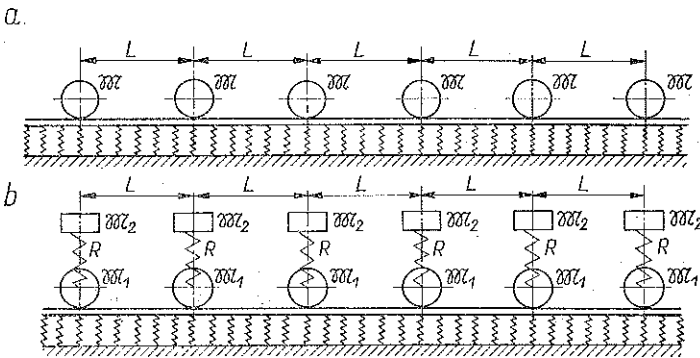


DYNAMIKA MAS SKUPIONYCH, PORUSZAJĄCYCH SIĘ PO BELCE LEŻĄCEJ
NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

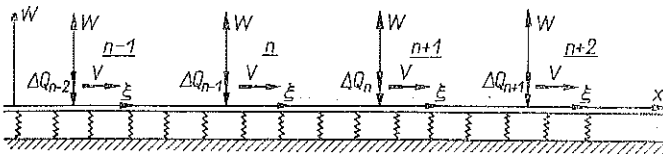
HENRYK FRĄCKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Równania ruchu

Rozważmy belkę, po której poruszają się w równych odstępach L z szybkością $V = \text{const}$ siły ΔQ_n . Siły ΔQ_n określają oddziaływanie ruchomych mas skupionych na belkę sprężystą. Wprowadźmy szereg ruchomych układów współrzędnych W, ξ, t , poruszających się z prędkością $V = \text{const}$ względem nieruchomego układu W, X, t . W początkach układów ruchomych znajdują się siły ΔQ_n . Ruchome układy współrzędnych oznaczono kolejnymi numerami $(n - 1), n, (n + 1) \dots$ (rys. 2).



Rys. 1



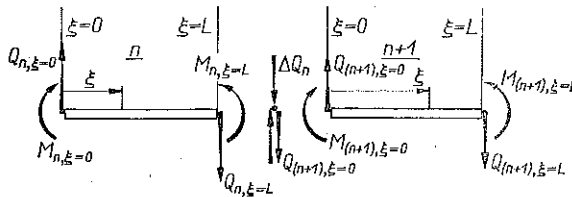
Rys. 2

Dowolny przekrój belki określić można w czasie t przez podanie numeru n układu ruchomego oraz jego odciętej ξ w tym układzie. Przekroje przechodzące przez początki układów ruchomych w czasie t dzielą belkę na szereg równych odcinków o długości L , zwanych dalej segmentami. Segmenty oznaczać będziemy tymi samymi numerami, co związane z nimi układy współrzędnych. Kolejne wychylenia przekrojów segmentów w czasie t wynoszą W , a ich kąty obrotu θ . Działają w nich ponadto siły tnące Q i momenty gnące M . Wielkości te opisywać będziemy w ruchomych

układach współrzędnych i dlatego pomiędzy dwoma kolejnymi segmentami n i $(n+1)$ muszą być spełnione następujące równania ciągłości:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} W_{n, \xi=L} &= W_{(n+1), \xi=0}, & M_{n, \xi=L} &= M_{(n+1), \xi=0}, \\ \theta_{n, \xi=L} &= \theta_{(n+1), \xi=0}, & Q_{n, \xi=L} &= Q_{(n+1), \xi=0} + \Delta Q_n. \end{aligned}$$

Równania powyższe wyrażają fakt, że ugięcie W , kąt ugięcia θ i moment gnący M nie ulegają zmianie przy przejściu z jednego segmentu na drugi, natomiast siła tnąca Q zwiększa się ΔQ_n (rys. 3). Skok siły tnącej jest spowodowany oczywiście oddziaływaniem na belkę sprężystą n -tej masy ruchomej.



Rys. 3

Dalsze rozważania sprowadzają się do rozwiązania układu równań (1.1). W tym celu należy jednak wyrazić wszystkie wyrazy tych równań w postaci określonych funkcji. Funkcje te będą zawierały pewne stałe swobodne, które należy określić z równań (1.1). Stałe te powinny umożliwić spełnienie tych równań. W p. 1.1. rozważymy swobodne drgania belki na sprężystym podłożu i wyprowadzimy funkcje W , θ , M i Q . W p. 2 rozpatrzmy nieswobodne drgania mas skupionych i wyprowadzimy wyrażenie ΔQ_n . W p. 3 zajmiemy się rozwiązaniem układu równań (1.1).

1. Swobodne drgania belki na sprężystym podłożu

1.1. Drgania belki w układzie nieruchomym x, t . Rozpatrując równowagę dynamiczną sił działających na element belki leżącej na sprężystym podłożu dochodzimy do znanego równania różniczkowego

$$(1.2) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + pW + q \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie

$$(1.3) \quad p = \frac{k}{EI}, \quad q = \frac{m}{EI},$$

przy czym k oznacza współczynnik sprężystości podłoża belki, m jednostkową masę belki oraz EI sztywność giętą belki.

Kąt ugięcia, moment gnący i siła tnąca wyrażają się wzorami

$$(1.4) \quad \theta = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad M = EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad Q = EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}.$$

Równanie (1.2) oraz wzory (1.3) określają przemieszczenia i siły wewnętrzne w belce jako funkcje odciętej X i czasu t (w układzie nieruchomym x, t).

Drgania belki w układzie ruchomym ξ, t . Współrzędne ξ układu ruchomego związane są ze współrzędnymi układu nieruchomego następującą zależnością

$$(1.5) \quad \xi^{(n)} = X - Vt = X_{0(n)},$$

gdzie ξ_n jest to odcięta przekroju w układzie ruchomym n , a $X_{0(n)}$ odcięta początku n -tego układu ruchomego w chwili $t = 0$.

W tym nowym układzie współrzędnych równanie (1.2) przyjmie postać

$$(1.6) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + V^2 q \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - 2Vq \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial t} + pW + q \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

Kąt ugięcia, moment gnący i siła tnąca są następujące:

$$(1.7) \quad \theta = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad M = EI \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad Q = EI \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}.$$

Jakkolwiek równanie (1.6) i wzory (1.7) mogą stanowić podstawę do dalszych rozważań, to jednak wygodniej przedstawić je w nowym, bezwymiarowym układzie ζ, τ , określonym za pomocą związków

$$(1.8) \quad \zeta = \sqrt[4]{p} \xi, \quad \tau = \sqrt{\frac{p}{q}} t.$$

Drgania belki w układzie ζ, τ . W nowym układzie równanie (1.6) i wzory (1.7) przyjmują postać

$$(1.9) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^4} + U^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} - 2U \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial \tau} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + W = 0,$$

$$\theta = \sqrt[4]{p} \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \quad M = \sqrt[4]{p^2} EI \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2}, \quad Q = \sqrt[4]{p^3} EI \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta^3},$$

gdzie

$$(1.10) \quad U = V \sqrt[4]{\frac{q^2}{p}}$$

nazywać będziemy uogólnioną prędkością układu ruchomego.

Odciętej $\xi = L$ odpowiada w nowym układzie odcięta

$$(1.11) \quad l = \sqrt[4]{p} L$$

określająca uogólnioną długość segmentu.

*Rozwiązanie równania (1.9)*₁. Zakładając ugięcie belki w postaci

$$W(\zeta, \tau) = Ae^{\lambda \zeta + \Omega \tau}$$

otrzymamy po podstawieniu do równania (1.9)₁ następujące równanie charakterystyczne:

$$(1.12) \quad \lambda^4 + U^2 \lambda^2 - 2U\Omega \lambda + (1 + \Omega^2) = 0.$$

Cztery pierwiastki równania charakterystycznego λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) są oczywiście funkcjami współczynników tego równania, a więc uogólnionej prędkości U oraz uogólnionej częstości Ω . O ile prędkość U jest wielkością znaną (gdyż można ją obliczyć ze wzoru (1.10)), to częstość Ω jest na razie niewiadoma i należy ją traktować jako swobodny parametr, który określimy dopiero po rozwiązaniu układu równań ciągłości (1.1). W tym sensie równanie charakterystyczne należy uważać jako równanie jednoparametrowe, a jego pierwiastki λ_j jako funkcje parametru Ω .

Pierwiastki λ_j i częstość Ω określają z dokładnością do czterech stałych A_j zarówno ugięcie belki W , kąt ugięcia θ jak i moment gnący M oraz siłę tnącą Q w belce. Ponieważ posługujemy się n -tym układem ruchomym ζ, τ , należy do stałych A_j dodać indeks n . Zgodnie z powyższym i wzorami (1.9)₂ możemy napisać

$$(1.13) \quad W_{n,\zeta} = \sum_{j=1}^4 e^{\lambda_j \zeta} A_{jn} e^{\Omega \tau}, \quad M = \sqrt[4]{p^2} EI \sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 e^{\lambda_j \zeta} A_{jn} e^{\Omega \tau},$$

$$(1.14) \quad \theta_{n,\zeta} = \sqrt[4]{p} \sum_{j=1}^4 \lambda_j e^{\lambda_j \zeta} A_{jn} e^{\Omega \tau}, \quad Q = \sqrt[4]{p^3} EI \sum_{j=1}^4 \lambda_j^3 e^{\lambda_j \zeta} A_{jn} e^{\Omega \tau}.$$

Wyraziliśmy zatem wielkości W, θ, M i Q w postaci określonych funkcji, które można podstawić do równań ciągłości (1.1). Funkcje powyższe zawierają swobodne stałe A_{jn} oraz niewiadomą częstość Ω . Stałe A_{jn} zmieniają się przy przejściu z jednego segmentu na następny. Zostaną one wyznaczone z równań (1.1). Istotną trudność polega jednak na tym, że pierwiastki λ_j są bardzo złożonymi funkcjami Ω , czyli funkcjami wielkości, której na razie nie znamy, gdyż należy ją dopiero obliczyć z równań ciągłości (1.1). Ażeby uniknąć złożonych wzorów i ułatwić obliczenia, postąpimy w sposób następujący: pierwiastki λ_j oraz częstość Ω określimy jako funkcje pewnego parametru η , który wprowadzimy do naszych rozważań jako parametr pomocniczy. Posługując się tym parametrem, wyrazimy stosunkowo prosto również funkcje (1.13). Sam parametr η będzie można określić z równań ciągłości (1.1).

1.2. Wyznaczenie pierwiastków λ_j i częstości Ω jako funkcji η . Wiadomo z algebry, że pomiędzy pierwiastkami λ_j równania charakterystycznego (1.12) a jego współczynnikami istnieją następujące związki:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) &= U^2, \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_2) &= 2U\Omega, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 &= 1 + \Omega^2. \end{aligned}$$

Wprowadzimy oznaczenia

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= a, & \lambda_1 + \lambda_2 &= c, \\ \lambda_3 \lambda_4 &= b, & \lambda_3 + \lambda_4 &= d. \end{aligned}$$

Podstawienie (1.16) do (1.15) pozwala stwierdzić, że wielkości a , b , c i d muszą spełniać następujące związki:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} d &= -c, & c^2 &= \frac{4(a+b)(ab-1)}{(a+b)^2-4}, \\ U^2 &= \frac{(a+b)(a-b)^2}{(a+b)^2-4}, & \Omega^2 &= ab-1. \end{aligned}$$

Wprowadźmy dwa nowe parametry η i δ za pomocą zależności

$$(1.18) \quad a = -\eta - \delta, \quad b = -\eta + \delta.$$

Podstawiając wyrażenia (1.18) do wzorów (1.17) możemy wyrazić wszystkie wielkości jako funkcje parametru η :

$$(1.19) \quad \begin{aligned} c &= i\sqrt{2\eta+U^2}, & d &= -i\sqrt{2\eta+U^2}, \\ \delta^2 &= \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{\eta} - \eta \right), & \Omega^2 &= \eta^2 - \delta^2 - 1. \end{aligned}$$

Pierwiastki λ_j określić można [na podstawie (1.16)] jako pierwiastki dwóch następujących równań kwadratowych:

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \lambda^2 - i\sqrt{2\eta+U^2}\lambda - (\eta+\delta) &= 0, \\ \lambda^2 + i\sqrt{2\eta+U^2}\lambda - (\eta-\delta) &= 0; \end{aligned}$$

skąd

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= i\nu + \alpha, & \lambda_2 &= i\nu - \alpha, \\ \lambda_3 &= -i\nu - \beta, & \lambda_4 &= -i\nu + \beta, \end{aligned}$$

gdzie

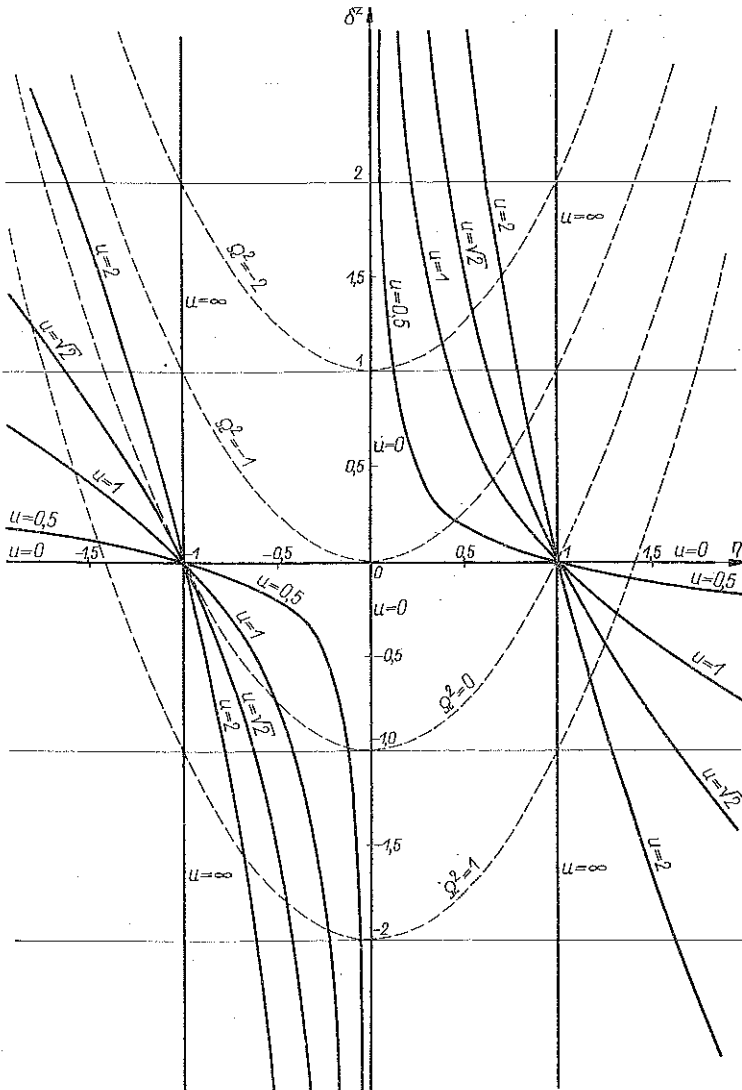
$$(1.22) \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{2\eta+U^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2\eta-U^2+4\delta}, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2\eta-U^2-4\delta}.$$

Wzory (1.21), (1.22) i (1.19) pozwalają obliczyć pierwiastki λ_j oraz częstość Ω jako funkcje uogólnionej prędkości U oraz swobodnego parametru η . Nadając parametrowi η różne wartości można zanalizować zależność między pierwiastkami λ_j a częstością Ω .

1.3. Analiza pierwiastków λ_j i częstości Ω . Analizę pierwiastków λ_j i częstości Ω przeprowadzimy w układzie δ^2, η . W tym celu wykreślimy rodziny funkcji $U^2 = \text{const}$ i $\Omega^2 = \text{const}$ według zależności

$$U^2 = \frac{2\eta}{1-\eta^2} \delta^2 = \text{const}, \quad \Omega^2 = \eta^2 - \delta^2 - 1 = \text{const}.$$

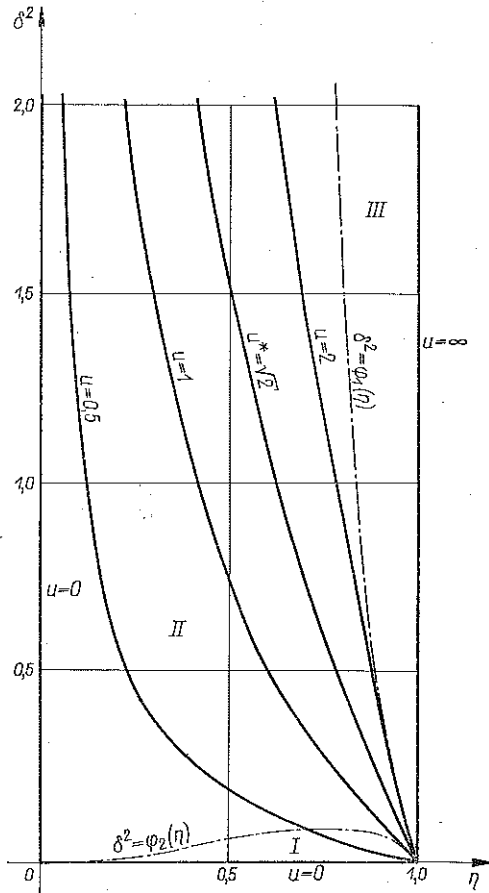
Pierwszą rodzinę nazwiemy krzywymi stałej prędkości, a drugą krzywymi stałej częstości. Z rysunku 4 widać, że krzywe te mogą się przecinać w trzech różnych punktach, których współrzędne wyznaczają trzy pary wartości η_s i δ_s^2 ($s = 1, 2, 3$). Każdej z par wartości η_s i δ_s^2 odpowiadają jednak takie same wartości U^2 i Ω^2 ,



Rys. 4

a więc każda z tych par wyznacza takie same wartości pierwiastków λ_j [zgodnie z równaniem (1.12)]. Wystarczy zatem określić jeden punkt przecięcia krzywej prędkości z daną krzywą częstości i wyznaczyć odpowiadającą temu punktowi parę η_j i δ_j^2 . Najwygodniejszymi punktami przecięcia są punkty leżące w prawej półpłaszczyźnie (rys. 4), czyli punkty o odciętych $\eta_j \geq 0$. Z rysunku 4 widać ponadto,

że dla wartości η określonych nierównością $0 \leq \eta \leq 1$ zachodzą przecięcia się krzywych $U^2 = \text{const}$ z rodziną krzywych $\Omega^2 = \text{const} \leq 0$, przy czym $\delta^2 \geq 0$. Obszar ten odpowiada zatem drganiom harmonicznym. Natomiast dla wartości η określonych nierównością $1 \leq \eta \leq \infty$ zachodzą przecięcia krzywych $U^2 = \text{const}$ z grupą krzywych $\Omega^2 = \text{const} \geq 0$, przy czym $\delta^2 \leq 0$. Obszar ten określa więc ruch aperiodyczny układu. Z powyższych rozważań wynika jasno, że dla prześledzenia drgań harmonicznym układu wystarczy zbadać punkty przecięcia krzywych zawarte w półnieskończonym pasmie określonym nierównościami $0 \leq \eta \leq 1$ oraz $0 \leq \delta^2 \leq \infty$. Pasma to nazwiemy obszarem drgań harmonicznym. Zjawisko dywergencji określa warunek $\Omega^2 = 0$, co odpowiada parametrom $\delta^2 = 0$ i $\eta = 1$. Z rysunku 4 widać jednak, że prędkość U^2 jest wtedy nieokreślona. W obszarze



Rys. 5

drgań harmonicznym pierwiastki λ_j mogą przybierać różne wartości w zależności od wielkości parametrów η i δ (lub η i U). Ze wzorów (1.21) i (1.22) wynika, że współczynnik ν jest liczbą rzeczywistą w całym obszarze drgań harmonicznym. Wielkości a i β mogą być jednak zarówno rzeczywiste jak i urojone. W zależności

od tego czy a i β są urojone, czy rzeczywiste, obszar drgań harmoniczych można podzielić na trzy podobszary (rys. 5). Krzywymi granicznymi tych podobszarów będą krzywe określone za pomocą równań

$$(1.23) \quad \begin{aligned} 2\eta - U^2 + 4\delta &= 0, & \delta^2 &= \varphi_1(\eta), \\ 2\eta - U^2 - 4\delta &= 0, & \delta^2 &= \varphi_2(\eta). \end{aligned}$$

W podobszarze I a i β są rzeczywiste, w II a rzeczywiste, a β urojone, w obszarze III a i β są urojone.

Podział obszaru drgań harmoniczych na omówione wyżej podobszary posiada istotne znaczenie fizyczne. Wielkości a i β określają dekrement tłumienia fal w zależności od współrzędnej ζ . Tłumienie to jest pełne (a i β są rzeczywiste) tylko w podobszarze I. W podobszarze II dwie fale określone przez λ_3 i λ_4 zatracają zdolność tłumienia się przy wzroście współrzędnej ζ , natomiast fale określone pierwiastkami λ_1 i λ_2 posiadają zdolność tłumienia przy wzroście ζ .

Podobszar II można zatem nazwać podobszarem o niepełnym tłumieniu. Podobszar III charakteryzuje się tym, że żadna z fal nie posiada zdolności tłumienia się ze wzrostem współrzędnej ζ . Podobszar ten nazwiemy podobszarem pozbawionym tłumienia.

Z rysunku 5 widać, że krzywe $U < \sqrt{2}$ przechodzą przez podobszary I i II. Dla prędkości tych fale mogą mieć zatem albo pełne tłumienie (podobszar I), albo niepełne tłumienie (podobszar II). Krzywa $U^* = \sqrt{2}$ leży całkowicie w podobszarze II. Punkt $\eta = 1$ jest dla tej prędkości punktem osobliwym, gdyż $a = \beta = 0$. Krzywe prędkości $U > \sqrt{2}$ przechodzą przez podobszary II i III. Dla prędkości tych fale posiadają bądź niepełne tłumienie (podobszar II), bądź nie posiadają całkowicie tłumienia (podobszar III).

Z dalszych rozważań przekonamy się o znaczeniu powyższych wniosków. Reasumując powyższe można stwierdzić, że wyprowadzone wzory pozwalają określić zarówno częstość drgań Ω , jak i wartości pierwiastków λ_j jako funkcje prędkości U i swobodnego parametru η .

2. Działanie ruchomych mas skupionych na podłoże sprężyste

W rozdziale tym rozpatrzmy drgania mas skupionych, poruszających się wraz z ruchomym układem współrzędnych ζ , τ . Pozwoli to określić siłę ΔQ_n , z jaką działa n -ta masa na podłoże sprężyste.

Na rysunku 1 przedstawiono dwa najprostsze układy mas poruszających się w odstępach L po podłożu sprężystym. W rozdziale niniejszym wyznaczmy siły ΔQ_n dla tych dwóch rodzajów mas skupionych. Zaproponowana tutaj metoda pozwala jednak na rozwiązanie innych bardziej złożonych zagadnień.

2.1. Układ mas pojedynczych. Napiszmy równanie ruchu n -tej masy skupionej, na którą działa siła ΔQ_n (rys. 6a):

$$\mathfrak{M} \frac{d^2 W_n}{dt^2} - \Delta Q_n = 0.$$

Wprowadzając czas uogólniony

$$\tau = \sqrt{\frac{p}{q}} t$$

i podstawiając W_n ze wzorów (1.13) dla $\zeta = l$ otrzymamy

$$(2.1) \quad \Delta Q_n = \mathfrak{M}^* \Omega^2 \left[\sum_{j=1}^4 e^{\lambda_j l} A_{jn} \right] e^{\Omega \tau},$$

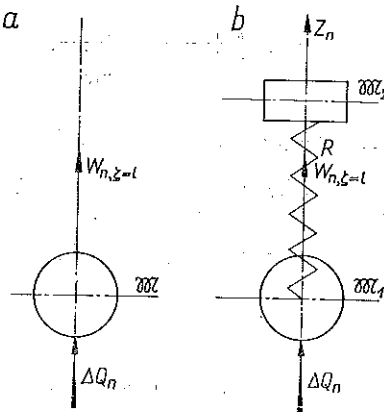
gdzie

$$(2.2) \quad \mathfrak{M}^* = \mathfrak{M} \frac{p}{q}.$$

Określiliśmy zatem siłę ΔQ_n za pomocą funkcji podobnych do tych, którymi wyrażają się ugięcie W , kąt ugięcia θ , moment gnący M i siła tnąca Q . Pozwoli to na napisanie układu równań ciągłości (1.1) w wyraźnej postaci, niezbędnej dla ich rozwiązania.

2.2. Układ mas podwójnych. Napiszmy równania ruchu n -tej masy podwójnej ze sprężyną, na którą działa siła ΔQ_n (rys. 6b):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_2 \frac{d^2 Z_n}{dt^2} + R(Z_n - W_n) &= 0, \\ \mathfrak{M}_1 \frac{d^2 W_n}{dt^2} - R(Z_n - W_n) - \Delta Q_n &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 6

Przyjmując $Z_n = BW_n$, wprowadzając czas uogólniony

$$\tau = \sqrt{\frac{p}{q}} t$$

oraz podstawiając W_n ze wzorów (1.13) dla $\zeta = l$, otrzymamy

$$(2.4) \quad \Delta Q_n = \left(\mathfrak{M}_1^* + \frac{R\mathfrak{M}_2^*}{R + \mathfrak{M}_2^* \Omega^2} \right) \Omega^2 \sum_{j=1}^4 e^{\lambda_j l} A_{jn} e^{\Omega \tau},$$

gdzie

$$(2.5) \quad \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_1 \frac{p}{q}, \quad \mathfrak{M}_2^* = \mathfrak{M}_2 \frac{p}{q}.$$

Współczynnik proporcjonalności B określony jest za pomocą wzoru

$$(2.6) \quad B = \frac{R}{R + \mathfrak{M}_2^* \Omega^2},$$

gdzie R oznacza stałą sprężyny łączącej masy \mathfrak{M}_1 i \mathfrak{M}_2 .

Wzór (2.4) określa siłę ΔQ_n z jaką n -ta masa podwójna działa na podłoże sprężyste. Posiada on budowę analogiczną do budowy wzorów (1.9) i pozwala napisać układ równań ciągłości (1.1) w wyraźnej postaci, niezbędnej dla ich rozwiązania.

Porównując wzory (2.2) i (2.4) widzimy, że możemy im nadać jedną postać

$$(2.7) \quad \Delta Q_n = \chi \Omega^2 \sum_{j=1}^4 e^{\lambda_j l} A_{jn} e^{\Omega \tau},$$

przy czym współczynnik χ ma postać: dla układu mas pojedynczych

$$\chi = \mathfrak{M}^*,$$

dla układu mas podwójnych

$$\chi = \mathfrak{M}_1^* + \frac{R\mathfrak{M}_2^*}{R + \mathfrak{M}_2^* \Omega^2}.$$

3. Rozwiązanie układu równań ciągłości

3.1. Równanie charakterystyczne. W p. 1 określiliśmy wyraźną postać funkcji (1.13), które określają przemieszczenie W , kąt ugięcia θ , moment gnący M oraz siłę tnącą Q w ruchomym uogólnionym układzie współrzędnych ζ , τ . W p. 2 określona została funkcja ΔQ_n (2.7). Podstawiając powyższe funkcje do układu równań ciągłości (1.1) otrzymamy po uproszczeniach

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 [e^{\lambda_j l} A_{jn} - A_{j(n+1)}] &= 0, & \sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 [e^{\lambda_j l} A_{jn} - A_{j(n+1)}] &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 \lambda_j [e^{\lambda_j l} A_{jn} - A_{j(n+1)}] &= 0, & \sum_{j=1}^4 \lambda_j^3 [e^{\lambda_j l} A_{jn} - A_{j(n+1)}] &= \chi^* \sum_{j=1}^4 e^{\lambda_j l} A_{jn}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.2) \quad \chi^* = \chi \frac{\Omega^2}{\sqrt[4]{p^3 EI}}.$$

W powyższym układzie równań ciągłości, mamy cztery niewiadome A_{jn} , cztery niewiadome $A_{j(n+1)}$, będące funkcjami n . W równaniach tych występują ponadto pierwiastki λ_j oraz niewiadoma częstość drgań Ω , które na podstawie rozważań p. 1 można wyrazić przez prędkość U oraz swobodny parametr η . Pozostałe wielkości zależą od znanych parametrów konstrukcyjnych układu.

Rozwiązania układu równań ciągłości (3.1) poszukiwać będziemy w postaci

$$(3.3) \quad A_{jn} = \gamma^n A_j.$$

Podstawiając (3.3) do układu równań (3.1) otrzymamy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 [e^{\lambda_j t} - \gamma] A_j &= 0, & \sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 [e^{\lambda_j t} - \gamma] A_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 \lambda_j [e^{\lambda_j t} - \gamma] A_j &= 0, & \sum_{j=1}^4 \lambda_j^3 [e^{\lambda_j t} - \gamma] A_j - \chi^* \sum_{j=1}^4 e^{\lambda_j t} A_j &= 0. \end{aligned}$$

Przekształcimy otrzymany układ równań ciągłości za pomocą następujących podstawień:

$$(3.5) \quad A_j = \frac{1}{e^{\lambda_j t} - \gamma} B_j, \quad \mu_j = \frac{e^{\lambda_j t}}{e^{\lambda_j t} - \gamma}$$

do postaci

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 B_j &= 0, & \sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 B_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 \lambda_j B_j &= 0, & \sum_{j=1}^4 (\lambda_j^3 - \chi^* \mu_j) B_j &= 0. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań ciągłości jest układem jednorodnym względem niewiadomych B_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Układ posiada rozwiązania niezerowe, gdy następujący jego wyznacznik charakterystyczny jest równy zeru:

$$(3.7) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 - \chi^* \mu_1 & \lambda_2^3 - \chi^* \mu_2 & \lambda_3^3 - \chi^* \mu_3 & \lambda_4^3 - \chi^* \mu_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Składowe λ_j , μ_j , χ^* , ($j = 1, 2, 3, 4$) wyznacznika (3.7) są funkcjami poszukiwanej częstości Ω . Rozwiązanie równania otrzymanego po rozwinięciu wyznacznika pozwoli określić częstość Ω (za pośrednictwem uogólnionego parametru η). Rozwijając wyznacznik i stosując odpowiednie przekształcenia doprowadzamy równanie (3.7) do dogodnej dla dalszych obliczeń postaci

$$(3.8) \quad \mathcal{F}(\eta) = -\chi(\eta)^*.$$

Funkcja $\mathcal{F}_{(\eta)}$ posiada postać

$$(3.9) \quad \mathcal{F}_{(\eta)} = \frac{2\alpha\beta [(a+\beta)^2+4\nu^2] [(\alpha-\beta)^2+4\nu^2]}{\beta(4\nu^2-a^2+\beta^2) \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l - \cos(\nu l + \varrho)} + a(4\nu^2+a^2-\beta^2)} \times \\ \times \left[\frac{\operatorname{sh} \beta l}{\operatorname{ch} \beta l - \cos(\nu l - \varrho)} + 4\alpha\beta\nu \left[\frac{\sin(\nu l + \varrho)}{\operatorname{ch} \beta l - \cos(\nu l + \varrho)} + \frac{\sin(\nu l - \varrho)}{\operatorname{ch} \alpha l - \cos(\nu l - \varrho)} \right] \right].$$

Funkcja $\chi_{(\eta)}^*$ jest określona w sposób następujący: dla układu mas pojedynczych

$$(3.10) \quad -\chi_{(\eta)}^* = -\overline{\mathfrak{M}}\Omega^2 = -\frac{\mathfrak{M}^*}{\sqrt[4]{p^3 EI}} \Omega^2;$$

dla układu mas podwójnych

$$(3.11) \quad -\chi_{(\eta)}^* = -\frac{1}{\sqrt[4]{p^3 EI}} \left(\mathfrak{M}_1^* + \frac{R\mathfrak{M}_2^*}{R + \mathfrak{M}_2^*\Omega^2} \right) \Omega^2.$$

Wprowadzony we wzorze (3.9) parametr ϱ określa wartość własną γ :

$$(3.12) \quad \varrho = \frac{1}{i} \ln \gamma.$$

Wszystkie pozostałe parametry określone są za pomocą wzorów wyprowadzonych w poprzednich punktach. Równanie charakterystyczne (3.8) zawiera dwie niewiadome wielkości η i ϱ . Celem naszych rozważań jest obliczenie wielkości parametru η z równania (3.8), dlatego parametr ϱ musimy wyznaczyć na innej drodze.

3.2. Wyznaczenie parametru ϱ . Rozwiązania układu równań ciągłości (3.1) poszukiwaliśmy w postaci

$$(3.13) \quad A_{jn} = \gamma^n A_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

nie precyzując na razie wartości własnej γ . Wielkość ta weszła następnie do równania charakterystycznego (3.8) za pośrednictwem parametru ϱ (3.12).

Rozpatrując różne układy mas skupionych, poruszających się po sprężystym podłożu, podzielmy je na dwie grupy w zależności od ilości poruszających się mas:

- 1) układy, w których ilość poruszających się mas jest nieskończenie wielka,
- 2) układy, w których ilość poruszających się mas jest skończona.

Rozpatrzmy oddzielnie każdą z tych grup układów.

Układy o nieskończonej ilości mas. Funkcje określające siły wewnętrzne i przemieszczenia (1.13) i (2.7) zależą od stałych A_{jn} . Należy oczekiwać, że wielkości te są ograniczone dla dowolnej wartości numeru n . Wynika stąd warunek, że stałe powinny być również ograniczone przy dowolnie dużym n ($n \rightarrow \infty$).

Warunek ten może być spełniony [zgodnie z (3.3)] tylko wtedy, gdy moduł wartości własnej γ jest równy 1. Wartością własną γ może być zatem każda z liczb, której moduł jest równy 1. Z algebry wiadomo, że zbiorem takich liczb są pierwiastki równania podziału koła

$$(3.14) \quad \gamma^s - 1 = 0,$$

gdzie s oznacza dowolną liczbę naturalną.

Pierwiastki równania (3.14) są następujące:

$$(3.15) \quad \gamma_k = e^{i \frac{2\pi}{s} k} = \cos \frac{2\pi}{s} k + i \sin \frac{2\pi}{s} k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, s.$$

Z porównania wyrażeń (3.15) i (3.12) wynika, że

$$(3.16) \quad \varrho_k = \frac{2\pi}{s} k.$$

Otrzymamy w rezultacie powyższych rozważań zbiór wartości własnych γ_k i odpowiadających im wartości ϱ_k , posiadających prostą interpretację fizyczną i geometryczną. Interpretacja ta oparta jest na analizie wzoru

$$(3.17) \quad A_{kjn} = A_{kj} \gamma_k^n = A_{kj} \left(\cos \frac{2\pi k}{s} n + i \sin \frac{2\pi k}{s} n \right),$$

gdzie $j = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, \dots, s$ oraz $-\infty < n < \infty$ (liczby naturalne). Ze wzoru (3.17) widać, że stałe A_{jn} zmieniają się jako funkcje numeru segmentu n tak jak fale (oczywiście w sposób nieciągły). Ponieważ ugięcie belki sprężystej jest funkcją n [wzór (1.13)], zatem przyjęcie danej wartości własnej γ_k narzuca pewną postać drgań. Postać ta posiada charakter dyskretny, gdyż jest funkcją liczby naturalnej n . Numer n segmentu odgrywa rolę współrzędnej, liczba s rolę «długości fali», a liczba k — numeru «fali» (numer harmonicznej). Dla $k = 1$, otrzymamy falę podstawową o długości s — segmentów. Dla $k = 2$ otrzymamy falę o długości $s/2$ — segmentów itd. W zastosowaniach praktycznych najbardziej interesujące są fale najkrótsza i najdłuższa.

Fala najdłuższa odpowiada $s = \infty$, czyli $\gamma = 1$, $\varrho = 0$. Fala najkrótsza odpowiada $k/s = 1/2$, czyli $\gamma = -1$, $\varrho = \pi$. Każda z powyższych «fal» określa oczywiście nie jedną postać własną drgań, a pewien nieskończony zbiór postaci własnych drgań. Powyższe zilustrujemy na przykładzie «fal» odpowiadających $\gamma = 1$ i $\gamma = -1$.

Zbiór postaci drgań odpowiadających $\gamma = 1$, $\varrho = 0$. Ze wzoru (3.17) widać, że dla $\gamma = 1$ stałe A_{jn} są jednakowe we wszystkich segmentach. Wynika stąd od razu, że funkcje opisujące linię ugięcia belki sprężystej będą dla wszystkich segmentów jednakowe.

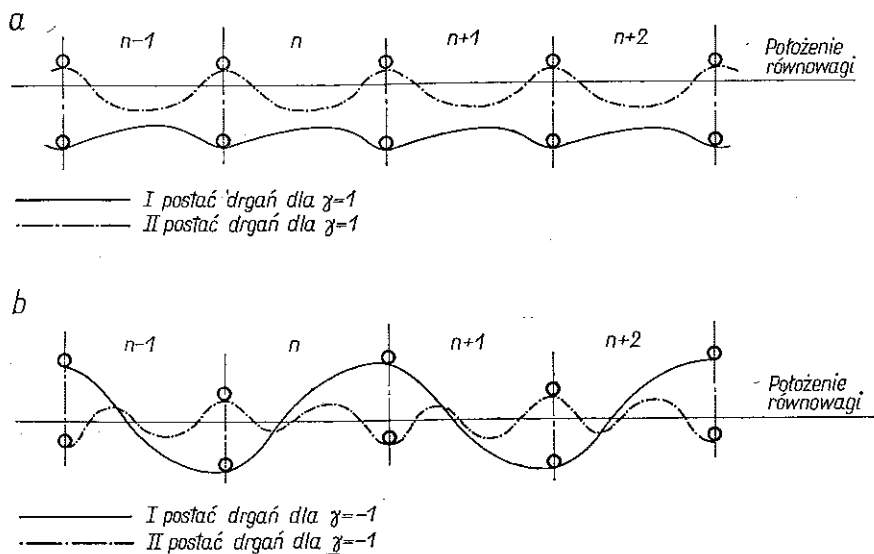
Zbiorem postaci własnych drgań odpowiadających $\gamma = 1$ będą zatem takie postacie drgań belki, które spełniają powyższy warunek. Ponieważ każdy z segmentów posiada nieskończenie wiele stopni swobody, postaci takich (w obrębie danego segmentu) będzie nieskończenie wiele. Na rysunku 7a przedstawiono poglądowo dwie postacie drgań odpowiadających $\gamma = 1$.

Nadmieniamy, że np. w kolejnictwie ten typ drgań własnych określa się nazwą «podskakiwania», a odpowiadające tym postaciom częstości własne drgań «częstościami podskakiwania». «Fala» tych postaci jest oczywiście nieskończenie długa.

Postacie drgań odpowiadających $\gamma = -1$, $\varrho = \pi$. Ze wzoru (3.17) widać, że dla $\gamma = -1$ stałe A_{jn} posiadają jednakowe wartości bezwzględne we wszystkich segmentach. Znaki stałych są dodatnie w segmentach parzystych i ujemne w segmentach

nieparzystych. Wnioskujemy stąd, że i ugięcia belki sprężystej posiadają identyczne kształty w każdym z segmentów, natomiast zwroty ugięć zmieniają się od segmentu do segmentu.

Postaciami własnych drgań, odpowiadających $\gamma = -1$, będą zatem postacie spełniające powyższy warunek. Układ ich będzie oczywiście nieskończony. Na rysunku 7b przedstawiono poglądowo dwie postacie drgań odpowiadających



Rys. 7

$\gamma = -1$. W kolejnictwie drgania o takiej postaci nazywają się «galopowaniem», a odpowiadające im częstości drgań «częstościami galopowania». «Fala» tych postaci jest oczywiście najkrótsza, gdyż posiada długość dwóch segmentów.

W dalszych rozważaniach szczegółowo rozpatrywane zostaną te właśnie postacie drgań, które odpowiadają $\gamma = 1$ i $\gamma = -1$. Grupy układów o skończonej liczbie mas szczegółowo rozpatrywać nie będziemy i ograniczymy się jedynie do kilku uwag dotyczących metody określania (dla tych układów) wartości własnych γ .

Układy o skończonej ilości mas. W przypadku gdy ilość poruszających się mas sprężystych jest skończona, warunek o ograniczoności stałych A_{jn} nie pozwala na wyznaczenie wartości własnych γ . Wartości własne należy wtedy wyznaczyć z dodatkowych warunków, mianowicie warunków brzegowych. Będą to oczywiście warunki, które musi spełniać pierwsza i ostatnia masa w poruszającym się szeregu. Z rozważań przeprowadzonych przez autora wynika, że warunki te są dostateczne dla ułożenia dodatkowego równania, które wraz z równaniem (3.8) tworzy układ pozwalający wyznaczyć efektywne wartości η i ρ (albo η i γ). Analiza układów o skończonej ilości mas będzie przedmiotem oddzielnej pracy. W dalszej części niniejszej pracy rozpatrzony zostanie jedynie układ z pojedynczą masą, do którego łatwo przejść z układów o nieskończonej ilości mas przez podstawienie $l \rightarrow \infty$ (gdzie l jest uogólnioną odległością między poszczególnymi masami). Rozpatrzmy

również przypadek graniczny mas rozłożonych w sposób ciągły przez przejście do granicy $l \rightarrow dl$.

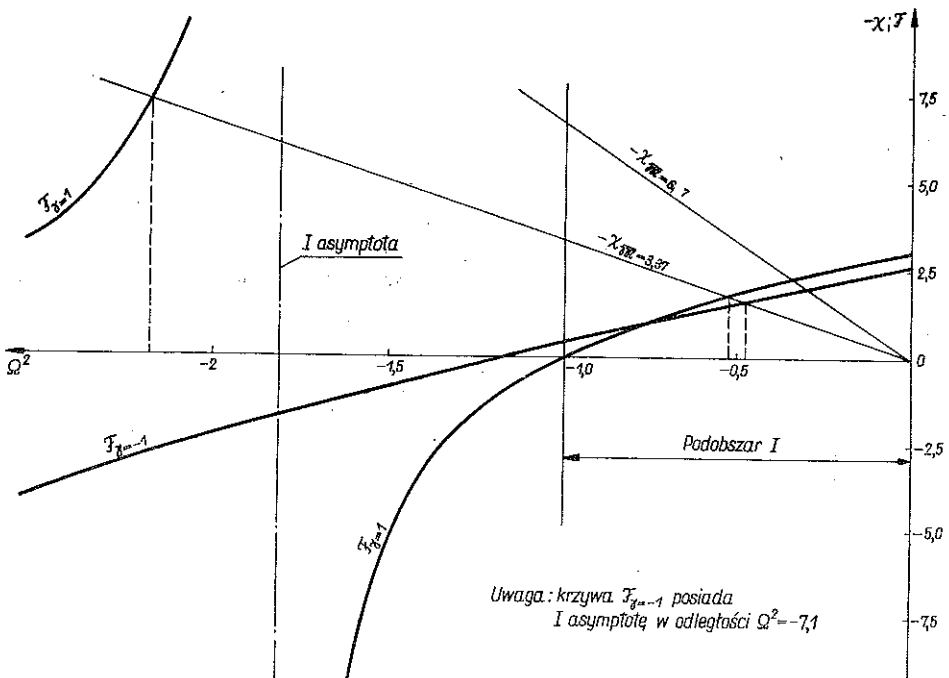
Obecnie przystąpimy do analizy drgań układów nieskończonych, opartej na rozwiązaniach równania charakterystycznego (3.8) dla wartości własnych $\gamma = 1$, ($\varrho = 0$) oraz $\gamma = -1$, ($\varrho = \pi$).

4. Analiza drgań układów nieskończonych

Rozwiązanie równania charakterystycznego (3.8) jest możliwe wyłącznie na drodze wykresalnej. W tym celu obliczamy wartości funkcji $\mathcal{F}(\eta)$, $-\chi(\eta)^*$ i $\Omega^2(\eta)$ dla szeregu parametrów η w zakresie od $\eta = 1$ do $\eta = 0$. Następnie przyporządkowujemy wartościom Ω^2 wartości funkcji \mathcal{F} i $-\chi^*$ oraz wykreślamy przebieg funkcji $\mathcal{F}(\Omega^2)$ i $-\chi(\Omega^2)^*$. Punkty przecięcia tych krzywych wyznaczają poszukiwane częstości drgań własnych układów Ω .

4.1. Omówienie wykresów. $\mathcal{F}(\Omega^2)$ i $-\chi(\Omega^2)^*$. Na rysunku 8 przedstawiono wykres funkcji $\mathcal{F}(\Omega^2)$ i $-\chi(\Omega^2)^*$ dla następujących danych:

$$U = 0, \quad l = 5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = -1, \quad \bar{m}_1 = 6,74, \quad \bar{m}_2 = 3,37$$



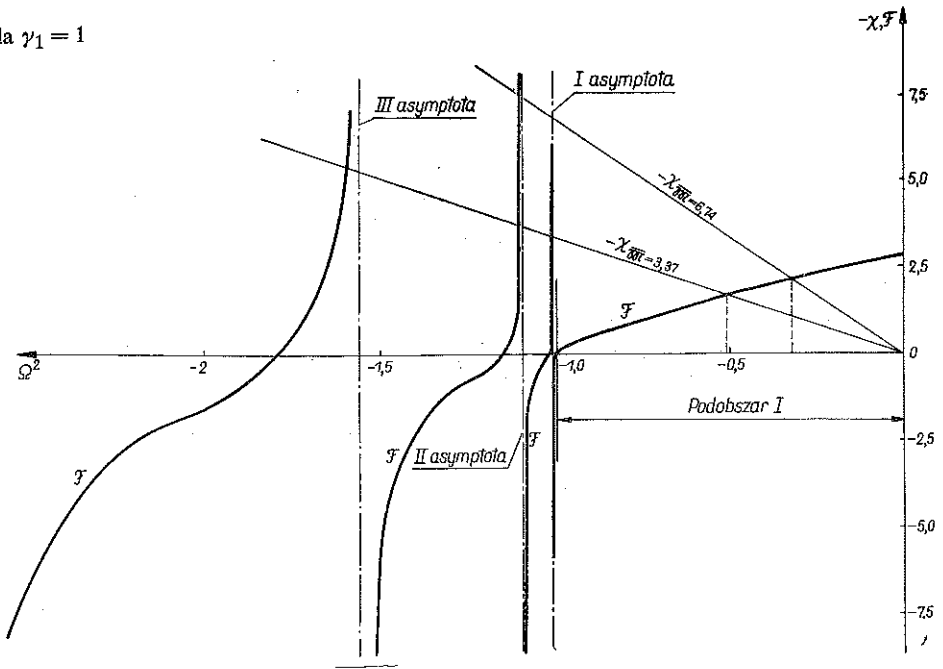
Rys. 8

(pojedynczy układ mas ruchomych rys. 1a). Z wykresu można ocenić wpływ wielkości mas skupionych na częstość drgań. Widać również, że dla danej wartości γ istnieje szereg częstości drgań, których postacie różnią się między sobą deformacją segmentu.

Na rysunkach 9 i 10 przedstawiono wykres funkcji $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ i $-\chi_{(\Omega^2)}^*$ dla następujących danych:

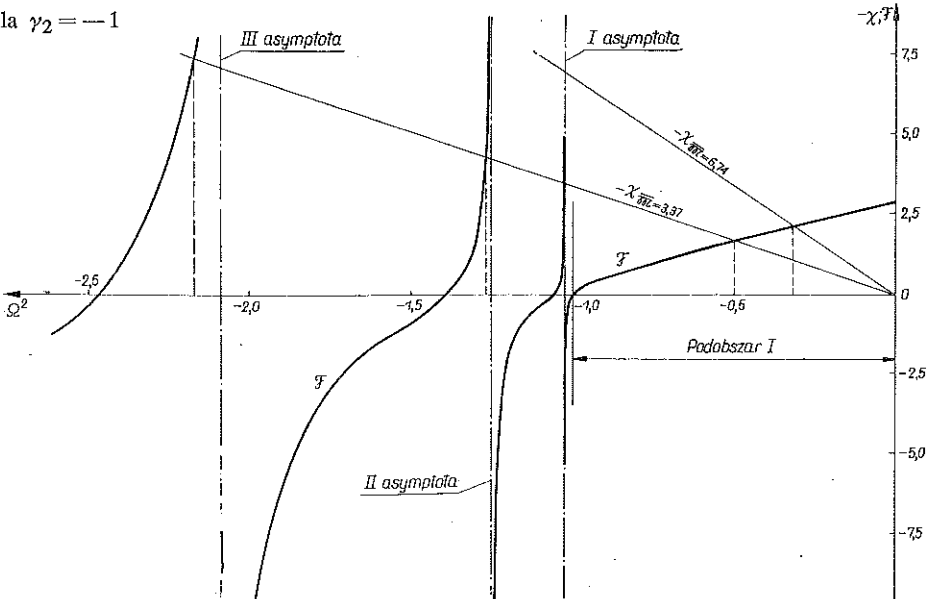
$$U = 0, \quad l = 20, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = -1, \quad \bar{m}_1 = 6,74, \quad \bar{m}_2 = 3,37$$

dla $\gamma_1 = 1$

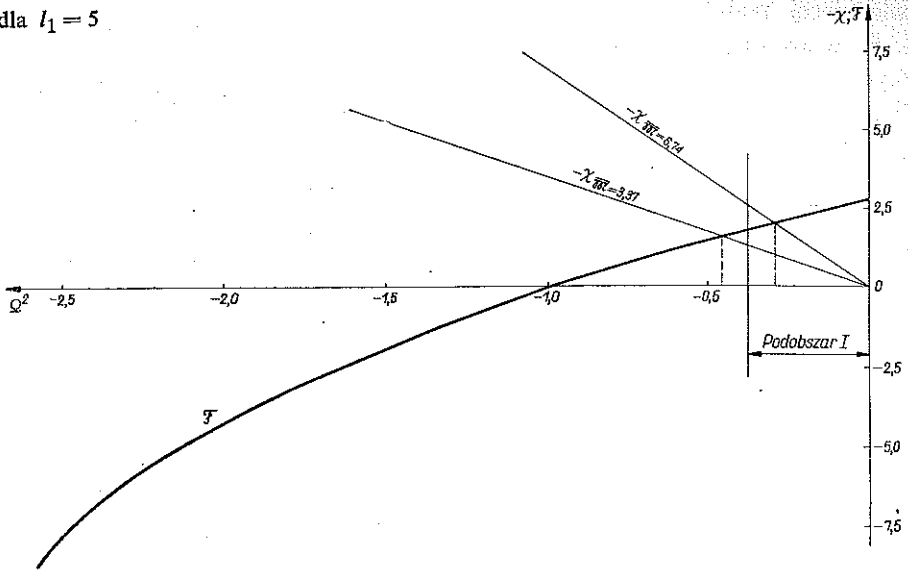


Rys. 9

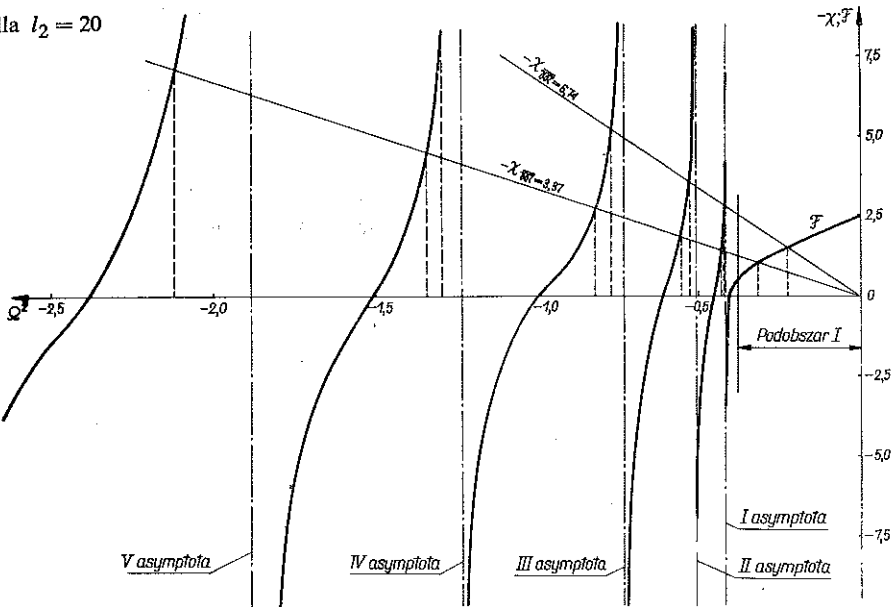
dla $\gamma_2 = -1$



Rys. 10

dla $l_1 = 5$ 

Rys. 11

dla $l_2 = 20$ 

Rys. 12

(układ mas ruchomych — pojedynczy, rys. 1a). Z wykresów można ocenić wpływ wielkości mas skupionych na częstości drgań. Porównując powyższe wykresy z rys. 8 można ocenić wpływ rozstawienia mas I na częstości drgań własnych układu. Zwraca uwagę zagęszczenie asymptot oraz częstości drgań w części wykresu od-

powiadającej podobszarowi II pasma drgań harmoniczných. Przy omawianiu rys. 5 zwracaliśmy uwagę, że w podobszarze tym 2 spośród pierwiastków λ_j (od których zależy postać drgań), nie posiadają tłumienia ze wzrostem współrzędnej ζ .

Na rysunkach 11 i 12 przedstawiono wykresy funkcji $\mathcal{F}_{(\Omega)}$ i $\chi_{(\Omega)}^*$ dla następujących danych:

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad l_1 = 5, \quad l_2 = 20, \quad \gamma_1 = 1, \quad \bar{\mathfrak{M}}_1 = 6,74, \quad \bar{\mathfrak{M}}_2 = 3,37$$

(układ mas ruchomych — pojedynczy, rys. 1a). Porównując powyższe wykresy z rys. 8, 9, 10 można ocenić wpływ różnych parametrów, a szczególnie prędkości uogólnionej U na częstości drgań własnych układu. Zwraca uwagę dalsze zagęszczenie asymptot oraz częstości drgań w części wykresu odpowiadającej podobszarowi II pasma drgań harmoniczných. Zagęszczenie to wzrasta wyraźnie ze wzrostem U i l . Wzrost prędkości powoduje zmniejszenie się części wykresu odpowiadającej podobszarowi I, co jest zgodne z interpretacją rys. 5.

Konstruując powyższe wykresy posługiwaliśmy się uogólnionymi parametrami U , Ω , l i $\bar{\mathfrak{M}}$, nadając im wartości liczbowe. Obecnie rozpatrzmy konkretny przykład liczbowy, który pozwoli nam ocenić wielkość tych parametrów w odniesieniu do znanych parametrów technicznych.

Przykład. Po nieskończonej dłuższej szynie kolejowej leżącej na sprężystym torowisku poruszają się w odstępach L pojedyncze masy skupione \mathfrak{M} . Przyjmujemy dane następujące: sztywność giętna szyny $EI = 3,6 \cdot 10^9$ kG/cm², zredukowana masa jednostkowa szyny i torowiska $m = 3,12 \cdot 10^3$ kG sek.²/cm², współczynnik sprężystości torowiska $k = 7 \cdot 10^2$ kG/cm², szybkość mas skupionych $V = 1,297 \cdot 10^4$ cm/sek., wielkość pojedynczej masy skupionej $\mathfrak{M} = 1$ kG sek.²/cm, oraz odległość między masami skupionymi $L = 952$ cm.

Współczynniki p i q wynoszą odpowiednio

$$p = \frac{k}{EI} = 1,95 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{cm}^4}, \quad q = \frac{m}{EI} = 0,866 \cdot 10^{-12} \frac{\text{sek.}^2}{\text{cm}^4}.$$

Uogólniona prędkość U i uogólniona odległość między masami l

$$U = V \sqrt[4]{\frac{q^2}{p}} \approx \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad l = L \sqrt[4]{p} \approx 20.$$

Uogólniona masa skupiona

$$\bar{\mathfrak{M}}^* = \mathfrak{M} \frac{p}{q} = 2,25 \cdot 10^5 \frac{\text{kG}}{\text{cm}}, \quad \bar{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}^*}{\sqrt[4]{p^3 EI}} = 6,74.$$

Dla obliczonych powyżej parametrów z wykresu rys. 12 odczytujemy kwadraty częstości drgań własnych odpowiadające $\gamma = 1$. Widmo pierwszych drgań jest następujące:

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= -0,228, & \Omega_2^2 &= -0,423, & \Omega_3^2 &= -0,530, & \Omega_4^2 &= -0,772, \\ \Omega_1 &= 0,477 i, & \Omega_2 &= 0,650 i, & \Omega_3 &= 0,728 i, & \Omega_4 &= 0,878 i. \end{aligned}$$

Są to częstości drgań względem uogólnionego czasu τ . Częstości ω drgań względem czasu t wynoszą odpowiednio

$$\Omega\tau = \Omega \sqrt{\frac{p}{q}} t, \quad \omega = \Omega \sqrt{\frac{p}{q}},$$

$$\omega_1 = 226 \frac{1}{\text{sek.}}, \quad \omega_2 = 308 \frac{1}{\text{sek.}}, \quad \omega_3 = 345 \frac{1}{\text{sek.}}, \quad \omega_4 = 416 \frac{1}{\text{sek.}}$$

4.2. Przypadki graniczne. Analiza drgań mas skupionych, poruszających się w równych skończonych odległościach po sprężystym podłożu, jest bardzo złożona i wymaga wielu obliczeń. Powodem tego jest ciągle-dyskretny charakter otrzymanych rozwiązań. Należy oczekiwać znacznego uproszczenia otrzymanych funkcji w dwóch przypadkach granicznych: 1) gdy odległość l między masami skupionymi dąży do nieskończoności i 2) gdy odległość l dąży do zera. Rozważmy powyższe przypadki.

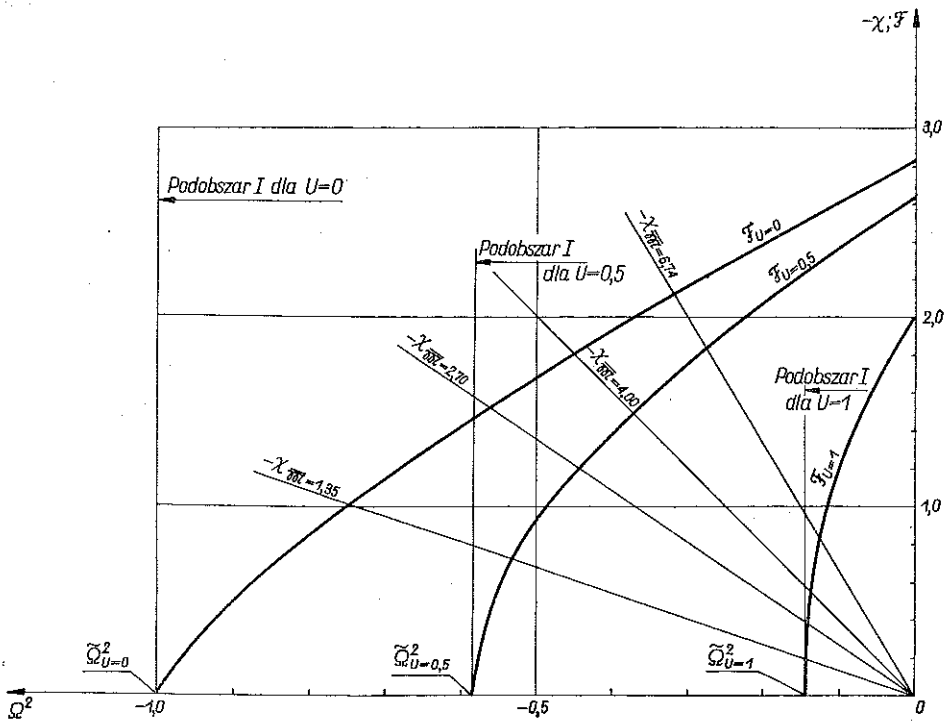
Przypadek $l \rightarrow \infty$. Przypadek ten można utożsamiać z toceniem się pojedynczej masy skupionej (lub pojedynczego układu mas) po belce.

Podstawiając $l = \infty$ w równanie charakterystyczne otrzymamy jego postać szczególną

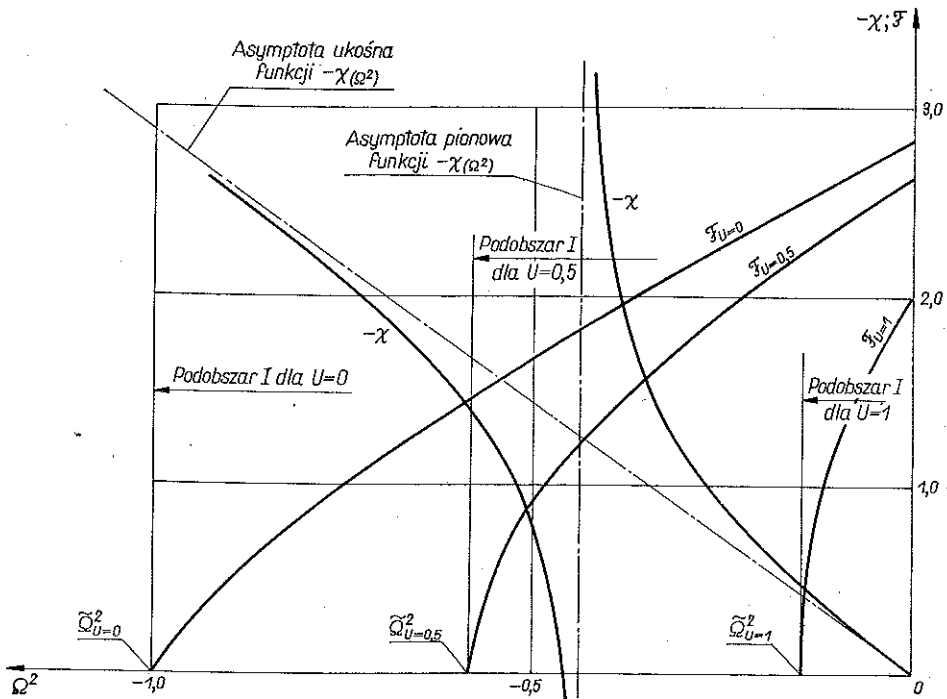
$$(4.1) \quad 2\alpha\beta \frac{4\nu^2 + (\alpha + \beta)^2}{\alpha + \beta} = -\chi^*, \quad \mathcal{F}_{(\Omega^2)} = 2\alpha\beta \frac{4\nu^2 + (\alpha + \beta)^2}{\alpha + \beta}.$$

Otrzymane równanie charakteryzuje się tym, że nie występuje w nim parametr ϱ . Analiza tego równania jest znacznie łatwiejsza. Na rysunku 13 pokazano wykres funkcji $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ i $-\chi_{(\Omega^2)}^*$ dla kilku wariantów parametrów U i \overline{M} w przypadku masy pojedynczej. Wykresy funkcji $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ są jednoznaczne tylko w granicach podobszaru I. W podobszarach II i III funkcje $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ są nieskończenie wieloznaczne i przechodzą przez każdy punkt płaszczyzny $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}, \Omega^2$. Wynika to z analizy funkcji $\mathcal{F}_{(\eta)}$ (wzór (3.9)) dla przejścia granicznego $l \rightarrow \infty$. W podobszarach II i III przebieg funkcji $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ i $-\chi_{(\Omega^2)}^*$ zachodzi dla każdej wartości $\Omega^2 < \overline{\Omega}^2$, czyli każda częstość $\Omega^2 < \overline{\Omega}^2$ jest częstością drgań własnych układu. Zatem dla $l = \infty$ podobszary II i III można nazwać podobszarami rezonansowymi.

Na rysunku 13 nie pokazano wykresu funkcji $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ dla $U = \sqrt{2}$, ponieważ funkcja ta w podobszarze I sprowadza się do punktu leżącego w początku układu. Dla tej prędkości zatem wszystkie częstości $\Omega^2 \leq 0$ są częstościami własnymi. Wynika to z faktu, że dla $U = \sqrt{2}$ funkcja $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ w całości leży w podobszarze II. Analiza drgań układu podwójnego (dla $l = \infty$) została przedstawiona na rys. 14. Funkcje $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ są oczywiście takie same jak na rys. 13, natomiast wykres funkcji $-\chi_{(\Omega^2)}^*$ jest linią krzywą, co wynika ze wzoru (3.11). Z rysunku widać, że w zależności od prędkości U krzywe $\mathcal{F}_{(\Omega^2)}$ i $-\chi_{(\Omega^2)}^*$ mogą się przecinać w granicach podobszaru I w jednym albo w dwóch punktach. Asymptota pionowa krzywej $-\chi_{(\Omega^2)}^*$ może również się znajdować albo w podobszarze I, albo w podobszarze II. W tym przypadku zachodzi możliwość $\Delta Q \rightarrow \infty$.



Rys. 13



Rys. 14

Fakt, że dla $l = \infty$ każda częstość leżąca w podobszarze II jest częstością drgań układu, można w sposób prosty wyjaśnić. Na rysunku 15 pokazano pojedynczy układ mas wraz z dwoma odcinkami nieskończonej belki sprężystej. Dla układu

$$W_z = (B_1 e^{\lambda_1 z} + B_2 e^{\lambda_2 z} + B_3 e^{\lambda_3 z} + B_4 e^{\lambda_4 z}) e^{i\Omega t}$$

$$W_z = (A_1 e^{-\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_2 z} + A_3 e^{-\lambda_3 z} + A_4 e^{-\lambda_4 z}) e^{i\Omega t}$$

$$\lambda_1 = i\nu + \alpha, \quad \lambda_2 = i\nu - \alpha, \quad \lambda_3 = -i\nu - \beta, \quad \lambda_4 = -i\nu + \beta$$

W podobszarze I: $B_2 - B_3 = A_1 - A_4 = 0$
W podobszarze II: $B_2 = A_1 = 0$

Rys. 15

tego możemy napisać cztery równania ciągłości w punkcie $\zeta = 0$. Do dyspozycji mamy osiem funkcji z ośmioma stałymi. W podobszarze I cztery stałe muszą być tożsamościowo równe zero, ponieważ wartości α i β są rzeczywiste. Pozostają nam zatem cztery stałe, które mogą spełnić cztery równania ciągłości tylko dla określonych wartości Ω . W podobszarze II β staje się urojone. Dlatego do dyspozycji mamy aż sześć stałych. Jest zatem oczywiste, że przy sześciu stałych można spełnić cztery równania ciągłości dla dowolnej wartości Ω , czyli częstość drgań układu może być dowolna. Wniosek taki jest również zgodny z analizą przeprowadzoną dla skończonych wartości l . Z rysunku 8–12 można było zaobserwować zagęszczenie się asymptot ze wzrostem l . Dla $l \rightarrow \infty$ odległość między asymptotami powinna dążyć do zera.

Na zakończenie należy dodać, że równanie charakterystyczne (4.1) może służyć do przybliżonych obliczeń częstości drgań, gdy odległość między masami jest dostatecznie duża ($l > 10$).

Przypadek $l \rightarrow 0$. Jeżeli odległości pomiędzy masami zmniejszają się przy jednoczesnym proporcjonalnym zmniejszeniu się samych mas, to przechodząc do granicy możemy napisać

$$(4.2) \quad l \rightarrow dl, \quad \chi^* = \chi_0 \Omega^2 dl, \quad k = iQ/dl,$$

gdzie dla układu mas pojedynczych

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{p^3 EI} \mathfrak{M}^*},$$

a dla układu mas podwójnych

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{p^3 EI} \left(\mathfrak{M}_1^* + \frac{r \mathfrak{M}_2^*}{r + \mathfrak{M}_2^* \Omega^2} \right)}.$$

\mathfrak{M}^* , \mathfrak{M}_1^* i \mathfrak{M}_2^* są to jednostkowe masy ruchome a r jest współczynnikiem sprężystości mas ruchomych.

Podstawiając (4.2) do równania charakterystycznego (3.8) otrzymamy po odpowiednich przekształceniach nowe równanie charakterystyczne

$$(4.3) \quad k^4 + Uk^2 - 2U\Omega k + 1 + (1 + \chi_0)\Omega^2 = 0.$$

Analizę powyższego równania przeprowadzimy dla układu mas pojedynczych rozłożonych w sposób ciągły. Wtedy

$$\chi_0 \neq \chi_0(\Omega^2).$$

Szybkość dywergencji określimy z warunku $\Omega^2 = 0$. Po podstawieniu $\Omega^2 = 0$ do (4.3) otrzymamy

$$k^4 + U^2 k^2 + 1 = 0,$$

stąd

$$U^2 = -\left(\frac{1}{k^2} + k^2\right).$$

Minimalna szybkość dywergencji odpowiada $k^2 = -1$ i wynosi $U_{\min} = \sqrt{2}$. Szybkość flatteru obliczymy z warunku granicznego dla urojonych częstości drgań $\Omega^* = i\Omega$. Wyznaczając z równania (4.3) częstość Ω^* otrzymamy wzór

$$(4.4) \quad \Omega_{1,2}^* = \frac{Uki}{1 + \chi_0} \pm \sqrt{-\frac{U^2 k^2}{(1 + \chi_0)^2} + (k^4 + U^2 k^2 + 1) \frac{1}{1 + \chi_0}}.$$

Warunek graniczny daje wyrażenie na szybkość flatteru

$$(4.5) \quad U^2 = -\frac{1 + \chi_0}{\chi_0} \left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Minimalna szybkość flatteru odpowiada $k^2 = -1$ i wynosi

$$U_{\min} = \sqrt{\frac{1 + \chi_0}{\chi_0}} \sqrt{2}.$$

Widać więc, że szybkość, przy której wystąpi zjawisko dywergencji, jest zatem mniejsza od szybkości, przy której występuje zjawisko flatteru.

Tymi rozważaniami kończymy analizę zjawisk dynamicznych występujących podczas poruszania się układu mas skupionych po belce na sprężystym podłożu. W rozważaniach tych ograniczyliśmy się do badania widm częstości własnych, odpowiadających różnym postaciom drgań układu. Podstawiając otrzymane częstości własne Ω do układu równań ciągłości (3.4) można określić stałe A_j odpowiadające tym częstościom, a następnie przemieszczenia oraz siły wewnętrzne w układzie.

Ramy niniejszej pracy nie pozwalają jednak na wykonanie tych złożonych obliczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. S. KALISKI, *Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu*, Mech. Teoret. i Stosow., 1, 3 (1964).
2. В. Л. Бидерман, *Колебания упругих систем с распределенными массами*, Основы современных металлов расчета на прочность в машиностроении, МАШГИЗ 1952.

3. Р. Д. Степанов, *О флаттере цилиндрических оболочек и панелей движущихся в потоке газа*, Прикл. Маш. Мех., 5, 20 (1957).
4. А. А. Мовчан, *Об устойчивости панели движущейся в газе*, Прикл. Маш. Мех., 2, 21 (1957).
5. В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Г.И.Ф.М.Л., 1961.

Резюме

ДИНАМИКА СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС ДВИЖУЩИХСЯ ПО БАЛКЕ,
ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматриваются вертикальные колебания различных систем сосредоточенных масс быстропередвигающихся по балке, лежащей на упругом основании (рис. 1). Выводятся уравнения движения и формулируются краевые условия. Эти уравнения дают возможность оценить влияние разных технических параметров на частоту собственных колебаний. Определяется также область гармонических колебаний. Работа иллюстрируется рядом диаграмм, изготовленных в безразмерных координатных системах. Полученные результаты могут найти применение в железнодорожном деле.

Summary

DYNAMIC BEHAVIOUR OF CONCENTRATED MASSES MOVING ALONG A BEAM
RESTING ON AN ELASTIC FOUNDATION

The present paper is concerned with the problem of vertical vibration of various sets of concentrated masses moving fast along a beam resting on an elastic foundation (Fig. 1). The equations of motion are derived and the boundary conditions stated. The solutions obtained enable us to estimate the influence of various parameters on the frequencies of natural vibration. The region of harmonic vibration is determined. The paper is illustrated by a number of diagrams in dimensionless coordinates. The results may find application in railway engineering.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1964 r.
