadzonych obliczeń. Stany naprężenia w poszczególnych

częściach statycznie dopuszczalnego pola naprężeń przedstawiono za pomocą odwzorowania Mohra, bardzo pomocnego przy tego rodzaju rozważaniach. Poszczególne części pola naprężeń przedzielone są prostoliniowymi liniami nieciągłości naprężeń. Po obu stronach linii nieciągłości L (rys. 1) ciągła musi być zarówno normalna do niej składowa naprężenia σ_n jak i składowa styczna τ_{nt} . Nieciągłość może występować tylko w składowej naprężenia σ_t działającej na przekroju prostopadłym do linii nieciągłości. Na wykresach Mohra dla każdej linii nieciągłości naprężeń zaznaczono punkt, którego odcięta i rzędna odwzorowują obydwie składowe naprężenia zachowujące ciągłość, a więc odpowiednio σ_n i τ_{nt} .



Rys. 1

Wszystkie wykresy Mohra zostały narysowane dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Stan taki występuje np. w zębach wirników generatorów elektrycznych dużej mocy, w których długość l_z w kierunku osi z (rys. 2a) wynosi kilka metrów, a największy



Rys. 2

wymiar h w płaszczyźnie xy nie przekracza 200 mm. W stanie plastycznym naprężenie główne $\sigma_z = \sigma_3$ równa się $\sigma_z = 1/2(\sigma_x + \sigma_y)$ na całej długości zęba z wyłączeniem najbliższego sąsiedztwa końcowych przekrojów. Jeżeli przez σ_1 i σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$) oznaczymy naprężenia główne w płaszczyźnie xy , to zarówno warunek plastyczności Hubera-Misesa jak i Treski wyrażą się tym samym wzorem $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$. Stała k , równa granicy plastyczności przy czystym ścinaniu, dla warunku Hubera-Misesa wynosi $k = \sigma_{pl}/\sqrt{3}$, a dla warunku Treski $k = \sigma_{pl}/2$, gdzie σ_{pl} jest granicą plastyczności materiału przy jednoosiowym rozciąganiu.

Jak widać z załączonych przy każdym z przykładów wykresów Mohra, bezwzględna wartość żadnego z naprężeń głównych nie przekracza wartości $2k$. Wynika

stąd, że podane dla poszczególnych przypadków statycznie dopuszczalne pola naprężeń nie naruszają warunku plastyczności Treski również dla płaskiego stanu naprężenia. Stan taki występuje w elementach, których wymiar w kierunku osi z (rys. 2b) l_z jest mały w porównaniu z wymiarami w płaszczyźnie xy . Podane rozwiązania i znalezione zależności wymiarowe stosuje się więc również dla elementów cienkich, jeżeli przyjąć warunek plastyczności Treski. Dla warunku Hubera-Misesa optymalne statycznie dopuszczalne pola naprężeń będą dla takich elementów nieco inne.

3. Przykłady zastosowań

1. Wyznamy optymalne wymiary łba zęba z rys. 2a lub 2b. W przypadku zębów generatora (rys. 2a) obciążenie wynika z sił bezwładności działających na rygiel i zamknięte nim w rowku międzyzębnym uzwojenie. Jeżeli wynikającą stąd siłę przypadającą na jeden ząb oznaczymy przez P , to przy współczynniku bezpieczeństwa n obciążenie graniczne zęba powinno wynosić $P^* = nP$.

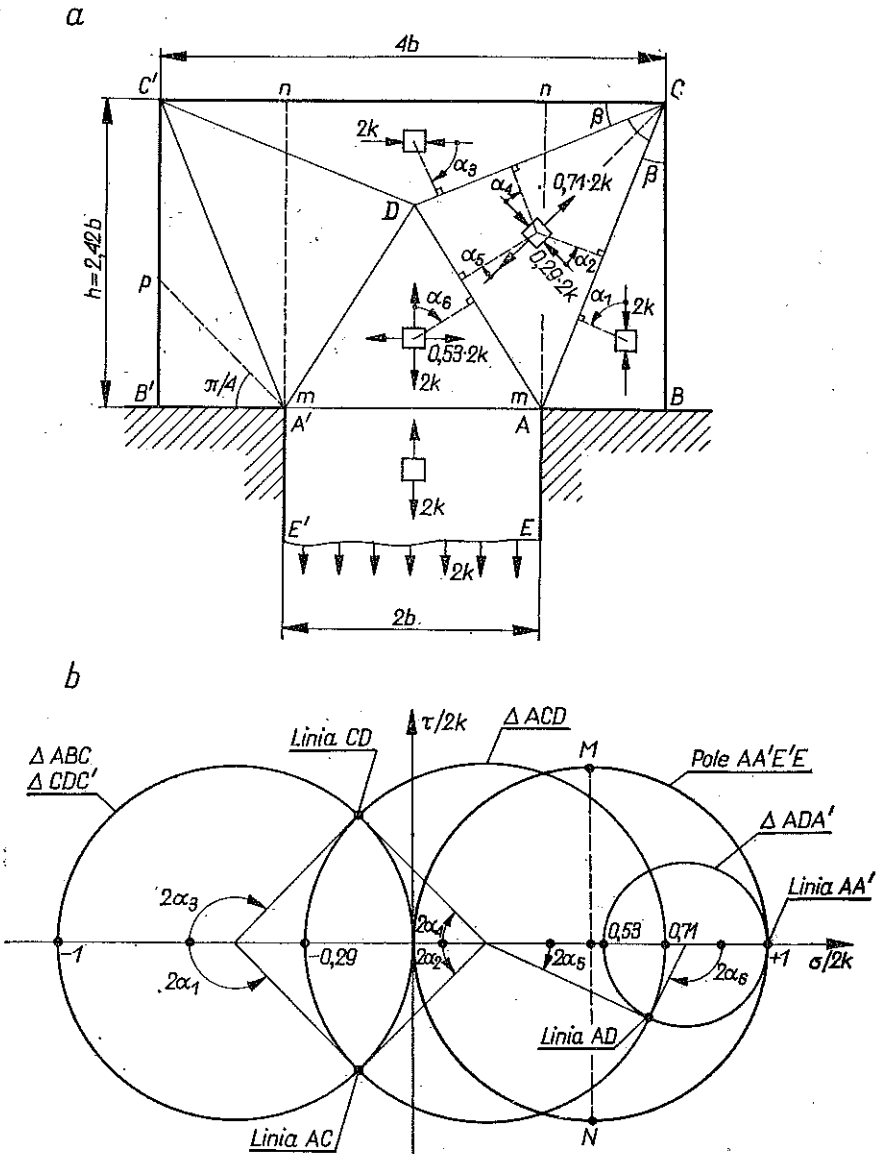
Szerokość trzona (rys. 3a) jest określona zależnością $2b = P^*/2k$. Naprężenie ściskające wzdłuż linii styku AB i $A'B'$ nie może być większe od $2k$, gdyż przy tej wielkości naprężenia następuje lokalne płynięcie plastyczne wzdłuż linii poślizgu mp pokazanej linią przerywaną. Stąd szerokość łba wynosi $4b$.

W praktyce inżynierskiej wysokość łba h oblicza się przyjmując elementarny mechanizm zniszczenia przez ścinanie wzdłuż dwóch linii mn . Aby takie zniszczenie mogło nastąpić, naprężenie styczne na liniach przesuwu musi mieć wartość granicy plastyczności na ścinanie k . Wynika stąd, że $h = 2b$. Przyjęty mechanizm zniszczenia jest kinematycznie dopuszczalny, ale nie spełnione są przy tym warunki równowagi. Zgodnie z twierdzeniami granicznymi podanymi poprzednio nośność graniczna łba o wysokości $h = 2b$, będzie więc co najwyżej równa żądanej sile P^* . Bezpieczną wysokość, przy której nośność graniczna łba z pewnością nie będzie mniejsza od P^* , otrzymamy dobierając statycznie dopuszczalne pole naprężeń. Pole takie pokazane na rys. 3a składa się z sześciu trójkątów oddzielonych liniami nieciągłości naprężeń. W każdym z trójkątów panuje jednorodny stan naprężenia. Dla otrzymania możliwie najmniejszego h należy dążyć do tego, aby we wszystkich trójkątach stan naprężenia był na granicy warunku plastyczności. Niestety, dla przyjętego schematu nie udaje się tego uzyskać. Najmniejszą wysokość h otrzymuje się zakładając, że stan plastyczny osiągnięty został w trójkątach ABC , ACD i CDC' oraz symetrycznie rozmieszczonych trójkątach $A'B'C'$ i $A'C'D$. Z warunków brzegowych wynika, że w trójkątach ABC i CDC' musi wobec tego panować w płaszczyźnie rysunku stan jednoosiowego ściskania naprężeniami równymi $-2k$. Do najmniejszego h prowadzi przyjęcie, że w obu tych trójkątach kąty przy wierzchołku C są sobie równe. Wielkość tych kątów β wyznaczmy z warunku, aby również w trójkącie ACD osiągnięty był warunek plastyczności. Aby promień koła Mohra, przedstawiającego stan naprężenia w trójkącie ACD , był równy k , musi być spełniony następujący warunek (rys. 3b) na linii nieciągłości CD :

$$k \sin 2\alpha_4 = k \sin 2\alpha_3.$$

Zwracamy uwagę, że przyjęto regułę takiego samego zwrotu kątów na płaszczyźnie Mohra i na płaszczyźnie fizycznej. Podstawiając do powyższej zależności $\alpha_3 = \pi/2 - \beta$ i $\alpha_4 = \pi/4 - \beta$ otrzymujemy $\beta = \pi/8$. Wobec tego mamy

$$h = b \operatorname{ctg} \beta = 2,42 b,$$



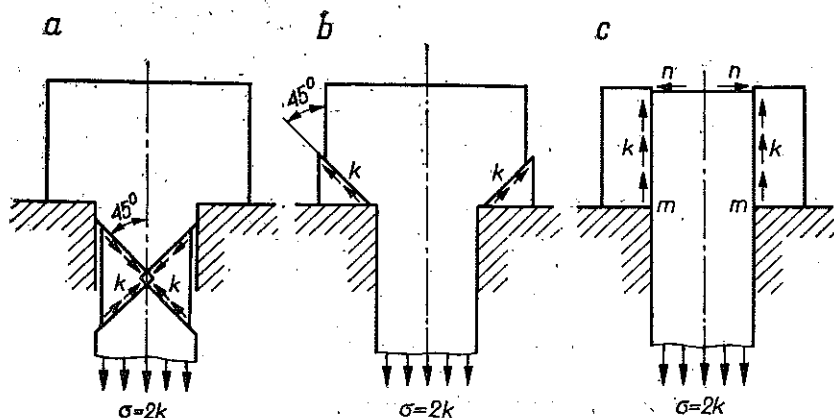
Rys. 3

a więc o 21% więcej aniżeli z poprzednio omówionego schematu kinematycznie dopuszczalnego. Optymalna wielkość h , odpowiadająca rozwiązaniu ścisłemu dla nośności granicznej, leży pomiędzy wartościami $h = 2b$ i $h = 2,42b$. Wobec nie-

możności wyznaczenia ścisłego rozwiązania należy jako bezpieczną przyjąć wielkość $h = 2,42b$.

W trójkącie ADA' stan naprężenia jest dla płaskiego stanu odkształcenia dużo niższy od warunku plastyczności. Jednakże dla płaskiego stanu naprężenia również i w tym trójkącie osiągnięty jest warunek plastyczności Treski, gdyż $\tau_{\max} = k$ wobec tego, iż $\sigma_z = 0$.

Na rysunku 4 pokazano różne kinematycznie dopuszczalne schematy odkształcenia plastycznego konstrukcji. Schemat *a* zniszczenia trzonu jest, jak łatwo zauważyć, również dopuszczalny statycznie. Przy stanie jednoosiowego rozciągania w płaszczyźnie xy na nachylonych pod kątem 45° względem osi płaszczyznach



Rys. 4

pośliszgu panują naprężenia odwzorowane przez punkty M i N na rys. 3b. Na płaszczyznach tych naprężenie styczne jest równe granicy plastyczności na ścinanie k . Wyznaczona więc poprzednio szerokość trzonu $2b$ jest wielkością ścisłą. Podobnie statycznie dopuszczalny jest również schemat kinematyczny z rys. 4b, gdyż jest on zgodny ze stanem jednoosiowego ściskania w polach ABC i $A'B'C'$ z rys. 3a. Określa to w sposób ścisły wielkość odcinka $\overline{AB} = b$. Jak już wyżej powiedziano, kinematyczny schemat odkształcenia pokazany na rys. 4c jest statycznie niedopuszczalny, gdyż konieczne dla jego zrealizowania naprężenia styczne $\tau = k$, dochodzące również do skrajnych punktów n , wymagałyby dla zachowania warunków równowagi istnienia naprężeń stycznych na górnej swobodnej powierzchni.

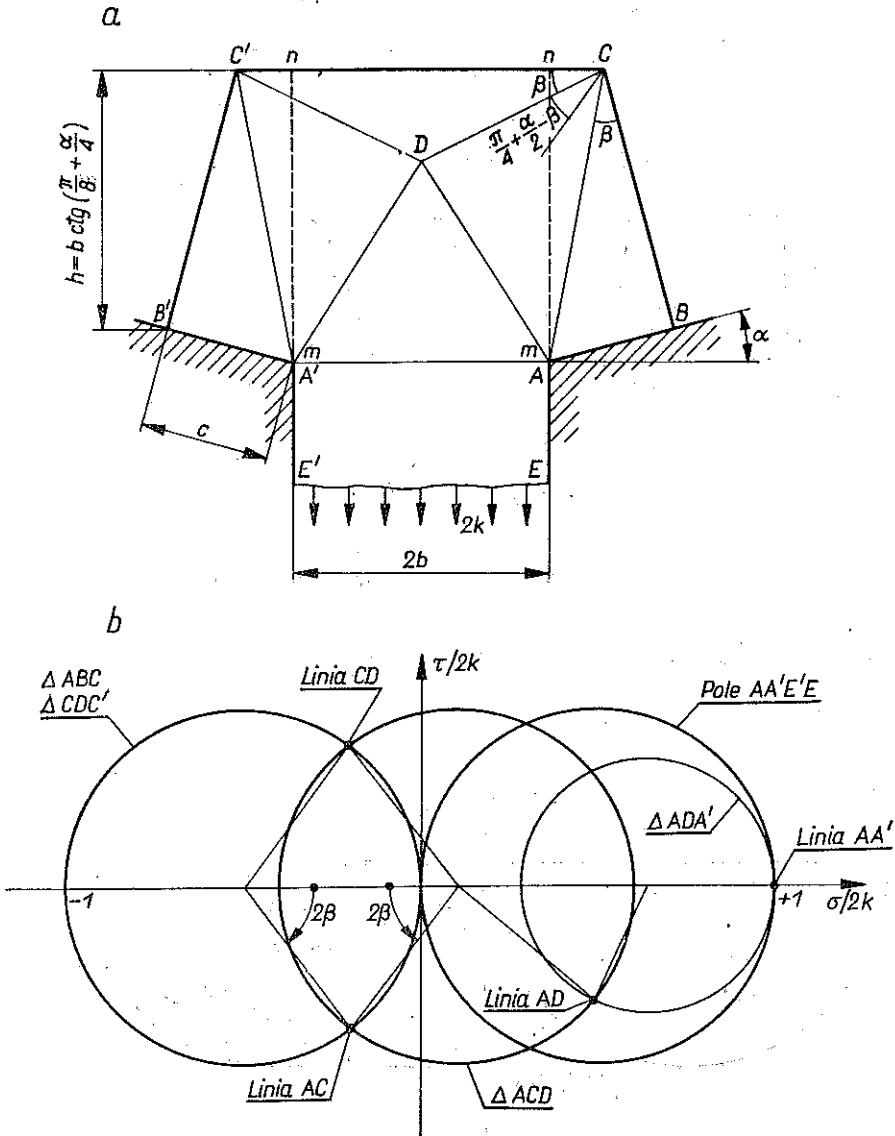
2. W analogiczny sposób można obliczyć wymiary w przypadku oparcia Iba na płaszczyznach nachylonych pod dowolnym kątem α (rys. 5a). Wymiar c powierzchni oporowych można ustalić z warunku, aby naprężenie normalne na linii styku było przy obciążeniu granicznym równe $2k$. Z równowagi całości otrzymujemy, że $c = b/\cos \alpha$. Również i teraz wymiary b i c są obliczone ściśle, gdyż są obliczone ze schematów dopuszczalnych zarówno statycznie, jak i kinematycznie.

Wysokość h wyznaczmy ze statycznie dopuszczalnego pola naprężeń. Z warunku, aby promienie kół Mohra były równe k jednocześnie dla trójkątów ABC , ACD i CDC' , wynika równanie

$$k \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \beta \right) = k \sin 2\beta,$$

skąd

$$\beta = \frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}.$$

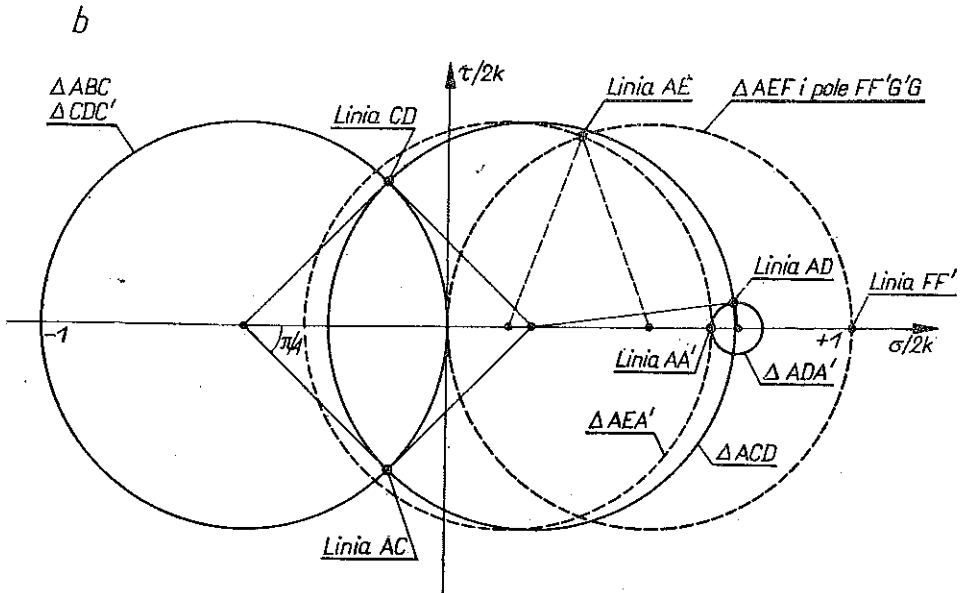
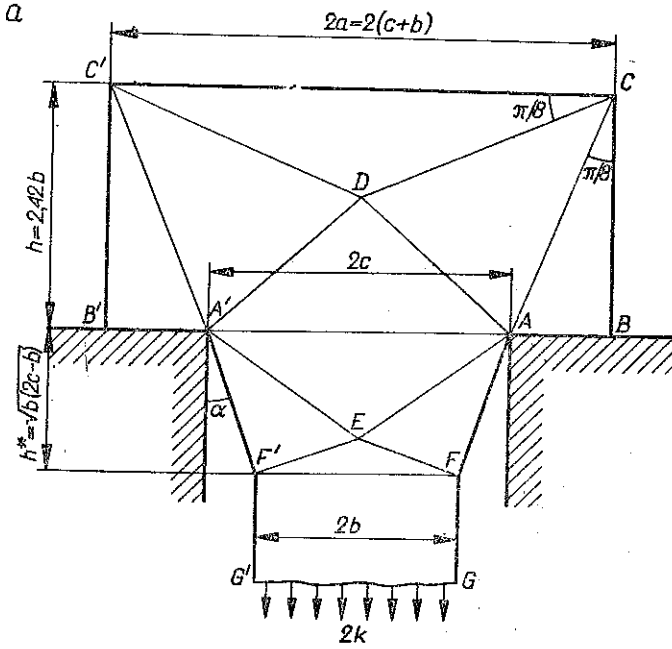


Rys. 5

Wysokość łba równa się $h = c \operatorname{ctg} \beta \cos \alpha$, skąd po podstawieniu $c = b/\cos \alpha$ otrzymujemy ostatecznie

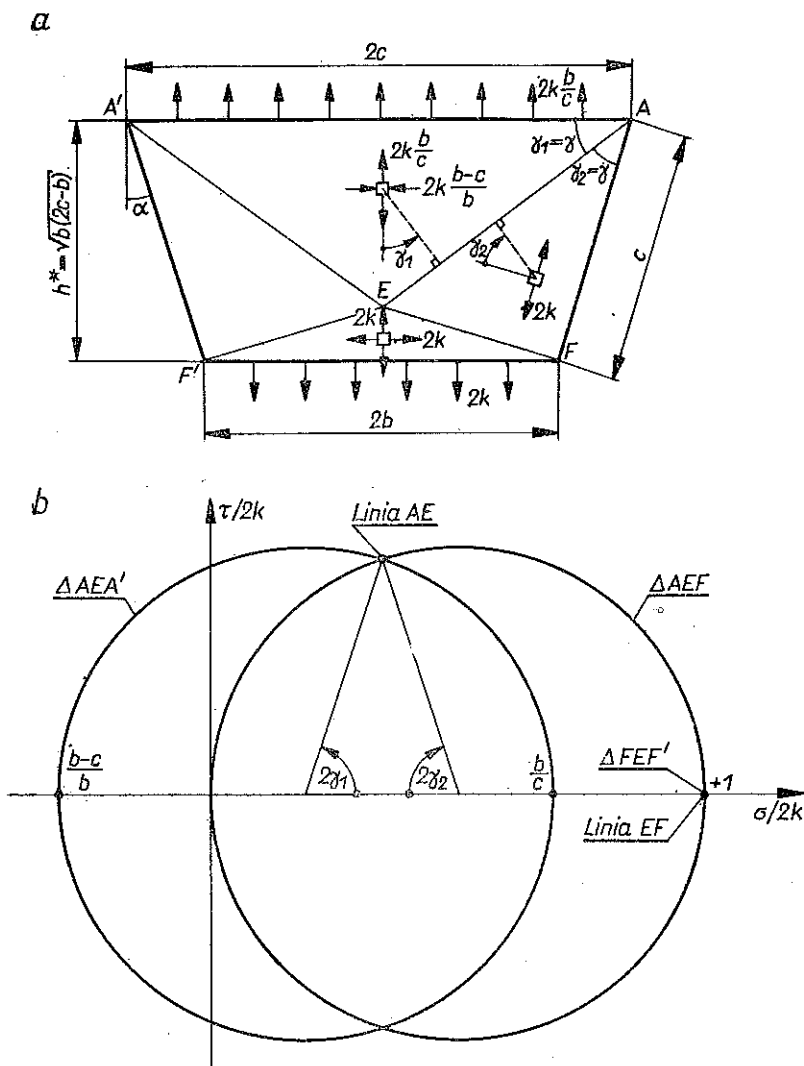
$$h = b \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{4} \right).$$

Dla $\alpha = 15^\circ$ jak na rys. 5a mamy $h = 2,02b$.



Rys. 6

Ocenę ewentualnego maksymalnego przekroczenia wysokości otrzymamy rozpatrując kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia w postaci ścięcia wzdłuż pionowych linii mn (rys. 5a). Z warunku $k(h+c \sin \alpha) = 2kb$ wynika $h' = b(2 - \operatorname{tg} \alpha)$, co dla kąta $\alpha = 15^\circ$ daje wysokość $h' = 1,73b$ mniejszą o około 14% od bezpiecznej oceny wymiaru $h = 2,02b$.



Rys. 7

3. Rysunek 6a przedstawia rozwiązanie, w którym odległość $2c$ między krawędziami oporowymi musi być większa od szerokości trzona $2b$. Wszystkie rozważania dotyczące wymiarowania h ba pozostają bez zmiany. Statycznie dopuszczalny stan naprężenia przedstawiają na płaszczyźnie Mohra koła narysowane linią ciągłą. Należy wyznaczyć możliwie najmniejszą wysokość h^* obszaru przejściowego między

łbem a trzonem. Zagadnienie to rozpatrzmy bardziej szczegółowo, ponieważ podobne obszary przejściowe wystąpią i w dalej podanych przykładach.

Najmniejszą wysokość h^* (rys. 7a) otrzymamy tak dobierając statycznie dopuszczalne pole naprężeń, aby w trójkątach AEF i AEA' osiągnięty został warunek plastyczności. Naprężenie na linii FF' musi być równe $2k$, co wynika z zachowania ciągłości normalnej składowej naprężenia na granicy pomiędzy trzonem a obszarem przejściowym. Z warunku równowagi wynika, że naprężenie normalne na linii AA' równa się $2kb/c$. W trójkącie AEF panuje stan jednoosiowego rozciągania, gdyż brzeg AF jest wolny od naprężeń. Koła Mohra, przedstawiające stan naprężenia w tych trójkątach, będą miały promienie równe k , jeżeli będą spełnione warunki na linii nieciągłości AE (rys. 7b):

$$k \sin 2\gamma_1 = k \sin 2\gamma_2,$$

$$2k \frac{b}{c} - k(1 - \cos 2\gamma_1) = k(1 - \cos 2\gamma_2).$$

Wynika stąd, że $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Po uwzględnieniu, że $2\gamma = \pi/2 - \alpha$, otrzymujemy wielkość kąta

$$\alpha = \arcsin \frac{c-b}{c}.$$

Długość swobodnej krawędzi AF jest więc równa połowie górnego boku, a więc $\bar{AF} = c$. Wysokość h^* jest określona za pomocą

$$h^* = \sqrt{b(2c-b)}.$$

W trójkącie FEF' panuje stan równomiernego rozciągania naprężeniami $2k$ we wszystkich kierunkach, odwzorowany na wykresie Mohra przez punkt.

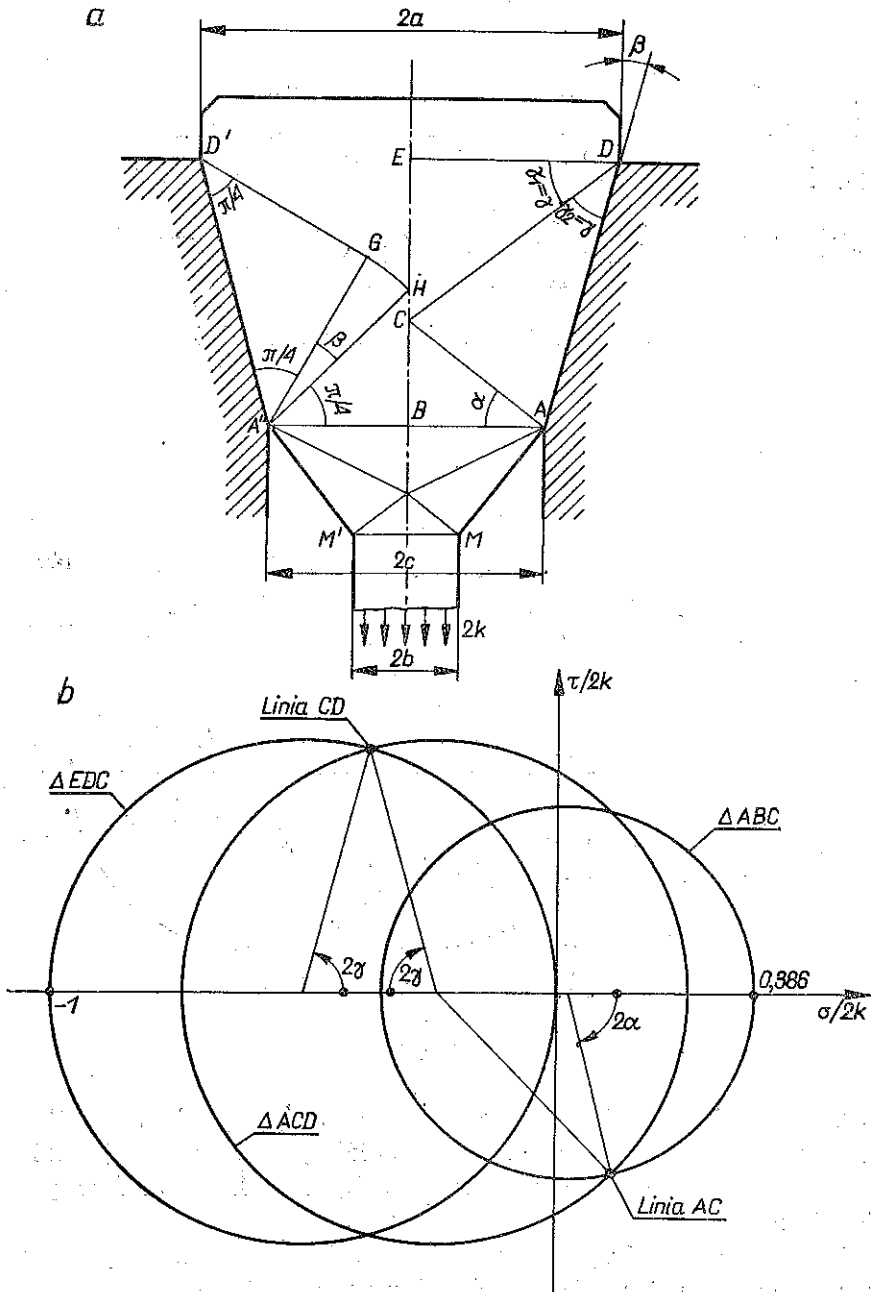
Z powyższych zależności zostały wyznaczone wymiary obszaru przejściowego na rys. 6a. Na rys. 6b liniami przerywanymi podano koło Mohra, odpowiadające stanom naprężenia w poszczególnych polach tego obszaru.

4. Jako następny przykład rozpatrzmy osadzenie końcówki rozciąganego elementu w klinowym gnieździe (rys. 8a) o znanym kącie wierzchołkowym $\beta = 15^\circ$. Przy obliczaniu nośności granicznej klinowego zakończenia założymy, że na powierzchniach styku z gniazdem nie ma sił tarcia. Jako wyjściowy wymiar przyjmiemy szerokość $2c$ na spodzie gniazda. Po wyznaczeniu obciążenia granicznego P' dla części klinowej obliczymy w opisany poprzednio sposób szerokość ciągną $2b$ i wymiary obszaru przejściowego $AMM'A'$. Zmieniając następnie wszystkie wymiary w stosunku P^*/P' , gdzie P^* jest żądanym obciążeniem granicznym, otrzymamy konstrukcję o jednakowym w przybliżeniu współczynniku bezpieczeństwa wszystkich jej części.

Po lewej stronie rys. 8a pokazano w części klinowej siatkę linii poślizgu, otrzymaną w ogólnie znany sposób (por. np. [3, 4, 5]). Przyjęto głębokość gniazda w taki sposób, aby punkt D' siatki linii poślizgu wypadł na krawędzi gniazda. Głębokość tę można oczywiście przyjąć dowolnie, ale wtedy siatka jest nieco bardziej złożona, a obliczenie trzeba wykonywać numerycznie. Ażeby klin mógł się odkształcać

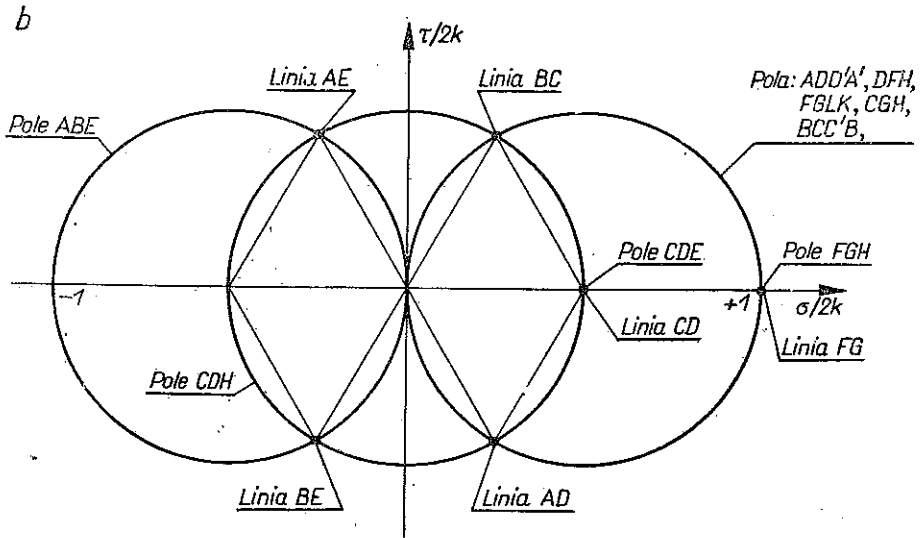
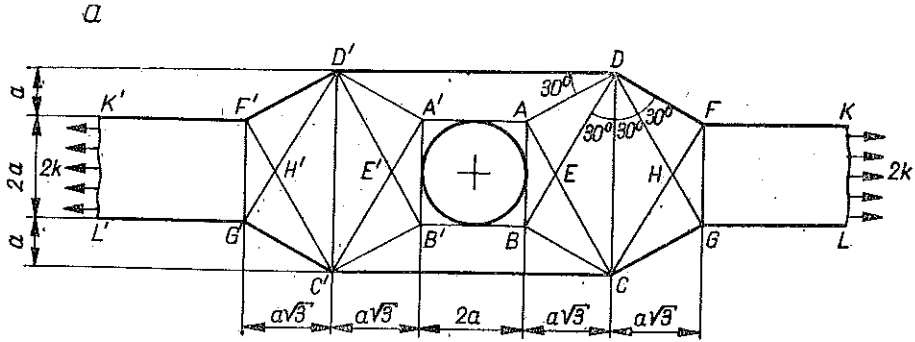
plastycznie, zgodnie ze schematem określonym siatką linii poślizgu, w jego przekroju wyjściowym ABA' musi w naszym przypadku działać rozciągające naprężenie normalne

$$\sigma'_n = 2k \frac{a-c}{a} (1 + \beta) = 0,432 \cdot 2k.$$



Rys. 8

Dla przyjętego schematu odkształcenia w postaci siatki linii poślizgu nie znane jest przedłużenie związane z nim pola naprężeń w obszar sztywny powyżej linii poślizgu HGD' . Takie przedłużenie powinno spełniać warunki brzegowe, warunki równowagi i nie przekraczać w żadnym punkcie warunku plastyczności. Nie znając takiego przedłużenia nie wiemy, czy znajdujący się ponad tą linią materiał będzie mógł przenieść obciążenie wynikające z oddziaływania części dolnej wzdłuż linii



Rys. 9

HGD' . Otrzymana wartość naprężenia ciągnącego σ'_n w przekroju ABA' stanowi więc jedynie górną ocenę nośności granicznej klina, gdyż związana jest z kinematycznie dopuszczalnym schematem odkształcenia, co do którego nie ma pewności, że jest jednocześnie statycznie dopuszczalny.

Dolną ocenę nośności wyznaczmy ze statycznie dopuszczalnego pola naprężeń, pokazanego po prawej stronie rys. 8a. Największą wartość tej nośności otrzymamy,

gdy $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. W takim przypadku stan naprężenia w trójkątach CDE i ACD będzie na granicy warunku plastyczności, a więc odpowiednie koła Mohra będą miały promienie równe k (rys. 8b). W polu powyżej linii ED nie ma żadnych naprężeń i usunięcie tej części materiału nie wpłynie na poniższą ocenę nośności. Koło Mohra, reprezentujące stan naprężenia w trójkącie ABC , ma promień mniejszy od k . Naprężenia normalne w przekroju ABA' mają dla tego pola naprężeń wartość $\sigma_n'' = 0,386 \cdot 2k$. Nośność graniczna klina nie będzie więc mniejsza niż $P^* = 0,386 \cdot 2k \cdot 2c$. Wartość ta różni się od górnej oceny nośności $P_g = 0,432 \cdot 2k \cdot 2c$ w przybliżeniu o 12%.

Pozostałe wymiary konstrukcji obliczymy na nośność równą sile $P^* = 0,386 \cdot 2k \cdot 2c$. Szerokość trzona będzie więc równa $b = 0,386c$. Obszar przejściowy obciążony jest na krawędzi ABA' naprężeniami normalnymi równymi $0,386 \cdot 2k$, a na krawędzi MM' naprężeniami $2k$. Jego wymiary wyznaczymy w sposób opisany poprzednio.

5. Na rysunku 9a pokazano przykład obliczenia wymiarów rozciąganego elementu osłabionego otworem. W obu trapezowych polach $AA'D'D$ i $BB'C'C$ mamy jednoosiowe rozciąganie. W trójkątach ADE , BCE i ABE stan naprężenia osiąga warunek plastyczności. W trójkącie CDE obydwa naprężenia główne są sobie równe i koło Mohra przechodzi w punkt. Materiał pomiędzy krawędzią otworu i obwodem kwadratu $ABB'A'$ jest wolny od naprężeń. Obszar przejściowy i szerokość cęgna poza obszarem lokalnego pogrubienia wyznaczono w znany już sposób.

4. Uwagi końcowe

Celem pracy było wykazanie, że metoda nośności granicznej może znaleźć zastosowanie przy projektowaniu elementów maszyn, których kształt nie pozwala na zastosowanie innych metod. Podane przykłady posłużyły jedynie jako ilustracja sposobu postępowania i nie wyczerpują wszystkich możliwości zastosowań praktycznych. Bez trudności można uwzględnić wpływ sił tarcia na powierzchniach stykowych na wielkość nośności granicznej i wymiary konstrukcji.

Szczególnie ważną zaletą metody nośności granicznej jest jej duża prostota, pozwalająca szybko uzyskiwać rozwiązania nawet złożonych problemów. Dla jej stosowania potrzebna jest jedynie elementarna znajomość podstaw teorii plastyczności.

Literatura cytowana w tekście

1. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, J. Wiley Inc., 1951, 215.
2. W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN, 1957, 261.
3. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford 1956, 163.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Teoria obróbki plastycznej metali*, PWN, 1964, 94.