

ZAGADNIENIE LEPKOSPREŻYSTEGO PRĘTA KOŁOWEGO  
NA PODŁOŻU LEPKOSPREŻYSTYM

BOGDAN SKALMIERSKI (GLIWICE)

W pracy omówiono problem zginania słabo zakrzywionego lepkospreżystego pręta kołowego o przekroju zwartym, na podłożu lepkospreżystym. Założono, że obciążenie stanowią wyłącznie siły promieniowe.

Zagadnienie rozpatrzono w dwóch aspektach: jako quasi-statyczne i jako dynamiczne, tzn. z uwzględnieniem sił bezwładności. Rozwiązanie otrzymano opierając się na analogii sprężysto-lepkospreżystej [1]. Wyniki otrzymano na podstawie odwrotnej transformacji Laplace'a i Fouriera.

W zakończeniu zbadano zmienność ugięć w czasie pod wpływem wędrującej siły promieniowej. Do rozważań szczegółowych przyjęto model Voigta.

1. Zginanie pręta kołowego

Punktem wyjścia rozważań jest równanie różniczkowe równowagi zginanego pręta [2]

$$(1.1) \quad \frac{EI}{R^4} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right)^2 W(\varphi, t) = \frac{d^2 q^*(\varphi, t)}{d\varphi^2},$$

gdzie  $E$  oznacza moduł sprężystości materiału pręta,  $I$  moment bezwładności przekroju poprzecznego,  $R$  promień krzywizny pierwotnej pręta oraz  $W$  ugięcie mierzone na zewnątrz od pierwotnej osi pręta.

Traktując problem jako quasi-statyczny określamy obciążenie następująco:

$$(1.2) \quad q^*(\varphi, t) = q(\varphi, t) - kW(\varphi, t),$$

gdzie  $k$  jest stałą sprężystości podłoża, na którym spoczywa pręt. Wstawiając (1.2) do (1.1), wykonując transformację Laplace'a oraz korzystając z analogii sprężysto-lepkospreżystej, napiszemy transformatę równania dla pręta lepkospreżystego na podłożu lepkospreżystym w następującej postaci:

$$(1.3) \quad \frac{\bar{E}(p)I}{R^4} \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{d^2}{dp^2} + 1 \right)^2 \bar{W}(\varphi, p) + \bar{k}(p) \frac{d^2 \bar{W}(\varphi, p)}{dp^2} = \frac{d^2 \bar{q}(\varphi, p)}{dp^2}.$$

Z kolei wykonamy na równaniu (1.3) skończoną transformację Fouriera. Pomińmy dodatkowe wyrazy transformaty. Pomińnięcie to jest uzasadnione tym, że rozpatrywać będziemy tylko dwa przypadki zamocowania końców pręta: zamo-

cowanie przegubowe (transformacja sinusowa) i sztywne z możliwością przesunięcia bez obrotu (transformacja kosinusowa); założmy przy tym nieściśliwość osi pręta  $\varepsilon = 0$  (por. [2], 22).

Po dokonaniu kolejnych transformacji równanie różniczkowe (1.3) przechodzi w równanie algebraiczne

$$(1.4) \quad \frac{\bar{E}(p) I}{R^4} \bar{W}_n(p) (\mu_n^2 - 1)^2 + \bar{k}(p) \bar{W}_n(p) = \bar{q}_n(p),$$

gdzie  $\mu_n$  są wartościami własnymi zagadnienia brzegowego. Znajdziemy

$$(1.5) \quad \bar{W}_n(p) = \frac{\bar{q}_n(p)}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p) I}{R^4} (\mu_n^2 - 1)^2}.$$

Dokonując odwrotnej transformacji Fouriera otrzymamy

$$(1.6) \quad \bar{W}(\varphi, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \bar{q}_n(p) F_n(\varphi)}{\bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p) I}{R^4} (\mu_n^2 - 1)^2},$$

gdzie

$$F_n(\varphi) = \sin \mu_n \varphi \quad \text{albo} \quad \cos \mu_n \varphi,$$

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jeśli } n = 0; \\ 1, & \text{jeśli } n \neq 0. \end{cases}$$

Pozostaje obecnie do wyznaczenia funkcja  $W(\varphi, t)$ . W tym celu wykonujemy na (1.6) odwrotną transformację Laplace'a przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie. Oznaczając przez

$$(1.7) \quad G_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \bar{k}(p) + \frac{\bar{E}(p) I}{R^4} (\mu_n^2 - 1)^2 \right]^{-1} \right\}$$

otrzymamy następujący wynik po dokonaniu wspomnianej odwrotnej transformacji:

$$(1.8) \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n F_n(\varphi) \int_0^t G_n(t - \tau) q_n(\tau) d\tau.$$

Rozwiązanie (1.8) można dostosować do różnych modeli reologicznych podłoża i pręta, jak również do różnych przypadków zamocowania końców pręta. W przypadku przegubowego zamocowania końców pręta

$$(1.9) \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}, \quad F_n(\varphi) = \sin \frac{n\pi}{\varphi_0} \varphi,$$

natomiast

$$(1.10) \quad q_n(t) = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} q(u, t) \sin \frac{n\pi}{\varphi_0} u \, du.$$

Podstawiając (1.9) i (1.10) do (1.8) znajdziemy

$$(1.11) \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\varphi_0} \sin \frac{n\pi}{\varphi_0} \varphi \int_0^t G_n(t - \tau) \left[ \int_0^{\varphi_0} q(u, \tau) \sin \frac{n\pi}{\varphi_0} u \, du \right] d\tau.$$

W przypadku utwierdzenia z możliwością promieniowego przesunięcia bez obrotu należy przyjąć

$$(1.12) \quad F_n(\varphi) = \cos \frac{n\pi}{\varphi_0} \varphi$$

oraz

$$(1.13) \quad q_n(t) = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} q(u, t) \cos \frac{n\pi}{\varphi_0} u \, du,$$

co daje

$$(1.14) \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\lambda_n}{\varphi_0} \cos \frac{n\pi}{\varphi_0} \varphi \int_0^t G_n(t - \tau) \left[ \int_0^{\varphi_0} q(u, \tau) \cos \frac{n\pi}{\varphi_0} u \, du \right] d\tau.$$

Przyjmując  $\varphi_0 = \pi$  mamy przypadek półpierścienia. Rozwiązanie dla półpierścienia jest zarazem rozwiązaniem dla pełnego pierścienia, gdy funkcja obciążeń promieniowych jest parzystą względem argumentu  $\varphi$  [równanie (1.14)].

Ażeby uwolnić się od tego ograniczenia dla pręta zamkniętego, obciążymy go w punkcie  $\varphi = \pi$  siłą  $P = 1$ . Obciążenie przedstawimy za pośrednictwem funkcji Diraca:

$$(1.15) \quad q(u, \tau) = \frac{1}{2R} \delta(u - \pi) \delta(t - \tau).$$

Tak obliczone przemieszczenie  $W(\varphi, t)$  dla od różnienia będziemy oznaczali przez

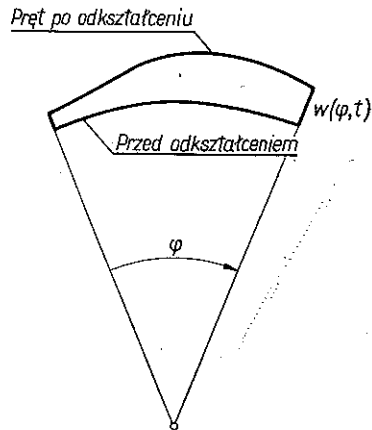
$$(1.16) \quad W^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n (-1)^n}{\pi R} \cos n\varphi G_n(t - \tau).$$

Przenosząc siłę  $P = 1$  z położenia  $\varphi = \pi$  do położenia określonego współrzędną  $\psi$  (rys. 2) oraz zważywszy, że

$$\cos n(\pi + \varphi - \psi) = \cos n(-\pi + \varphi - \psi) = (-1)^n \cos n(\varphi - \psi),$$

wyznaczamy na podstawie (1.16) funkcję wpływu:

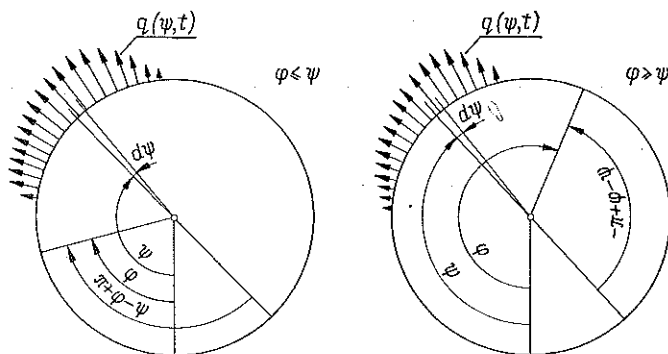
$$(1.17) \quad W^{(1)}(\psi, \tau, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\pi R} \cos n(\varphi - \psi) G_n(t - \tau).$$



Rys. 1

Mając wyznaczoną funkcję wpływu można dla dowolnego obciążenia  $q(\psi, t)$  określić ugięcie na podstawie następującej formuły:

$$(1.18) \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\pi} \int_0^t \int_0^{\infty} q(\psi, \tau) G_n(t - \tau) \cos n(\varphi - \psi) d\psi d\tau.$$



Rys. 2

Powyższy wynik jest ogólnym rozwiązaniem dla pręta lepkosprężystego zamkniętego.

## 2. Przypadek $\bar{k}(p) = \alpha \bar{E}(p)$

Jeżeli rozważany pręt spoczywa na belkach ułożonych wzdłuż tworzących walca lub na prętach ułożonych promieniowo, lub wreszcie na tarczy nieściśliwej, to zachodzi związek  $\bar{k}(p) = \alpha \bar{E}(p)$ , gdzie  $\alpha = \text{const}$ . Zakłada się, że połączenie pręta ze wspomnianymi elementami jest takie, że przenosi tylko obciążenia promieniowe. Przypadek współpracy z tarczą jest oczywiście pewnym uproszczeniem technicznym. Przy takim założeniu na podstawie (1.7) otrzymujemy

$$(2.1) \quad G_n(t) = \frac{1}{E_0 \left[ \alpha + \frac{I}{R^4} (n^2 - 1)^2 \right]} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E_0}{\bar{E}(p)} \right\}.$$

Zgodnie z [1], s. 67 i 68, dla modelu Voigta przy uwzględnieniu warunku nieściśliwości

$$\frac{E_0}{\bar{E}(p)} = \frac{2}{3} (1 + \nu_0) \frac{1}{1 + \lambda p},$$

gdzie  $\nu_0 = 1/2$  oraz  $\lambda$  oznacza czas relaksacji.

Wykonując odwrotną transformację, otrzymamy

$$(2.2) \quad G_n(t) = \frac{e^{-t/\lambda}}{\lambda E_0 \left[ \alpha + \frac{I}{R^4} (n^2 - 1)^2 \right]}.$$

Wstawiając (2.2) do (1.18) dostajemy ogólne rozwiązanie w przypadku modelu Voigta:

$$(2.3) \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\pi E_0 \left[ \alpha + \frac{I}{R^4} (n^2 - 1)^2 \right]} \int_0^t \int_0^{\infty} q(\psi, \tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \cos n(\varphi - \psi) d\psi d\tau.$$

### 3. Przypadek wędrującej siły promieniowej

Rozpatrzmy przypadek, gdy siła  $P_0$  wędruje z prędkością  $V$  po obwodzie koła będącego osią pręta. Taki stan obciążenia jest często realizowany w pracy wszelkiego rodzaju kół pędnych. Zadanie sprowadza się do znalezienia całki zawartej w (2.3) przy przyjęciu

$$(3.1) \quad q(\psi, \tau) = \frac{P_0}{R} \delta(\psi - \omega\tau),$$

gdzie  $\omega = V/R$ . Wstawiając (3.1) do (2.3) otrzymamy

$$(3.2) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi \lambda R E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha + \frac{I}{R^4} (n^2 - 1)^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \cos n(\varphi - \omega\tau) d\tau.$$

Obliczając całkę dostajemy wynik dla tego szczególnego przypadku obciążenia:

$$(3.3) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi R E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha + \frac{I}{R^4} (n^2 - 1)^2} \frac{\lambda \omega n}{\lambda^2 \omega^2 n^2 + 1} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\lambda \omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-t/\lambda} \left( \frac{1}{\lambda \omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right\}.$$

Założmy, że  $I/R^4 = \alpha$ ; wtedy wielkość bezwymiarowa przyjęta do obliczeń wyniesie

$$\beta(\lambda, \omega, \varphi, t) = \frac{\alpha \pi R E_0}{P_0} W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{1 + (n^2 - 1)^2} \frac{\lambda \omega n}{(\lambda \omega n)^2 + 1} \times \\ \times \left[ \frac{1}{\lambda \omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-t/\lambda} \left( \frac{1}{\lambda \omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right].$$

W przykładzie obliczono wartości  $\beta(\lambda, \omega, \varphi, t)$  dla  $\varphi = 0$ ,  $\lambda = 0,5$  sek. i  $\lambda = 1$  sek. oraz  $\omega = 1$  sek.<sup>-1</sup>,  $\omega = 2$  sek.<sup>-1</sup>,  $\omega = 3$  sek.<sup>-1</sup> dla czasów od 0 do  $6\pi$  sek., co  $0,2\pi$  sek. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

$t/\pi$	$\lambda = 0,5 \text{ sek.}$			$\lambda = 1 \text{ sek.}$		
	$\omega=1 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=2 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=3 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=1 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=2 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=3 \text{ sek.}^{-1}$
0,0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,5450	0,4564	0,2728	0,5244	0,4853	0,3633
0,4	0,3470	-0,2229	-0,5461	0,4564	0,1068	-0,1567
0,6	-0,0324	-0,7737	-0,0397	0,1331	-0,3695	-0,0131
0,8	-0,5231	-0,3715	0,5273	-0,2229	-0,2962	0,3885
1,0	-0,8744	0,4850	-0,3155	-0,5920	0,2224	-0,0448
1,2	-0,9322	0,6888	-0,3491	-0,7737	0,4627	-0,2092
1,4	-0,6611	-0,1258	0,5509	-0,6917	0,0636	0,3115
1,6	-0,1556	-0,7086	-0,0058	-0,3715	-0,3868	0,1106
1,8	0,3636	-0,3279	-0,5356	0,0341	-0,3104	-0,2914
2,0	0,8445	0,5168	0,3172	0,4850	0,2122	0,1228
2,2	0,9435	0,6301	0,3173	0,7168	0,4543	0,2590
2,4	0,6116	-0,1127	-0,5207	0,6088	0,0568	-0,2436
2,6	0,0601	-0,6998	-0,0227	0,2613	-0,3932	-0,0843
2,8	-0,4141	-0,3219	0,5408	-0,1258	-0,3156	0,3314
3,0	-0,8014	0,5211	-0,3078	-0,5124	0,2085	-0,0925
3,2	-0,8832	0,6330	-0,3440	-0,7086	0,4513	-0,2483
3,4	-0,6282	-0,1109	0,5550	-0,6384	0,0542	0,2801
3,6	-0,1336	-0,6986	-0,0031	-0,3279	-0,3956	0,0849
3,8	0,3797	-0,3211	-0,5341	0,0727	-0,3175	-0,3129
4,0	0,8554	0,5217	0,3184	0,5168	0,2071	0,1056
4,2	0,9508	0,6333	0,3181	0,7429	0,4501	0,2449
4,4	0,6165	-0,1107	-0,5202	0,6301	0,0533	-0,2554
4,6	0,0633	-0,6984	-0,0224	0,2786	-0,3964	-0,0939
4,8	-0,4121	-0,3210	0,5411	-0,1127	-0,3182	0,3236
5,0	-0,8000	0,5218	-0,3077	-0,5017	0,2066	-0,0990
5,2	-0,8823	0,6334	-0,3439	-0,6998	0,4497	-0,2536
5,4	-0,6276	-0,1106	0,5550	-0,6312	0,0530	0,2759
5,6	-0,1332	-0,6984	-0,0031	-0,3219	-0,3967	0,0814
5,8	0,3800	-0,3210	-0,5340	0,0779	-0,3185	-0,3158
6,0	0,8556	0,5218	0,3184	0,5211	0,2064	0,1033

## 4. Problem dynamiki

Zagadnienie dynamiki pręta lepkosprężystego można rozwiązać w sposób podobny. Wykonując transformację Laplace'a na równaniu uwzględniającym siły bezwładności w czasie ruchu pręta napiszemy

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad \frac{\bar{E}(p) I}{R^4} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right)^2 \bar{W}(\varphi, p) + \bar{k}(p) \frac{d^2 \bar{W}(\varphi, p)}{d\varphi^2} + A_0 p^2 \frac{d^2 \bar{W}(\varphi, p)}{d\varphi^2} = \\
 = \frac{d^2}{d\varphi^2} [A_0 (p f(\varphi) + g(\varphi)) + \bar{q}(\varphi, p)],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$f(\varphi) = W(\varphi, 0), \quad g(\varphi) = \frac{d}{dt} [W(\varphi, 0)];$$

$\rho$  jest gęstością materiału pręta.

Wykonując następnie skończoną transformację Fouriera przy tych samych warunkach brzegowych co w przypadku równania (1.4) otrzymujemy

$$(4.2) \quad \bar{W}_n(p) = \frac{\bar{q}_n(p) + A\rho(pf_n + g_n)}{\frac{\bar{E}(p)I}{R^4}(\mu_n^2 - 1)^2 + \bar{k}(p) + A\rho p^2},$$

gdzie

$$(f_n, g_n, q_n) = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} (f, g, q) F_n(u) du.$$

Po dokonaniu odwrotnej transformacji Fouriera znajdziemy

$$(4.3) \quad \bar{W}(\varphi, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{q_n(p) + A\rho(pf_n + g_n)}{\frac{\bar{E}(p)I}{R^4}(\mu_n^2 - 1)^2 + \bar{k}(p) + A\rho p^2} F_n(\varphi).$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(4.4) \quad r_{1n}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \frac{\bar{E}(p)I}{R^4}(\mu_n^2 - 1)^2 + \bar{k}(p) + A\rho p^2 \right]^{-1} \right\}$$

oraz

$$(4.5) \quad r_{2n}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p \left[ \frac{\bar{E}(p)I}{R^4}(\mu_n^2 - 1)^2 + \bar{k}(p) + A\rho p^2 \right]^{-1} \right\},$$

a następnie wykonując odwrotną transformację Laplace'a przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie funkcji otrzymamy

$$(4.6) \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n F_n(\varphi) \left\{ \int_0^t r_{1n}(t-\tau) q_n(\tau) d\tau + A\rho [f_n r_{2n}(t) + g_n r_{1n}(t)] \right\},$$

gdy

$$(4.7) \quad f(\varphi) = g(\varphi) = 0, \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n F_n(\varphi) \int_0^t r_{1n}(t-\tau) q_n(\tau) d\tau.$$

Wynik (4.7) pod względem budowy i w sensie matematycznym jest identyczny z równaniem (1.8) z tą jednak różnicą, że na miejsce  $G_n(t-\tau)$  w (1.8) weszło wyrażenie  $r_{1n}(t-\tau)$  w (4.6). W  $r_{1n}(t)$  uwzględniony został wpływ sił bezwładności na ruch pręta lepkosprężystego. W związku z tym np. dla zamkniętego pręta kołowego można na podstawie (1.18) napisać równanie ruchu:

$$(4.8) \quad W(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\pi} \int_0^t \int_0^{\infty} q(\psi, \tau) r_{1n}(t-\tau) \cos n(\varphi - \psi) d\psi d\tau.$$

Rozwiązanie (4.8) można podobnie jak w przypadku zagadnienia quasi-statycznego dostosować do różnych modeli reologicznych podłoża i pręta. Dostosowanie polega na odpowiednim doborze  $\bar{k}(p)$  i  $\bar{E}(p)$  we wzorach (4.4) i (4.5). Gdy  $g(\varphi)$  i  $f(\varphi)$  są różne od zera w przypadku pręta pełnego, należy je rozbić na części parzyste i nieparzyste uwzględniając transformację raz kosinusową a raz sinusową, a następnie zastosować zasadę superpozycji, jakiej podlega rozwiązanie.

Założymy również, że mamy do czynienia z modelem Voigta, zatem

$$\bar{E}(p) = E_0 (1 + \lambda p).$$

Wtedy po wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a na (4.4) i (4.5) otrzymamy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} r_{1n}(t) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} a_n \lambda t}}{A_0 \sqrt{a_n \left(1 - \frac{1}{4} a_n \lambda^2\right)}} \sin \sqrt{a_n \left(1 - \frac{1}{4} a_n \lambda^2\right)} t, \\ r_{2n}(t) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} a_n \lambda t}}{A_0} \left[ \cos \sqrt{a_n \left(1 - \frac{a_n \lambda^2}{4}\right)} t - \frac{a_n \lambda \sin \sqrt{a_n \left(1 - \frac{a_n \lambda^2}{4}\right)} t}{\sqrt{a_n \left(1 - \frac{a_n \lambda^2}{4}\right)}} \right]. \end{aligned}$$

Gdy  $1 - (a_n \lambda^2/4) < 0$  wzory (4.8) i (4.9) przechodzą w następujące:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} r_{1n}(t) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} a_n \lambda t}}{A_0 \sqrt{a_n \left(\frac{1}{4} a_n \lambda^2 - 1\right)}} \operatorname{sh} \sqrt{a_n \left(\frac{1}{4} a_n \lambda^2 - 1\right)} t, \\ r_{2n}(t) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} a_n \lambda t}}{A_0} \left[ \operatorname{ch} \sqrt{a_n \left(\frac{a_n \lambda^2}{4} - 1\right)} t - \frac{a_n \lambda \operatorname{sh} \sqrt{a_n \left(\frac{a_n \lambda^2}{4} - 1\right)} t}{\sqrt{a_n \left(\frac{a_n \lambda^2}{4} - 1\right)}} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.11) \quad a_n = \frac{E_0}{A_0} \left[ \frac{I}{R^4} (\mu_n^2 - 1)^2 + \alpha \right].$$

Przejście ze wzorów (4.9) na wzór (4.10) można komentować jak przejście od ruchu periodycznego do ruchu aperiodycznego.

### 5. Przypadek wędrującej siły promieniowej

Na zakończenie rozpatrzmy jeszcze raz przypadek wędrującej siły promieniowej  $P_0$ . Zagadnienie sprowadza się do znalezienia całki rozwiązania (4.8) przy założeniu, że

$$q(\psi, \tau) = \frac{P_0}{R} \delta(\psi - \omega\tau).$$



Tablica 2

$t/\pi$	$\lambda = 0,5 \text{ sek.}$			$\lambda = 1 \text{ sek.}$		
	$\omega=1 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=3 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=5 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=1 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=3 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega=5 \text{ sek.}^{-1}$
0,10	0,3100	0,3646	0,2703	0,2274	0,2468	0,1794
0,20	0,4598	0,1877	-0,1479	0,3649	0,2039	-0,0246
0,30	0,4673	-0,2061	-0,3079	0,4086	-0,0117	-0,1560
0,40	0,3723	-0,5209	0,2158	0,3712	-0,2419	0,0954
0,50	0,1953	-0,4169	0,4470	0,2630	-0,2623	0,2658
0,60	0,0670	0,0595	-0,0047	0,1087	-0,0376	0,0533
0,70	-0,1555	0,5748	-0,1906	-0,0118	0,2762	-0,0856
0,80	-0,3741	0,6764	0,3128	-0,1976	0,4139	0,1594
0,90	-0,5608	0,3172	0,5263	-0,3760	0,2743	0,3236
1,0	-0,6921	-0,1331	0,0597	-0,5259	0,0213	0,1055
1,1	-0,7508	-0,3661	-0,1379	-0,6297	-0,1680	-0,0384
1,2	-0,7276	-0,1446	0,3564	-0,6743	-0,1099	0,2023
1,3	-0,6218	0,3482	0,5620	-0,6528	0,1570	0,3624
1,4	-0,4415	0,7705	0,0886	-0,5650	0,4382	0,1404
1,5	-0,2023	0,6734	-0,1143	-0,4174	0,4686	-0,0067
1,6	0,0740	0,2239	0,3760	-0,2225	0,2597	0,2310
1,7	0,2969	-0,2039	0,5780	0,0024	-0,0017	0,3885
1,8	0,6000	-0,2994	0,1016	0,2015	-0,1241	0,1639
1,9	0,8706	0,0449	-0,1036	0,4485	0,0137	0,0145
1,0	1,0857	0,5581	0,3848	0,6674	0,3051	0,2503
2,1	1,1991	0,8210	0,5852	0,8314	0,5230	0,4059
2,2	1,1872	0,5613	0,1074	0,9114	0,4537	0,1796
2,3	1,0626	0,0945	-0,0988	0,9029	0,2125	0,0288
2,4	0,8576	-0,2748	0,3887	0,8134	-0,0390	0,2632
2,5	0,5926	-0,2154	0,5885	0,6668	-0,0788	0,4176
2,6	0,3073	0,2245	0,1101	0,4742	0,1285	0,1902
2,7	0,0987	0,7125	-0,0967	0,2647	0,4278	0,0383
2,8	-0,1660	0,7891	0,3905	0,0938	0,5510	0,2719
2,9	-0,3904	0,4093	0,5899	-0,1123	0,3983	0,4254
3,0	-0,5526	-0,0590	0,1112	-0,2873	0,1326	0,1972
3,1	-0,6366	-0,3055	-0,0957	-0,4138	-0,0673	0,0447
3,2	-0,6341	-0,0949	0,3913	-0,4790	-0,0187	0,2777
3,3	-0,5453	0,3896	0,5906	-0,4761	0,2394	0,4307
3,4	-0,3788	0,8044	0,1118	-0,4051	0,5134	0,2020
3,5	-0,1510	0,7011	-0,0953	-0,2727	0,5367	0,0490
3,6	0,1160	0,2466	0,3917	-0,0915	0,3213	0,2816
3,7	0,3329	-0,1856	0,5909	0,1208	0,0536	0,4343
3,8	0,6294	-0,2844	0,1120	0,3115	-0,0741	0,2051
3,9	0,8949	0,0571	-0,0951	0,5481	0,0589	0,0518
4,0	1,1056	0,5683	0,3918	0,7577	0,3464	0,2842
4,1	1,2154	0,8294	0,5910	0,9131	0,5603	0,4365
4,2	1,2005	0,5682	0,1121	0,9853	0,4874	0,2073
4,3	1,0735	0,1000	-0,0950	0,9698	0,2429	0,0538
4,4	0,8664	-0,2703	0,3919	0,8740	-0,0115	0,2859
4,5	0,5999	-0,2117	0,5911	0,7215	-0,0539	0,4381

$t/\pi$	$\lambda = 0,5 \text{ sek.}$			$\lambda = 1 \text{ sek.}^{-1}$		
	$\omega = 1 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega = 3 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega = 5 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega = 1 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega = 3 \text{ sek.}^{-1}$	$\omega = 5 \text{ sek.}^{-1}$
4,6	0,3133	0,2275	0,1122	0,5236	0,1510	0,2087
4,7	0,1033	0,7150	-0,0950	0,3094	0,4483	0,0551
4,8	-0,1622	0,7911	0,3919	0,1332	0,5695	0,2871
4,9	-0,3873	0,4110	0,5911	-0,0766	0,4151	0,4392
5,0	-0,5501	-0,0577	0,1122	-0,2551	0,1477	0,2096
5,1	-0,6345	-0,3043	-0,0950	-0,3846	-0,0536	0,0559
5,2	-0,6324	-0,0940	0,3920	-0,4525	-0,0064	0,2879
5,3	-0,5439	0,3904	0,5911	-0,4522	0,2433	0,4399
5,4	-0,3777	0,8050	0,1122	-0,3834	0,5236	0,2103
5,5	-0,1500	0,7017	-0,0950	-0,2531	0,5459	0,0565
5,6	0,1168	0,2470	0,3920	-0,0738	0,3296	0,2884
5,7	0,3336	-0,1853	0,5911	0,1369	0,0610	0,4404
5,8	0,6300	-0,2841	0,1122	0,3264	-0,0673	0,2107
5,9	0,8953	0,0573	-0,0949	0,5616	0,0651	0,0569
6,0	1,1060	0,5685	0,3920	0,7700	0,3520	0,2888

Uwzględniając zatem (4.9) w (4.8) oraz wykonując całkowanie otrzymamy

$$(5.1) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{2\pi RA\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\sqrt{a_n \left(1 - a_n \frac{\lambda^2}{4}\right)}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\xi_{1n}}{\kappa_n^2 + \xi_{1n}^2} \left[ \frac{\kappa_n}{\xi_{1n}} \sin n(\varphi - \omega t) - \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_n t} \left( \frac{\kappa_n}{\xi_{1n}} \sin \vartheta_{1n} - \cos \vartheta_{1n} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi_{2n}}{\kappa_n^2 + \xi_{2n}^2} \left[ \frac{\kappa_n}{\xi_{2n}} \sin n(\omega t - \varphi) - \cos n(\omega t - \varphi) - e^{-\kappa_n t} \left( \frac{\kappa_n}{\xi_{2n}} \sin \vartheta_{2n} - \cos \vartheta_{2n} \right) \right] \right\},$$

gdzie

$$(5.2) \quad \vartheta_{1n, 2n} = \sqrt{a_n \left(1 - a_n \frac{\lambda^2}{4}\right)} t \pm n\varphi, \quad \xi_{1n, 2n} = -\sqrt{a_n \left(1 - a_n \frac{\lambda^2}{4}\right)} \mp n\omega,$$

$$\kappa_n = \frac{1}{2} a_n \lambda.$$

W obliczeniach przyjmijmy  $I/R^4 = a$ . Zatem

$$(5.3) \quad a_n = \frac{E_0 a}{A\varrho} [(n^2 - 1)^2 + 1].$$

W przypadku gdy czasy relaksacji są większe, takie że  $a_n \lambda^2/4 > 1$ , należy uwzględnić (4.10)<sub>I</sub> w (4.8) i wtedy

$$(5.4) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{2\pi RA\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\sqrt{a_n \left(a_n \frac{\lambda^2}{4} - 1\right)}} \times$$

(5.4)  
[c. d.]

$$\times \left\{ \frac{1}{\kappa_{2n}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{2n} \cos n(\varphi - \omega t) - n\omega \sin n(\varphi - \omega t)] - e^{-\kappa_{2n} t} (\kappa_{2n} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi) \right\} - \frac{1}{\kappa_{1n}^2 + n^2 \omega^2} [\kappa_{1n} \cos n(\varphi - \omega t) - n\omega \sin n(\varphi - \omega t)] - e^{-\kappa_{1n} t} (\kappa_{1n} \cos n\varphi - n\omega \sin n\varphi) \Bigg\},$$

Tablica 3

$\varphi/\pi$	$t/\pi$					
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
0,050	0,4743	0,5322	0,2986	0,0253	-0,3910	-0,6077
0,100	0,0659	0,7497	0,5385	0,1596	-0,2100	-0,4938
0,150	0,8266	0,9729	0,7886	0,4037	-0,0035	-0,3507
0,200	0,9719	1,1607	1,0172	0,6382	0,1950	-0,1958
0,250	1,0563	1,2877	1,1991	0,8438	0,3816	-0,0432
0,300	1,0730	1,3446	1,3224	1,0065	0,5463	0,0998
0,350	1,0276	1,3358	1,3901	1,1311	0,6876	0,2263
0,400	0,9417	1,2718	1,4061	1,2188	0,8067	0,3330
0,450	0,8196	1,1689	1,3796	1,2742	0,9082	0,4343
0,500	0,6929	1,0530	1,3249	1,3069	0,9986	0,5363
0,550	0,5767	0,9304	1,2522	1,3216	1,0802	0,6412
0,600	0,4637	0,7990	1,1563	1,3116	1,1407	0,7427
0,650	0,3357	0,6461	1,0294	1,2644	1,1795	0,8302
0,700	0,1794	0,4631	0,8649	1,1731	1,1818	0,8953
0,750	0,0107	0,2464	0,6600	1,0336	1,1426	0,9318
0,800	-0,2326	0,0497	0,4175	0,8469	1,0583	0,9339
0,850	-0,5003	-0,2294	0,1491	0,6225	0,9338	0,9093
0,900	-0,7578	-0,5033	-0,0680	0,3858	0,7819	0,8615
0,950	-0,9587	-0,7328	-0,3048	0,1620	0,6246	0,8078
1,00	-1,0625	-0,8828	-0,4827	0,0236	0,4879	0,7644
1,05	-1,0522	-0,9381	-0,5877	-0,0956	0,3882	0,7407
1,10	-0,9424	-0,9088	-0,6270	-0,1693	0,3179	0,7274
1,15	-0,7716	-0,8252	-0,6234	-0,2152	0,2639	0,7070
1,20	-0,5838	-0,7217	-0,6038	-0,2542	0,2000	0,6658
1,25	-0,4118	-0,6241	-0,5875	-0,3008	0,1394	0,5984
1,30	-0,2690	-0,5421	-0,5811	-0,3587	0,0504	0,5047
1,35	-0,1523	-0,4726	-0,5803	-0,4230	-0,0511	0,3930
1,40	-0,0501	-0,4051	-0,5754	-0,4840	-0,1562	0,2678
1,45	0,0110	-0,3293	-0,5565	-0,5322	-0,2555	0,1368
1,50	0,0954	-0,2386	-0,5172	-0,5607	-0,3420	0,0641
1,55	0,2051	-0,1322	-0,4561	-0,5668	-0,4119	-0,0421
1,60	0,3271	-0,0157	-0,3770	-0,5524	-0,4652	-0,1407
1,65	0,4375	0,0489	-0,2888	-0,5234	-0,5051	-0,2333
1,70	0,5171	0,1421	-0,2037	-0,4887	-0,5374	-0,3229
1,75	0,5529	0,2094	-0,1335	-0,4572	-0,5677	-0,4126
1,80	0,5386	0,2458	-0,0844	-0,4332	-0,5984	-0,5029
1,85	0,4759	0,2556	-0,0513	-0,4123	-0,6245	-0,5879
1,90	0,4011	0,2575	-0,0163	-0,3796	-0,6327	-0,6553
1,95	0,3476	0,2840	0,0464	-0,3141	-0,6050	-0,6888
2,00	0,3649	0,3712	0,1087	-0,1976	-0,5259	-0,6743

$\varphi/\pi$	$t/\pi$					
	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
0,050	-0,5736	-0,2893	0,1487	0,5891	0,9051	0,8856
0,100	-0,5416	-0,3263	0,0769	0,5165	0,8880	0,9483
0,150	-0,4806	-0,3413	0,0158	0,4416	0,8539	0,9955
0,200	-0,4440	-0,3437	-0,0413	0,3609	0,7989	1,0190
0,250	-0,3223	-0,3405	-0,0985	0,2731	0,7237	1,0152
0,300	-0,2402	-0,3339	-0,1563	0,2161	0,6329	0,9826
0,350	-0,1577	-0,3226	-0,2119	0,1217	0,5272	0,9228
0,400	-0,0725	-0,3031	-0,2611	0,0263	0,4117	0,8395
0,450	0,0177	-0,2724	-0,2996	-0,0650	0,2925	0,7389
0,500	0,1139	-0,2286	-0,3245	-0,1485	0,1760	0,6299
0,550	0,1884	-0,1720	-0,3342	-0,2215	0,1138	0,5132
0,600	0,2805	-0,1047	-0,3295	-0,2827	0,0087	0,3924
0,650	0,3705	-0,0311	-0,3123	-0,3323	-0,0918	0,2690
0,700	0,4518	0,0435	-0,2863	-0,3717	-0,1872	0,1908
0,750	0,5197	0,1135	-0,2549	-0,4021	-0,2771	0,0683
0,800	0,5712	0,1757	-0,2202	-0,4241	-0,3601	-0,0547
0,850	0,6069	0,1876	-0,1813	-0,4354	-0,4330	-0,1743
0,900	0,6324	0,2365	-0,1335	-0,4312	-0,4903	-0,2843
0,950	0,6585	0,2959	-0,0698	-0,4050	-0,5250	-0,3777
1,00	0,6932	0,3759	0,0154	-0,3515	-0,5315	-0,4481
1,05	0,7509	0,4792	0,1229	-0,2697	-0,5077	-0,4923
1,10	0,8174	0,5972	0,2077	-0,1640	-0,4561	-0,5107
1,15	0,8753	0,7090	0,3417	-0,0428	-0,3829	-0,5069
1,20	0,9100	0,8122	0,4735	0,0842	-0,2952	-0,4854
1,25	0,9126	0,8918	0,5945	0,2093	-0,1989	-0,4498
1,30	0,8799	0,9426	0,6996	0,2915	-0,0978	-0,4020
1,35	0,8146	0,9633	0,7815	0,4006	0,0066	-0,3424
1,40	0,7225	0,9565	0,8505	0,5039	0,1138	-0,2710
1,45	0,6124	0,9245	0,9016	0,6014	0,1831	-0,1878
1,50	0,4977	0,8726	0,9358	0,6935	0,2865	-0,0937
1,55	0,3818	0,8053	0,9558	0,7792	0,3947	0,0093
1,60	0,2672	0,7224	0,9564	0,8501	0,5037	0,1184
1,65	0,1507	0,6229	0,9329	0,9083	0,6076	0,1882
1,70	0,0797	0,5112	0,8828	0,9447	0,7012	0,2928
1,75	-0,0427	0,3832	0,8048	0,9553	0,7799	0,3953
1,80	-0,1716	0,2427	0,7009	0,9388	0,8359	0,4927
1,85	-0,3010	0,1391	0,5777	0,8956	0,8780	0,5830
1,90	-0,3194	0,0007	0,4472	0,8301	0,9019	0,6661
1,95	-0,5117	-0,1238	-0,3169	0,7505	0,9109	0,7435
2,00	-0,5650	-0,2225	0,2015	0,6674	0,9114	0,8134

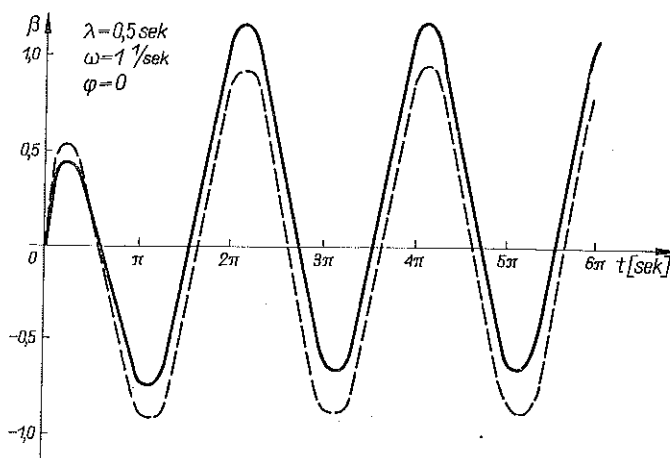
gdzie

$$(5:5) \quad \kappa_{1n}, \kappa_{2n} = \frac{1}{2} a_n \lambda \pm \sqrt{a_n \left( a_n \frac{\lambda^2}{4} - 1 \right)}.$$

W celu zanalizowania zmienności  $W(\varphi, t)$  przeprowadzono obliczenia wartości

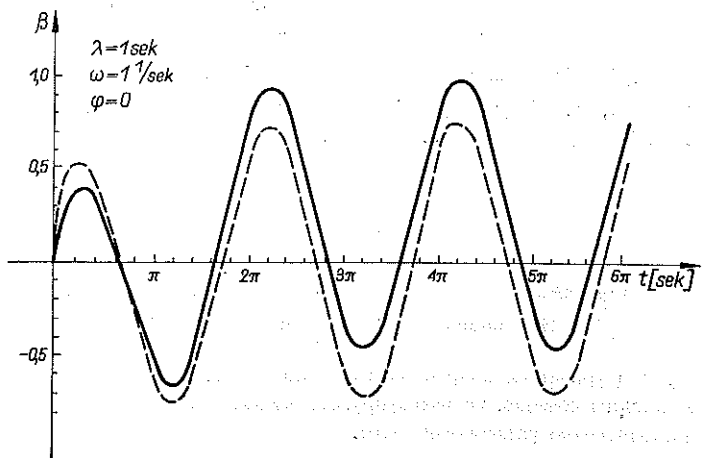
$$\beta(\varphi, t) = \frac{a\pi R E_0}{P_0} W(\varphi, t)$$

na podstawie (5.4) zarówno dla zmieniającego się czasu  $t$  jak i  $\varphi$ . W tabelicy 2 zestawiono wyniki obliczeń dla różnych wartości  $t$ ,  $\omega$  i  $\lambda$  przy stałej wartości  $\varphi = 0$ . W obliczeniach przyjęto  $E_0 a/A\rho = 20.000 \text{ sek}^{-2}$ . Krzywa obrazująca ruch punktu



Rys. 3

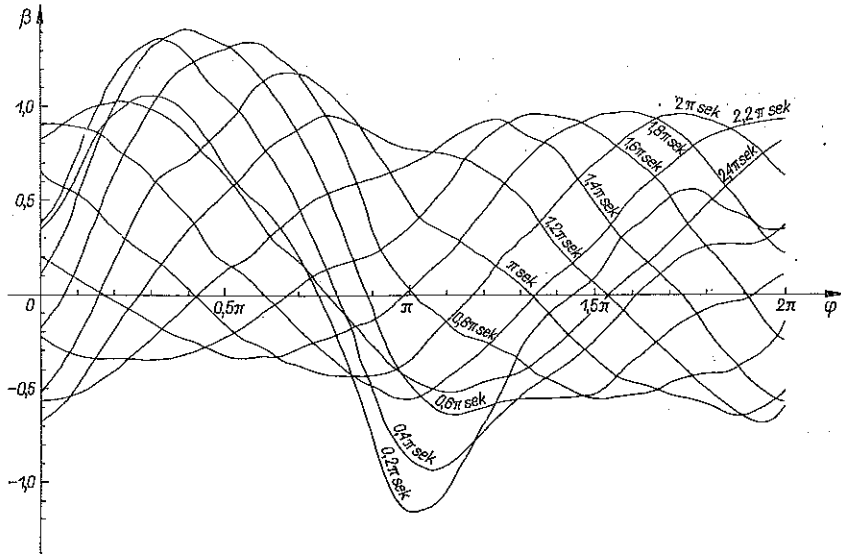
osi pręta (rys. 3 i 4) w zagadnieniu quasi-statycznym (linia przerywana) przebiega poniżej krzywej problemu dynamicznego. Wpływ sił bezwładności jest widoczny.



Rys. 4

Pod wpływem siły wędrującej punkt osi, wokół którego odbywają się oscylacje, ustala się ponad osią,  $\beta = 0$ . Odchylenie tego punktu wzrasta ze wzrostem lepkości

jak i prędkości kątowej  $\omega$  promienia wodzącego określającego położenie siły. Amplitudy wychyleń natomiast maleją. Cykl powtarza się co  $2\pi/\omega$ .



Rys. 5

Z wykresu odkształconej osi pręta (rys. 5) wnioskujemy, że pewne maksimum wychyleńa podąża za punktem przyłożenia siły. Wyjątek stanowi moment rozpoczęcia procesu obciążania (w naszym przykładzie przedział  $0-0,4\pi$  sek.).

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
2. B. SKALMIERSKI, *Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych uźebrowanych*, Zeszyty Naukowe Pol. Sl. Nr 73, Mechanika, z. 18, 1963.

#### Резюме

#### ПРОБЛЕМА ВЯЗКОУПРУГОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В работе рассматривается вопрос изгиба слабо закрученного, вязкоупругого кругового стержня полного сечения, на вязкоупругом основании. Предполагается, что нагрузку составляет исключительно радиальные силы.

Задача рассматривается в двух аспектах: как квази-статическая и как динамическая т.е. с учетом сил инерции. Решение получено основываясь на упруго-вязко-упругой аналогии.

Результаты получены в виде обратного преобразования Лапласа и Фурье. В заключение исследовалась изменчивость прогибов во время подвиженной радиальной силы.

Подробно рассмотрено модель Фойгта.

## Summary

THE PROBLEM OF A CIRCULARLY CURVED VISCOELASTIC BAR RESTING ON  
A VISCOELASTIC FOUNDATION

The bar under consideration is a viscoelastic circularly curved bar of small curvature and simply connected cross-section, resting on a viscoelastic foundation. It is assumed that it is loaded by radial forces only. The problem is considered as a quasi-static and dynamic problem (the inertia forces being included). The results are obtained as an inverse Laplace and Fourier transform. In conclusion is considered the time-dependency of the deflection under the action of a wandering radial force. The Voigt body is assumed for detailed considerations.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 czerwca 1964 r.*

---