

ZGINANIE ŁUKÓW SEGMENTOWYCH

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

W pracy [1] przedstawiono próbę rozwiązania zagadnienia zginania łuków falistych. Tam też podano przegląd publikacji autorów pracujących nad zagadnieniem zginania łuków cienkościennych o przekroju pierścieniowym.

Przytoczone tutaj rozwiązanie dotyczy bardzo ważnego przypadku: zginania łuków segmentowych. Łuki takie otrzymuje się przez spawanie odpowiednio dopasowanych elementów, wykonanych z powłoki obrotowo-walcowej. Otrzymaną w ten sposób powłokę, można traktować jako powłokę toroidalną o odpowiedniej ortotropii konstrukcyjnej.

Jeżeli na powłokę działa moment zginający, leżący w płaszczyźnie osi łuku, to wywołany stan naprężeń i odkształceń można potraktować jako stan osiowo-symetryczny. Jest rzeczą oczywistą, że taki sposób ujęcia zagadnienia jest przybliżony. Stan naprężenia, szczególnie w pewnym obszarze zawierającym linię zetknięcia powłok walcowych, jest niejednorodny i ściśle może być opisany tylko za pomocą funkcji dwóch zmiennych. W przypadku przez nas rozpatrywanym, gdy łuk posiada dwa lub więcej segmentów, to pole naprężeń, a jeszcze bardziej odkształceń, w takich łukach zbliżone jest do odpowiedniego pola łuków toroidalnych o odpowiednio określonych krzywiznach.

Otrzymane tutaj rozwiązanie teoretyczne porównuje się z badaniami doświadczalnymi A. A. SKWORCOWA [2].

2. Założenia

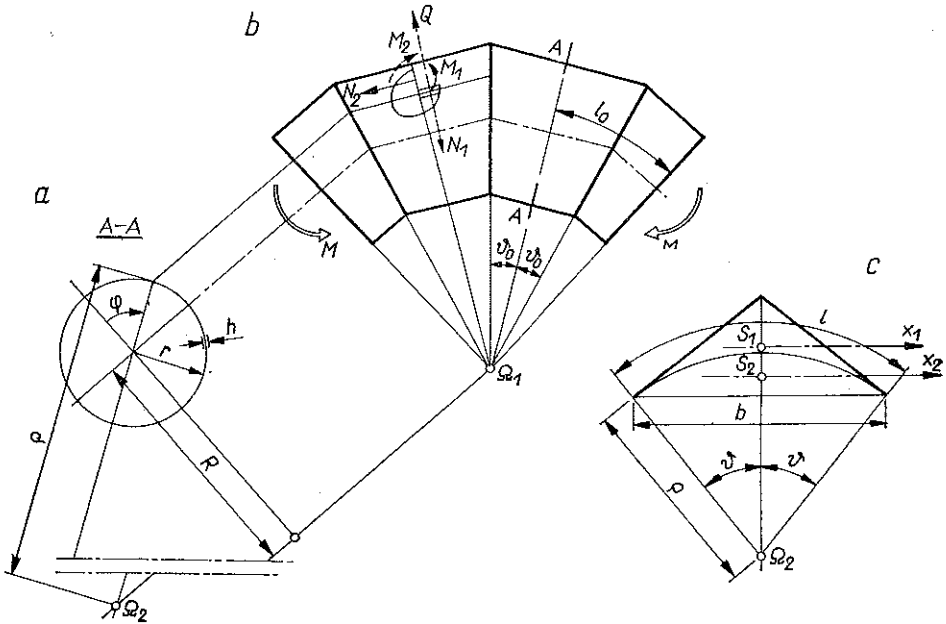
Podane w dalszych punktach rozwiązanie otrzymano dla następujących warunków:

- 1) ilość segmentów w łuku powinna być większa lub równa dwóm,
- 2) łuk poddany jest działaniu tylko momentu zginającego, który posiada charakter statyczny,
- 3) nie rozpatruje się tutaj naprężeń nieciągłości (efektów brzegowych linii zetknięcia segmentów),
- 4) rozwiązanie oparte jest na podstawie teorii powłok, w której zakłada się, że względna grubość $h/r \leq 1/20$,
- 5) stosuje się pojęcie ortotropii konstrukcyjnej scharakteryzowanej funkcjami k_{2r} i k_{1z} [por. równania (3.1), (3.11)],
- 6) przyjmuje się, że funkcje ortotropii k_{2z} i k_{1r} oraz wielkości Q , N_1 i M_2 są równe zeru i przyjmuje się $1 + \lambda \cos \varphi \approx 1$; w rzeczywistości tak nie jest, lecz naprężenia, uwarunkowane działaniem tych sił, są bardzo małe, o ile spełnione są powyższe założenia.

3. Funkcje ortotropii

Funkcję ortotropii k_{2r} można w przybliżeniu przedstawić jako iloraz długości segmentu i tworzącej powłoki toroidalnej (rys. 1c):

$$(3.1) \quad k_{2r} \approx \varrho \operatorname{tg} \vartheta / \varrho \vartheta \approx 1.$$



Rys. 1

Ostatnia przybliżona równość jest spełniona, gdyż zgodnie z p. 1 założeń kąt $\vartheta \leq \pi/12$. Dla tych też wartości błąd wynosi mniej niż 2%. Decydujący wpływ będzie mieć jednak funkcja

$$(3.2) \quad k_{1z} \approx \frac{I_{x_1}}{I_{x_2}}.$$

Momenty bezwładności I_{x_1} i I_{x_2} odpowiednich przekrojów segmentu powłoki toroidalnej względem osi, przechodzących przez środki ciężkości tych przekrojów, tj. osi x_1, x_2 (rys. 1c), obliczymy znanymi metodami:

$$(3.3) \quad I_{x_1} = \frac{1}{12} b h^3 \left[1 + \left(\frac{l}{2h} \right)^2 f_1(\vartheta) \right] \cos \vartheta,$$

gdzie

$$(3.4) \quad f_1(\vartheta) = \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

oraz

$$(3.5) \quad I_{x_2} = \frac{1}{12} bh^3 \left[f_3(\vartheta) + \left(\frac{2}{2h} \right)^2 f_2(\vartheta) \right] \cos \vartheta,$$

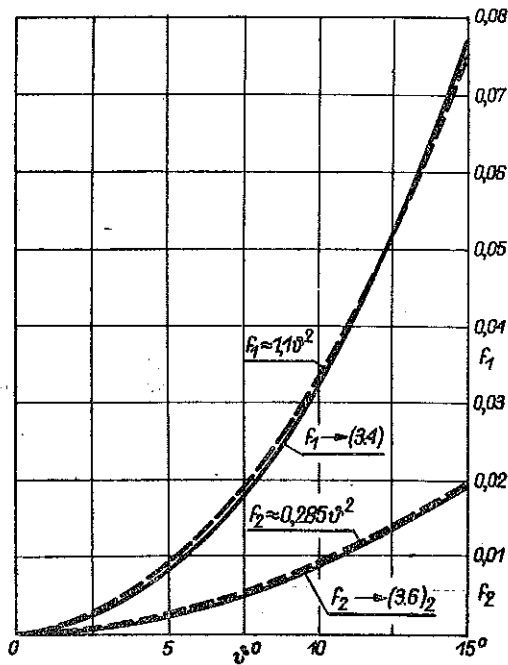
gdzie

$$(3.6) \quad f_3(\vartheta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\vartheta}{\sin 2\vartheta} \right) \approx 1,$$

$$f_2(\vartheta) = 12 \left[\frac{1}{2 \sin^2 \vartheta} \left(1 + \frac{2\vartheta}{\sin 2\vartheta} \right) - \frac{2}{\vartheta \sin 2\vartheta} \right].$$

Na rysunku 2 podano wykresy funkcji f_1 i f_2 . Otrzymane krzywe aproksymujemy następującymi przybliżonymi funkcjami

$$(3.7) \quad f_1 \approx 1,1 \vartheta^2, \quad f_2 \approx 0,285 \vartheta^2, \quad \vartheta \leq \pi/12.$$



Rys. 2

Jeżeli teraz (3.6)–(3.7) podstawimy do równania (3.2), to otrzymamy przybliżoną postać funkcji ortotropii:

$$(3.8) \quad k_{12} \approx \frac{1 + 1,1 \left(\frac{l\vartheta}{2h} \right)^2}{1 + 0,285 \left(\frac{l\vartheta}{2h} \right)^2}.$$

Pozostaje teraz ustalić zależność kąta ϑ oraz długość l od kąta φ . Z rysunku 1 otrzymujemy

$$(3.9) \quad \vartheta \approx \vartheta_0 \cos \varphi, \quad l \approx l_0 \approx 2\vartheta_0 R.$$

Przybliżone równości (3.9) są wynikiem uwzględnienia p. 6 naszych założeń. Podstawiając (3.9) do (3.8) otrzymujemy

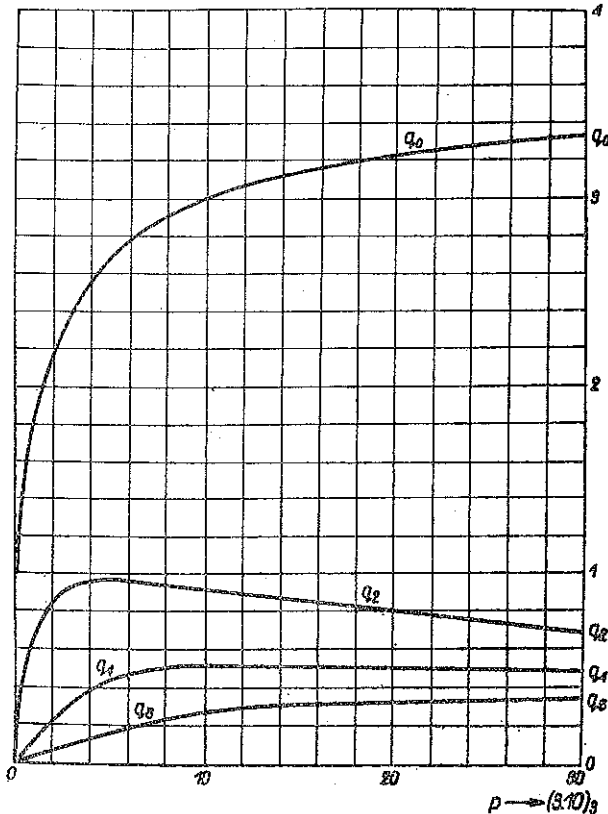
$$(3.10) \quad k_{1z} = 3,86 - 2,86 F(\varphi) = 3,86 - \frac{5,72}{2+p+p \cos 2\varphi},$$

gdzie

$$F(\varphi) = \frac{1}{1+p \cos^2 \varphi}, \quad p = 0,285 \left(\frac{R\vartheta_0^2}{h} \right)^2.$$

Występująca w (3.10)₂ funkcja $F(\varphi)$ jest funkcją parzystą o okresie π . Rozwijając ją w odpowiedni szereg Fouriera i zachowując cztery pierwsze wyrazy, a następnie podstawiając do (3.10)₁, otrzymamy

$$(3.11) \quad k_{1z} \approx q_0 + q_2 \cos 2\varphi - q_4 \cos 4\varphi + q_6 \cos 6\varphi,$$



Rys. 3

gdzie

$$\begin{aligned}
 q_0 &= 3,86 - \frac{2,86}{\sqrt{1+p}}, \\
 q_2 &= 5,72 \left[\frac{1}{\sqrt{1+p}} - \frac{2}{p} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) \right], \\
 q_4 &= 5,72 \left[\frac{1}{\sqrt{1+p}} - \frac{8}{p} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) - \frac{8}{p^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) \right], \\
 q_6 &= 5,72 \left[\frac{1}{\sqrt{1+p}} - \frac{18}{p} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) - \frac{48}{p^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) - \frac{32}{p^3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

W zastosowaniach funkcje (3.12) należy odczytywać z wykresu podanego na rys. 3. W tym celu należy uprzednio obliczyć wartość p ze wzoru (3.10)₃. Wprowadzony tutaj parametr p oraz używany później parametr μ będą wielkościami, od których zależeć będzie stan naprężenia i odkształcenia zginanego łuku.

4. Całkowanie układu równań

Przy omówionych uprzednio uproszczeniach odpowiedni układ równań stanu osiowo-symetrycznego przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 (k_{1z} \beta')' + \mu \psi \cos \varphi &= 0, \\
 \psi'' - \mu \beta \cos \varphi &= -\sigma \frac{\sqrt{12} r}{Eh} \cdot \frac{1}{K} \sin \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

gdzie

$$\sigma = \frac{Mr}{I}, \quad \mu = \sqrt{12} \frac{r^2}{Rh}, \quad I = \pi r^3 h.
 \tag{4.2}$$

Różniczkujemy względem zmiennej φ . Siły zaś wewnętrzne obliczamy za pomocą równań

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12r} k_{1z} \beta', \quad N_2 = \frac{Eh^2}{\sqrt{12}r} \psi'.
 \tag{4.3}$$

Funkcje ψ i β układu równań (4.1) powinny czynić zadość następującym warunkom:

$$\begin{aligned}
 \beta(\varphi) &= -\beta(-\varphi), \quad \beta(\varphi) = \beta(\varphi + \pi n); \\
 \psi(\varphi) &= -\psi(-\varphi), \quad \psi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \psi\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad \psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi n); \\
 \int_0^{2\pi} \psi' d\varphi &= 0, \quad \frac{Eh^2 r}{\sqrt{12}} \int_0^{2\pi} \psi' \cos \varphi d\varphi = M
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

zgodnym z interpretacją fizyczną przedstawionego tutaj zagadnienia. Powyższym warunkom czynią zadość następujące funkcje:

$$(4.5) \quad \beta = \sigma \frac{\sqrt{12}r}{Eh} \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin 2m \varphi, \quad \text{gdzie} \quad b_{2m} = \frac{B_{2m}}{2m},$$

$$\psi = \sigma \frac{\sqrt{12}r}{Eh} \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1} \sin (2m-1) \varphi, \quad a_1 = 1, \quad a_{2m-1} = \frac{A_{2m-1}}{2m-1}.$$

Przyjęcie postaci (4.5) zamiast formy tradycyjnej (np. $\beta = \sum_1^{\infty} b_{2m} \sin 2m \varphi$) wynika wprost ze wzorów (4.3) i (4.4). Funkcje (4.5) czynią zadość wszystkim warunkom (4.4), a podstawione do (4.3) dają

$$(4.6) \quad M_1 = \frac{\sigma h^2}{6} \sqrt{3} k_{1z} \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m} \cos 2m \varphi,$$

$$N_2 = \sigma h \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1} \cos (2m-1) \varphi.$$

Przechodząc teraz do naprężeń otrzymamy

$$(4.7) \quad \sigma_1 = \pm (\sigma_1)_{z,w} = \pm \frac{6M_1}{h^2} = \pm \sqrt{3} k_{1z} \sigma \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m} \cos 2m \varphi,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{h} = \sigma \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1} \cos (2m-1) \varphi.$$

W naszym przypadku naprężenia (4.7) będą naprężeniami głównymi. Liczbę wzrostu naprężeń południkowych, równoleżnikowych i naprężeń zredukowanych określimy za pomocą równań

$$(4.8) \quad n_1 \stackrel{\text{df}}{=} \max \left| \frac{\sigma_1}{\sigma} \right|, \quad n_2 \stackrel{\text{df}}{=} \max \left| \frac{\sigma_2}{\sigma} \right|, \quad n_{\text{red}} \stackrel{\text{df}}{=} \left| \frac{\sigma_{\text{red}}}{\sigma} \right|.$$

Podstawiając z kolei (4.5) do układu (4.1) otrzymujemy nieskończony układ równań o nieskończonej ilości niewiadomych, który przy wykorzystaniu konwencji sumacyjnej może być napisany następująco:

$$(4.9) \quad \delta_{uv} B_v = C_u, \quad u, v = 2, 4, \dots, 2m, \dots, 2j.$$

Występujące w równaniach (4.9) współczynniki δ_{uv} mają postać następującą:

$$(4.10) \quad \delta_{uv} = \delta_{vu} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } v > 2m+6; \\ \delta_{2m, 2m \pm 4}, & \text{jeśli } i = 2, 4, 6 \text{ oraz } v \leq 2m+6 \end{cases}$$

Tablica 1

		$\lambda < 0,2$		$\lambda = 0,2 \div 0,3$		$\lambda = 0,3 \div 0,5$
δ_{uv}	j	2	3	4	5	6
δ_{22}		$2q_0 + \frac{\mu^2}{72}$				
δ_{44}		$2q_0 + \frac{\mu^2}{288}$	$2q_0 + \frac{17}{3600} \mu^2$			
δ_{66}		—	$2q_0 + \frac{\mu^2}{1800}$	$2q_0 + \frac{37}{44100} \mu^2$		
δ_{88}		—	—	$2q_0 + \frac{\mu^2}{6272}$	$2q_0 + \frac{65}{254016} \mu^2$	
$\delta_{10,10}$		—	—	—	$2q_0 + \frac{\mu^2}{32400}$	$2q_0 + \frac{101}{980000} \mu^2$
$\delta_{12,12}$		—	—	—	—	$2q_0 + \frac{\mu^2}{34848}$
$\delta_{24} = \delta_{42}$		$q_2 + \frac{\mu^2}{144}$				
$\delta_{26} = \delta_{62}$		— q_4				
$\delta_{28} = \delta_{82}$		q_6				
$\delta_{2,10} = \delta_{10,2}$		0				
$\delta_{2,12} = \delta_{12,2}$		0				
$\delta_{46} = \delta_{64}$		$q_2 + \frac{\mu^2}{1200}$				
$\delta_{48} = \delta_{84}$		— q_4				
$\delta_{4,10} = \delta_{10,4}$		q_6				
$\delta_{4,12} = \delta_{12,4}$		0				
$\delta_{68} = \delta_{86}$		$q_2 + \frac{\mu^2}{4704}$				
$\delta_{6,10} = \delta_{10,6}$		— q_4				
$\delta_{6,12} = \delta_{12,6}$		q_6				
$\delta_{8,10} = \delta_{10,8}$		$q_2 + \frac{\mu^2}{12960}$				
$\delta_{8,12} = \delta_{12,8}$		— q_4				
$\delta_{0,12} = \delta_{12,10}$		$q_2 + \frac{\mu^2}{29040}$				

dla $m \leq j$, przy czym

$$\begin{aligned}
 \delta_{2m, 2m} &= 2q_0 + \frac{r_m + R_m}{4m^2}, \\
 \delta_{2m, 2m-2} &= q_2 + \frac{R_m}{2m(2m-2)}, \\
 \delta_{2m, 2m+2} &= q_2 + \frac{r_m}{2m(2m+2)}, \\
 \delta_{2m, 2m-4} &= \delta_{2m, 2m+4} = -q_4, \\
 \delta_{2m, 2m-6} &= \delta_{2m, 2m+6} = q_6, \\
 (4.11) \quad r_m &= \begin{cases} \frac{\mu^2}{2(2m+1)^2}, & \text{jeśli } m < j, \\ 0, & \text{jeśli } m = j, \end{cases} \\
 R_m &= \begin{cases} 0, & \text{jeśli } m = 1, \\ \frac{\mu^2}{2(2m-1)^2}, & \text{jeśli } 1 < m \leq j, \end{cases} \\
 C_u &= \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \text{jeśli } u = 2, \\ 0, & \text{jeśli } 2 < u \leq 2j. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Występująca w (4.9)–(4.11) liczba j określa liczbę niewiadomych B_{2j} układu równań (4.9). Powyżej rozpatrzono przypadek $j \geq 2$, aby nie komplikować wzorów. Przypadek $j = 1$ daje $\delta_{22} = 2q_0$, $C_2 = \mu/2$, a układ równań (4.9) przekształca się w jedno równanie $\delta_{22} B_2 = C_2$. Przypadek ten może mieć znaczenie tylko dla bardzo małych wartości μ .

Zestawienie współczynników δ_{uv} dla przypadków obejmujących układy równań od dwóch ($j = 2$) do sześciu niewiadomych ($j = 6$) podano w tablicy 1.

Dalsze niewiadome oblicza się z równań następujących:

$$(4.12) \quad A_{2m-1} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } m = 1, \\ -\frac{\mu}{2(2m-1)} \left(\frac{B_{2m-2}}{2m-2} + \frac{B_{2m}}{2m} \right), & \text{jeśli } 1 < m \leq j. \end{cases}$$

W tablicy 2 zestawiono wartości A_{2m-1} dla przypadków $j = 2 - 6$. Liczbę Kármána K obliczamy ze wzoru

$$(4.13) \quad \frac{1}{K} = 1 + \frac{\mu}{4} B_2.$$

Podstawiając (4.5) do (4.1) właściwie otrzymujemy dwa układy równań z dwiema grupami niewiadomych B_{2m} i A_{2m-1} ; obliczając z jednego układu wartości A_{2m-1} ,

Tablica 2

$A_{2m-1} \backslash j$	2	3	4	5	6
A_1	1				
A_3	$-\frac{\mu}{6} \left(\frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} \right)$				
A_5	$-\frac{\mu}{10} \left(\frac{B_4}{4} + \frac{B_6}{6} \right)$				
A_7	$-\frac{\mu}{14} \left(\frac{B_6}{6} + \frac{B_8}{8} \right)$				
A_9	$-\frac{\mu}{18} \left(\frac{B_8}{8} + \frac{B_{10}}{10} \right)$				
A_{11}	$-\frac{\mu}{22} \left(\frac{B_{10}}{10} + \frac{B_{12}}{12} \right)$				

[por. (4.12)] i podstawiając do drugiego otrzymujemy dopiero układ (4.9). Wykorzystanie faktu, iż $A_1 = 1$ prowadzi do zależności (4.13).

Zbadamy teraz przypadek, gdy otrzymany tutaj nieskończony układ równań jest układem zupełnym i regularnym. Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy że $q_4 \approx q_6 \approx 0$. Znajdziemy sumę [3] wyrazów

$$(4.14) \quad C_m = \sum_{v=2}^{2m-2} \left| \frac{\delta_{uv}}{\delta_{uu}} \right| + \sum_{v=2m+2}^{\infty} \left| \frac{\delta_{uv}}{\delta_{uu}} \right|.$$

Jeżeli do (4.14) podstawimy funkcje (4.10) i (4.11), to otrzymamy

$$(4.15) \quad C_m = 1 - q_m,$$

gdzie

$$(4.16) \quad q_m = \begin{cases} \frac{\mu^2/144 + 2q_0 - q_2}{\mu^2/72 + 2q_0}, & \text{jeśli } m = 1, \\ -\frac{\mu^2}{4m^2} \cdot \frac{1}{(m^2 - 1)(4m^2 - 1)^2} + 2q_0 - 2q_2 \\ \frac{\mu^2}{4m^2} \cdot \frac{4m^2 + 1}{(4m^2 - 1)^2} + 2q_0, & \text{jeśli } m > 1. \end{cases}$$

Stosunki $|C_u/\delta_{uu}|$ spełniają następujące związki:

$$(4.17) \quad \left| \frac{C_u}{\delta_{uu}} \right| = \begin{cases} \frac{\mu}{2(2q_0 + \mu^2/72)}, & \text{jeśli } u = 2, \\ 0, & \text{jeśli } u > 2, \end{cases}$$

gdzie

$$K^* = \frac{\mu}{2(2q_0 + \mu^2/72)}$$

oraz

$$|C_u/\delta_{uu}| \leq K^*.$$

Jak nie trudno zauważyć, wyrażenia (4.16) są zawsze mniejsze od jedności, co przy warunku (4.17) pozwala wnioskować, że układ (4.9) jest zawsze układem regularnym posiadającym rozwiązanie

$$(4.18) \quad |B_{2m-1}| \leq K^*.$$

Jeżeli dodatkowo wśród liczb (4.16) znajduje się taka liczba $\Theta = \varrho_{m_0} > 0$, iż $\varrho_m \geq \Theta$, to wtedy też będzie $C_m \leq 1 - \Theta$ i rozpatrywany układ (4.9) będzie zupełny i regularny, a zatem będzie zawsze posiadał jednoznaczne i ograniczone rozwiązanie, które może być wyznaczone np. metodą kolejnych przybliżeń.

5. Kolejność rozwiązywania

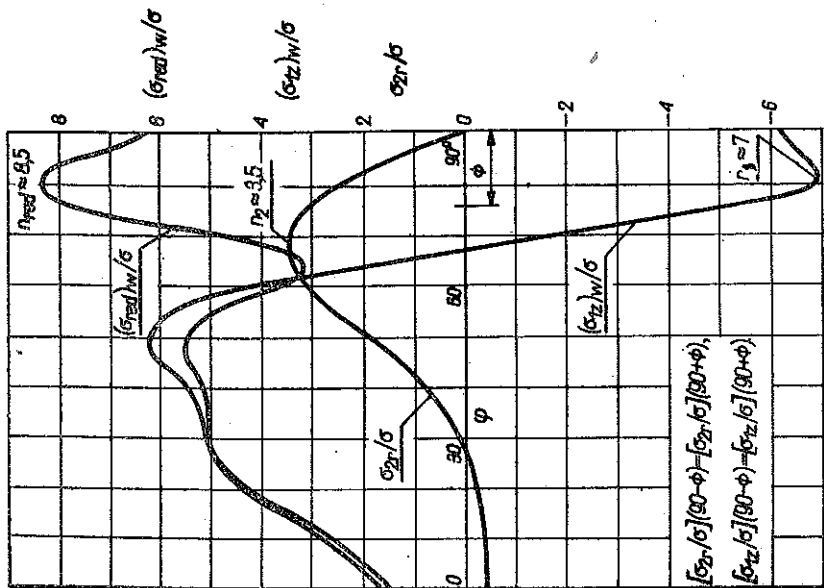
Jeżeli są dane parametry geometryczne łuku zginanego (wartości r , R , h i ϑ_0), to za pomocą równań (3.10)₃ i (4.2)₂ obliczamy wartość p i μ . Na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 3 znajdujemy wartości współczynników q_0 , q_2 , q_4 i q_6 . Następnie dla przyjętej liczby niewiadomych j (por. p. 4 wniosków końcowych) obliczamy według tablicy 1 współczynniki δ_{uv} . Dalej rozwiązujemy układ równań (4.9), skąd otrzymujemy wartości B_{2m} , a następnie z równania (4.7)₁ przy uwzględnieniu (3.10)₁ równanie określające naprężenia południkowe σ_1 . Z równania zaś (4.13) otrzymujemy liczbę Kármána K . Na podstawie tablicy 2 ustalamy wartości współczynników A_{2m-1} , co pozwala teraz na podstawie równania (4.7)₂ ustalić naprężenia równoleżnikowe σ_2 . Po sporządzeniu wykresów ilorazów σ_1/σ , σ_2/σ i σ_{red}/σ możemy ze wzoru (4.8) ustalić odpowiednie liczby wzrostu naprężeń.

Dla ilustracji podamy w p. 6 tok obliczeń dla łuków, które były badane doświadczalnie przez SKWORCOWA [2].

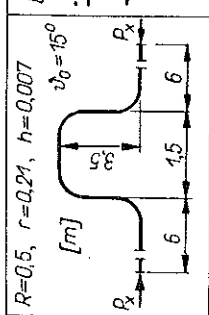
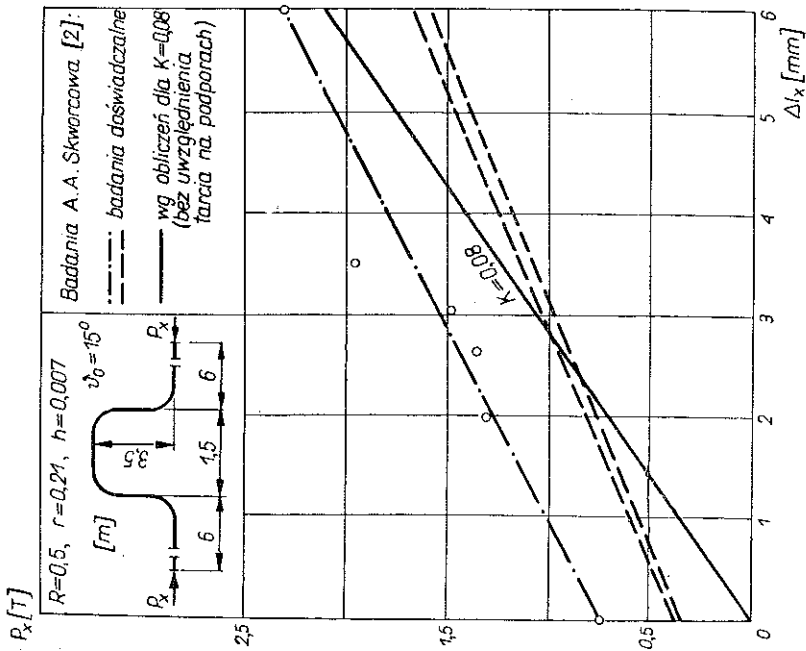
6. Zastosowania praktyczne

Obecnie zajmiemy się rozwiązaniem konkretnych przykładów liczbowych dotyczących dwóch łuków zginanych: jeden o dużym promieniu $R \approx 8r$ (łuk pierwszy), drugi o promieniu $R \approx 2,5r$ (łuk drugi). Podane tutaj przykłady są o tyle korzystne, że łuki te były badane doświadczalnie przez SKWORCOWA, który ustalił dla nich liczby Kármána. Porównanie wyników otrzymanych na podstawie przytoczonego tutaj rozwiązania z wynikami doświadczalnymi daje błąd rzędu 15% (dla liczby Kármána). Błąd ten powinien ulec zmniejszeniu w przypadku łuków posiadających większą liczbę segmentów.

Cały tok obliczeń ujęto za pomocą układu tablicowego. Schemat taki przytoczono w tablicy 3. Po uwzględnieniu uwag zawartych w p. 5, tablica ta nie wymaga szczególnych objaśnień. Odpowiednie wykresy naprężeń podano na rys. 4 i 6, a badania doświadczalne zaczerpnięte z pracy [2] przytoczono na rys. 5 i 7.



Rys. 6



Rys. 7

Tablica 3

Lp	Rów. Rys. Tabl.	Symbol	Liczba j		Wymiar
			$j = 2$	$j = 4$	
1	Rys. 1	R	1000		mm
2		r	132		mm
3		h	9		mm
4		ϑ_0	0,2618		rd
5	(4.2) ₂	μ	6,71		
6	(3.10) ₃	p	16,45		
7	Rys. 3	q_0	3,18		
8		q_2	0,84		
9		q_4	0,50		
10		q_6	0,32		
11	Tabl. 1	δ_{22}	6,36000	6,98533	
12		δ_{44}		6,51633	
13		$\delta_{24} = \delta_{42}$		1,15267	
14	(4.9)	B_2	0,528	0,495	
15		B_4		-0,088	
16	Tabl. 2	A_1	1	1	
17		A_3		-0,253	
18	(4.13)	K	0,53	0,547	
19			Dalej obliczenia przeprowadza się tylko dla $j=2$		
20	(4.7) ₁	$\frac{\sigma_{1z}}{\sigma} \Big _{z=-\frac{h}{2}}$	$\pm \sqrt{3} \left(3,86 - \frac{5,72}{18,45 + 16,45 \cos 2\varphi} \right) \times$ $\times (0,495 \cos 2\varphi - 0,0875 \cos 4\varphi)$		
21		$\frac{\sigma_{1z}}{\sigma} \Big _{z=\frac{h}{2}}$			
22	(4.7) ₂	$\frac{\sigma_{2r}}{\sigma}$	$\cos \varphi - 0,252 \cos 4\varphi$		
23	Rys. 4	n_1	2,6		
24		n_2	0,9		
25		n_{red}	3		

7. Wnioski końcowe

1. Obliczenia teoretyczne dotyczące liczby Kármána wykazują błędy rzędu 15% w stosunku do wyników doświadczalnych. Błąd ten może ulec zmniejszeniu w przypadku rozpatrywania łuków o większej liczbie segmentów.

2. Jeśli chodzi o naprężenia, to porównanie liczby zwiększenia naprężeń zredukowanych z analogiczną liczbą uzyskaną doświadczalnie [4] daje «błędy» rzędu 20–30%. Określenie błędu jest tutaj czysto umowne i wynika z faktu porównywania naprężeń na styku powłok walcowych ze średnimi naprężeniami otrzymanymi w przykładzie drugim niniejszej pracy. Dla materiałów plastycznych to lokalne spiętrzenie naprężeń nie ma wpływu na «nośność» konstrukcji. Przeważające tutaj rozwiązanie jest ze

Tablica 4

Lp	Rów. Rys. Tabl.	Symbol	Liczba j		Wymiar
			$j = 2$	$j = 4$	
1	Rys. 1	R	500		mm
2		r	210		mm
3		h	7		mm
4		ϑ_0	0,2618		rd
5	(4.2) ₂	μ	43,65		
6	(3.10) ₃	p	6,83		
7	Rys. 3	q_0	2,84		
8		q_2	0,96		
9		q_4	0,48		
10		q_6	0,22		
11	Tabl. 1	δ_{22}	32,1428	32,1428	
12		δ_{44}	12,2957	14,6774	
13		δ_{66}		7,2786	
14		δ_{88}		5,9838	
15		$\delta_{24} = \delta_{42}$	14,1914	14,1914	
16		$\delta_{26} = \delta_{62}$		-0,4800	
17		$\delta_{28} = \delta_{82}$		0,2200	
18		$\delta_{46} = \delta_{64}$		2,5478	
19		$\delta_{48} = \delta_{84}$		-0,4800	
20		$\delta_{68} = \delta_{86}$		1,3650	
21	(4.9)	B_2	1,3845	1,295	
22		B_4	-1,5980	-1,370	
23		B_6		0,621	
24		B_8		-0,299	
25	Tabl. 2	A_1	1,0000	1,000	
26		A_3	-2,1299	-2,200	
27		A_5		1,043	
28		A_7		-0,206	
29	(4.13)	K	0,062	0,066	
			Niżej obliczenia przeprowadza się tylko dla $j=4$		
30		K_{1z}	$\sqrt{3} \left(3,86 - \frac{5,72}{8,83 + 6,83 \cos 2\varphi} \right)$		
31	(4.7) ₁	$\frac{(\sigma_{1z})_w}{\sigma}$	$K_{1z} (1,295 \cos 2\varphi - 1,370 \cos 4\varphi + 0,621 \cos 6\varphi - 0,299 \cos 8\varphi)$		
32		$\frac{(\sigma_{1z})_z}{\sigma}$	$-K_{1z} (1,295 \cos 2\varphi - 1,370 \cos 4\varphi + 0,621 \cos 6\varphi - 0,299 \cos 8\varphi)$		
33	(4.7) ₂	$\frac{\sigma_{2r}}{\sigma}$	$\cos \varphi - 2,20 \cos 3\varphi + 1,043 \cos 5\varphi - 0,206 \cos 7\varphi$		
34	Rys. 6	n_1	7		
35		n_2	3,5		
36		n_{red}	8,5		

względnie na pewną średnią wartość naprężeń rozwiązaniem bardziej zbliżonym do rozwiązania w stanie plastycznym. Z tego ostatniego określenia wynika, że użycie cudzożyłowy w wyrażeniu «błąd» jest uzasadnione.

3. Dla orientacyjnych obliczeń można przyjąć, że $q_4 \approx q_6 \approx 0$; pociąga to za sobą dalsze uproszczenia podstawowego układu równań (4.9). W tym przypadku rozwiązanie układu może być przedstawione za pomocą ułamków łańcuchowych nieskończonych:

$$B_v = - \frac{c_v}{|\delta_{vv}|} - \frac{\delta_{v, v+2}^2}{|\delta_{v+2, v+2}|} - \frac{\delta_{v+2, v+4}^2}{|\delta_{v+4, v+4}|} - \dots - \frac{\delta_{2j-2, 2j}^2}{|\delta_{2j, 2j}|},$$

gdzie

$$c_v = \begin{cases} -\mu/2, & \text{jeśli } v = 2, \\ B_{v-2} \delta_{v-2, v}, & \text{jeśli } 2 < v \leq 2j. \end{cases}$$

4. Zaleca się przyjmować liczbę j w zależności od promienia względnego $\lambda = r/R$ następująco:

$$\lambda < 0,2, \quad \text{jeśli } j = 2-3,$$

$$\lambda = 0,2-0,3, \quad \text{jeśli } j = 3-4,$$

$$\lambda = 0,3-0,5, \quad \text{jeśli } j = 4-6.$$

Przytoczone powyżej zależności mają charakter wyłącznie orientacyjny. Wyrażną wskazówką właściwego doboru liczby j jest «zbieżność» do zera ciągów A_{2m-1} , B_{2m} , gdy $m \rightarrow j$.

Literatura cytowana w tekście

1. S. BORKOWSKI, *Zginanie łuków falistych*, Rozpr. Inżyn., 1, 12 (1964), 137.
2. А. А. Скворцов, *Компенсационные устройства теплофикационных трубопроводов*, Госэнергоиздат, 1961.
3. Л. В. Кавторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Москва 1962.
- 4.*) А. Г. Камерштейн, *Исследование деформативности и несущей способности сварных колен*, Стр. труб., 3, 9 (1964), 10.

Резюме

ИЗГИБ СЕГМЕНТНЫХ АРОК

Приводится приближенный способ решения изгиба сегментных арок. Задача решается, принимая, что количество сегментов должно равняться двум или быть больше. Принимается также конструктивная ортотропия и пренебрегается внутренними величинами Q , N_1 и M_2 ; предполагается также, что $1 + \lambda \cos \varphi \approx 1$. Далее принимается, что арка подвержена изгибающему моменту.

*) Publikacja ta ukazała się po przesłaniu przez autora niniejszej pracy do redakcji i dołączona została w terminie późniejszym (przyp. aut.).

Исходной точкой, являются уравнения осе-симметрического состояния теории ортотропных оболочек, т.е. уравнения (4.1). Из функции ортотропии, существенное значение имеет, только, функция k_{12} [формула (3.2)], которую после упрощения можно представить в виде формулы (3.11). Существующие в последней формуле параметры q_0, q_2, \dots определяются из диаграммы, приведенной на рис. 3, для предварительно определенного значения p (формула (3.10)₃).

Основные уравнения, по которым определяются коэффициенты ряда напряжений (4.7), это уравнения (4.9) и (4.12). Число Кармана определяется из формулы (4.13).

В п. 6 рассматриваются два числовых примера (табл. 3, 4, рис. 4 и 6), касающиеся сегментных арок. Эти арки исследовались экспериментально А. А. Скворцовым [2]. Соответствующие экспериментальные данные полученные этим автором приводятся на рис. 5 и 7.

S u m m a r y

BENDING OF SEGMENT ARCHES

The author presents an approximate method for solving the bending problem of segment arches. The problem is solved by assuming that the number of segments is two or more. Structural orthotropy is assumed. It is also assumed that the section forces Q, N_1 and M_2 are zero and that $1 + \lambda \cos \varphi \approx 1$. The arch is subjected to a bending moment.

The point of departure is the equations of a circularly symmetric state of the theory of orthotropic shells, that is Eqs. (4.1). Of the orthotropy functions the only important is the function k_{12} [Eq. (3.2)] which, after simplifying may be represented by (3.11). The parameters q_0, q_2, \dots of the latter equation are obtained from the diagram of Fig. 3 for a value of p , (3.10)₃, previously determined. The fundamental equations from which the coefficients of the stress series (4.7) are obtained, are (4.9) and (4.12). The Kármán number is obtained from (4.13).

Sec. 6 contains two numerical examples (Table 3, 4, Figs. 4 and 6). The arches have been tested experimentally by A. A. SKVORTSOV [2]. His results are presented in Figs. 5 and 7.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 stycznia 1964 r.