

Z TEORII PRZESTRZENNYCH RUROCIĄGÓW SAMOKOMPENSACYJNYCH

CZESŁAW WOŹNIAK i MARIAN ŁUKOWIAK (ŁÓDŹ)

Wstęp

W pracy [1] przedstawiono sposób obliczania rozgałęzionych rurociągów samokompensacyjnych, polegający na ułożeniu dla każdej gałęzi tzw. wzorów przejścia, a następnie na uwzględnieniu współpracy poszczególnych gałęzi za pomocą postępowania iteracyjnego. Wzory przejścia (będące uogólnieniem znanych w metodzie przemieszczeń wzorów transformacyjnych) wyrażają składowe momentów i sił działających na skrajne przekroje gałęzi przez ich obroty i przesunięcia oraz przez znane wpływy zewnętrzne. Podane w [1] wzory przejścia dotyczą gałęzi podpartych wyłącznie w skrajnych przekrojach. W poniższym opracowaniu przedstawiono budowę tych wzorów biorąc pod uwagę zarówno dodatkowe usztywnienie gałęzi podporami pośrednimi jak i jej uelastycznienie kompensatorami i przegubami różnego rodzaju. Uwzględniono jednocześnie działanie zewnętrznych obciążeń skupionych i rozłożonych oraz wpływ naciągów wstępnych realizowanych w dowolnych przekrojach rurociągu. Osobno omówiono przypadek szczególny, w którym wszystkie węzły, podpory pośrednie i przeguby ustroju leżą na jednej trasie łączącej dwa punkty stałe. W porównaniu z metodami obliczania rozgałęzionych rurociągów samokompensacyjnych omawianymi w [2, 3, 4 lub 5] podany w pracy sposób cechuje duża ogólność rozważań ujętych w jednym prostym schemacie obliczeniowym.

1. Równania podstawowe

Przedmiotem rozważań będzie gałąź rurociągu dowolnie obciążona i dowolnie podparta w punktach pośrednich. Na osi gałęzi mogą również występować przeguby lub kompensatory. Oznaczmy jeden ze skrajnych przekrojów gałęzi symbolem 0, drugi — symbolem K . Podzielmy gałąź przekrojami 1, 2, ..., z , (w kolejności od 0 do K) na $z+1$ odcinków; przekrojów tych dokonujemy przed wszystkimi podporami, przegubami, kompensatorami oraz miejscami przyłożenia naciągów wstępnych i zewnętrznych obciążeń skupionych. Każdy z odcinków $N, N+1$ ($N = 0, 1, \dots, z$; przekrój $z+1$ utożsamiany z przekrojem K) parametryzujemy kartezjańskim ortogonalnym układem współrzędnych $\xi_1^N, \xi_2^N, \xi_3^N$ o początku w środku przekroju N ; wszystkie te układy współrzędnych przyjmujemy jako równoległe.

Oznaczamy następnie przez:

- v_a^N, u_a^N składowe wektorów obrotu i przesunięcia przekroju N ,¹
- M_a^N, P_a^N składowe wektorów momentu i siły jako oddziaływań odcinka $N-1, N$ na odcinek $N, N+1$,
- $v_a(S), u_a(S), M_a(S), P_a(S)$ składowe wektorów obrotu, przesunięcia, momentu wewnętrznego i wewnętrznej siły w przekroju S odcinka $N, N+1$,
- $\check{v}_a^N, \check{u}_a^N$ składowe przyrostu wektorów obrotu i przesunięcia przy przejściu przez przegub lub kompensator w N ,
- \hat{v}_a^N, \hat{u}_a^N składowe wektorów obrotu i przesunięcia określających naciąg wstępny (momenty lub siły) wywołany w przekroju N ,
- $\check{M}_a^N, \check{P}_a^N$ składowe oddziaływania podpory w N ,
- \hat{M}_a^N, \hat{P}_a^N składowe zewnętrznych obciążeń skupianych w N ,
- g_a, γ_a składowe wektorów intensywności obciążenia ciągłego i jednostkowego kąta obrotu w dowolnym przekroju gałęzi.

Zakładając, że oś gałęzi nie posiada punktów wielokrotnych, napiszemy korzystając z [6] następujące zależności:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} v_a(S) &= v_a^N + \hat{v}_a^N + \check{v}_a^N + \int_{(NS)} \gamma_a d\sigma, \\ P_a(S) &= P_a^N + \hat{P}_a^N + \check{P}_a^N + \int_{(NS)} g_a d\sigma, \\ \gamma_a &= -S_{av} M_v(S), \end{aligned}$$

$$u_a(S) = u_a^N + \hat{u}_a^N + \check{u}_a^N + T_{a\mu}^S (v_a^N + \hat{v}_a^N + \check{v}_a^N) + T_{a\mu}^S \int_{(NS)} \gamma_\mu d\sigma - \int_{(NS)} T_{a\mu} \gamma_\mu d\sigma,$$

$$M_a(S) = M_a^N + \hat{M}_a^N + \check{M}_a^N + T_{a\mu}^S (P_a^N + \hat{P}_a^N + \check{P}_a^N) + T_{a\mu}^S \int_{(NS)} g_\mu d\sigma - \int_{(NS)} T_{a\mu} g_\mu d\sigma.$$

W występujących tu całkach krzywoliniowych $d\sigma$ jest elementem łuku osi gałęzi 0, symbolem S_{av} oznaczono składowe «tensora sztywności przekroju» zdefiniowanego w [1]. Ponadto $T_{a\mu}^S = \varepsilon_{a\mu\nu} \xi_\nu^N(S)$, gdzie $\varepsilon_{a\mu\nu}$ jest symbolem permutacyjnym (symbolem Ricciego), a $\xi_\nu^N(S)$ są współrzędnymi środka dowolnego przekroju S odcinka $N, N+1$. Rugując z (1.1) funkcje γ_a , otrzymamy dla $S = N+1$ wyrażenia, które w zapisie macierzowo-wskaźnikowym (obowiązuje konwencja sumacyjna dla wskaźników greckich) przyjmuje postać:

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} v_a^{N+1} \\ u_a^{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{a\mu} & 0 \\ T_{a\mu}^{N+1} & \delta_{a\mu} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} v_\mu^N + \check{v}_\mu^N + \hat{v}_\mu^N \\ u_\mu^N + \check{u}_\mu^N + \hat{u}_\mu^N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{\mu\nu}^N & B_{\mu\nu}^N \\ B_{\mu\nu}^N & C_{\mu\nu}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\nu + \hat{M}_\nu + \check{M}_\nu \\ P_\nu + \hat{P}_\nu + \check{P}_\nu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_\mu^N \\ E_\mu^N \end{bmatrix} \right)$$

oraz

$$(1.3) \quad \begin{bmatrix} M_a^{N+1} \\ P_a^{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{a\mu} & T_{a\mu}^{N+1} \\ 0 & \delta_{a\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\mu^N + \hat{M}_\mu^N + \check{M}_\mu^N + m_\mu^N \\ P_\mu^N + \hat{P}_\mu^N + \check{P}_\mu^N + p_\mu^N \end{bmatrix}.$$

¹ Wskaźniki oznaczone literami alfabetu greckiego przebiegają ciąg 1, 2, 3.

W powyższych równaniach symbolami $A_{\nu\mu}^N = A_{\nu\mu}^N$, $B_{\mu\nu}^N$, $C_{\mu\nu}^N = C_{\nu\mu}^N$ oznaczono liczby wpływowe odcinka $N, N+1$, a symbolami $m_\mu^N, p_\mu^N, D_\mu^N, E_\mu^N$ — wielkości charakteryzujące obciążenie ciągłe odcinka:

$$(1.4) \quad A_{\mu\nu}^N = \int_{(N, N+1)} S_{\mu\nu} d\sigma, \quad B_{\mu\nu}^N = \int_{(N, N+1)} S_{\mu\pi} T_{\pi\nu} d\sigma,$$

$$C_{\mu\nu}^N = \int_{(N, N+1)} S_{\pi\varrho} T_{\pi\mu} T_{\varrho\nu} d\sigma;$$

$$(1.5) \quad p_\mu^N = \int_{(N, N+1)} g_\mu d\sigma, \quad m_\mu^N = \int_{(N, N+1)} T_{\mu\pi} g_\pi d\sigma;$$

$$(1.6) \quad D_\mu^N = \int_{(N, N+1)} S_{\mu\pi} (T_{\pi\varrho} p_\varrho + m_\pi) d\sigma, \quad p_\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(NS)} g_\varrho d\sigma, \quad m_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(NS)} T_{\pi\varrho} g_\varrho d\sigma,$$

$$E_\mu^N = \int_{(N, N+1)} S_{\varrho\pi} T_{\pi\mu} (T_{\varrho\nu} p_\nu + m_\varrho) d\sigma.$$

Wielkości (1.4) są przemieszczeniami końca N fikcyjnego pręta wspornikowego, wywołanymi jednostkowymi siłami lub momentami przyłożonymi do N . Wielkości D_μ^N, E_μ^N są analogicznymi przemieszczeniami, lecz wywołanymi działaniem obciążeń ciągłych. Momenty m_μ^N i siły p_μ^N tworzą układ, który po zaczepieniu w N byłby statycznie równowarty obciążeniom ciągłym odcinka $N, N+1$. Przy obliczaniu całek krzywoliniowych (1.4) i (1.6) można korzystać ze schematów podanych np. w [3] lub [5].

2. Wyznaczenie macierzy przeniesienia

W dalszym ciągu pracy będziemy się posługiwać wyłącznie zapisem macierzowym. Z wprowadzonych uprzednio wielkości utworzymy następujące kolumny i macierze:

(2.1)

$$q_N = \begin{bmatrix} v_1^N \\ v_2^N \\ v_3^N \\ u_1^N \\ u_2^N \\ u_3^N \end{bmatrix}, \quad \check{q}_N = \begin{bmatrix} \check{v}_1^N \\ \check{v}_2^N \\ \check{v}_3^N \\ \check{u}_1^N \\ \check{u}_2^N \\ \check{u}_3^N \end{bmatrix}, \quad \hat{q}_N = \begin{bmatrix} \hat{v}_1^N \\ \hat{v}_2^N \\ \hat{v}_3^N \\ \hat{u}_1^N \\ \hat{u}_2^N \\ \hat{u}_3^N \end{bmatrix}, \quad p_N = \begin{bmatrix} M_1^N \\ M_2^N \\ M_3^N \\ P_1^N \\ P_2^N \\ P_3^N \end{bmatrix}, \quad \check{p}_N = \begin{bmatrix} \check{M}_1^N \\ \check{M}_2^N \\ \check{M}_3^N \\ \check{P}_1^N \\ \check{P}_2^N \\ \check{P}_3^N \end{bmatrix}, \quad \hat{p}_N = \begin{bmatrix} \hat{M}_1^N \\ \hat{M}_2^N \\ \hat{M}_3^N \\ \hat{P}_1^N \\ \hat{P}_2^N \\ \hat{P}_3^N \end{bmatrix},$$

$$(2.2) \quad \tilde{T}_{N+1, N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & l_3^N & -l_2^N \\ 0 & 1 & 0 & -l_3^N & 0 & l_1^N \\ 0 & 0 & 1 & l_2^N & l_1^N & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{N+1, N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & l_3^N & -l_2^N & 1 & 0 & 0 \\ -l_3^N & 0 & l_1^N & 0 & 1 & 0 \\ l_2^N & l_1^N & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(2.3) \quad W_{N,N} = \begin{bmatrix} A_{11}^N & A_{12}^N & A_{13}^N & B_{11}^N & B_{12}^N & B_{13}^N \\ A_{21}^N & A_{22}^N & A_{23}^N & B_{21}^N & B_{22}^N & B_{23}^N \\ A_{31}^N & A_{32}^N & A_{33}^N & B_{31}^N & B_{32}^N & B_{33}^N \\ B_{11}^N & B_{21}^N & B_{31}^N & C_{11}^N & C_{12}^N & C_{13}^N \\ B_{12}^N & B_{22}^N & B_{32}^N & C_{21}^N & C_{22}^N & C_{23}^N \\ B_{13}^N & B_{23}^N & B_{33}^N & C_{31}^N & C_{32}^N & C_{33}^N \end{bmatrix}, \quad r_N = \begin{bmatrix} m_1^N \\ m_2^N \\ m_3^N \\ p_1^N \\ p_2^N \\ p_3^N \end{bmatrix}, \quad t_N = \begin{bmatrix} D_1^N \\ D_2^N \\ D_3^N \\ E_1^N \\ E_2^N \\ E_3^N \end{bmatrix};$$

wskaźnik N przebiega tu ciąg $0, 1, 2, \dots, Z$ a l_a^N są współrzędnymi końca $N+1$ odcinka $N, N+1$ w układzie $\xi_1^N \xi_2^N \xi_3^N$. Równania (1.2) i (1.3) przy powyższych oznaczeniach mają postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} q_{N+1} &= T_{N+1,N} [q_N + \check{q}_N + \hat{q}_N - W_{N,N} (p_N + \check{p}_N + \hat{p}_N) + t_N], \\ p_{N+1} &= \tilde{T}_{N+1,N} (p_N + \check{p}_N + \hat{p}_N + r_N). \end{aligned}$$

Utworzymy następnie dwunasto-wyrazowe kolumny:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \pi_N &= \begin{bmatrix} q_N \\ p_N \end{bmatrix}, \quad \check{\pi}_N = \begin{bmatrix} \check{q}_N \\ \check{p}_N \end{bmatrix}, \quad \overset{\circ}{\varphi}_{N+1} = \begin{bmatrix} -T_{N+1,N} t_N \\ \tilde{T}_{N+1,N} r_N \end{bmatrix}, \\ \hat{\varphi}_{N+1} &= \begin{bmatrix} T_{N+1,N} (\hat{q}_N - W_{N,N} \hat{p}_N) \\ T_{N+1,N} \hat{p}_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz macierze kwadratowe dwunastego stopnia

$$(2.6) \quad \Omega_{N+1,N} = \begin{bmatrix} T_{N+1,N} - T_{N+1,N} W_{N,N} \\ 0 \end{bmatrix},$$

w których 0 jest blokiem szóstego stopnia złożonym z samych zer. Korzystając z (2.5) i (2.6) równania (2.4) można podstawić w zwięzłym zapisie

$$(2.7) \quad \pi_{N+1} = \Omega_{N+1,N} \pi_N + \Omega_{N+1,N} \check{\pi}_N + \varphi_{N+1}, \quad \varphi_{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{\varphi}_{N+1} + \hat{\varphi}_{N+1}.$$

Stosując M -krotnie wzór (2.7) wyrazimy stan napięcia i przemieszczenia przekroju M ($M = 1, 2, \dots, Z, K$) za pomocą wzoru

$$(2.8) \quad \pi_M = \Omega_{M0} \pi_0 + \sum_{N=1}^{M-1} \Omega_{MN} \check{\pi}_N + \omega_M.$$

Prosty rachunek prowadzi do następujących wzorów rekurencyjnych dla macierzy Ω_{MN} (określonych dla $M > N$) oraz kolumn ω_M :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Omega_{MN} &= \Omega_{M,M-1} \Omega_{M-1,N}, \\ \omega_M &= \Omega_{M,M-1} \omega_{M-1} + \psi_M, \quad \omega_1 = \psi_1; \end{aligned}$$

macierze quasi-trójkątne Ω_{MN} ($M > N$) charakteryzujące geometrię i sprężyste części N, M gałęzi nazwiemy macierzami przeniesienia. Kolumny ω_M zależą ponadto od znanych wpływów zewnętrznych działających na ustrój.

3. Wzory przejścia. Ogólny sposób obliczania rurociągu rozgałęzionego

Oznaczmy przez $a, b, \dots, m, \dots, y, z$ te z pośrednich przekrojów gałęzi w kolejności od punktu 0 do K , w których znajdują się podpory, kompensatory lub przeguby. Przekroje, do których są przyłożone znane obciążenia skupione oraz w których są analizowane naciągi wstępne, nie będą występować w dalszych rozważaniach.

Zaznaczmy w macierzach przeniesienia Ω_{nm} ($n > m$) kolumny, które znajdują się na tych samych miejscach, na których występują niezerowe wyrazy w kolumnach $\check{\pi}_m$. Zaznaczmy następnie wiersze, którym odpowiadają znane wielkości w kolumnie π_n (wynikające z warunków brzegowych w przekroju n). Wyrazy macierzy Ω_{nm} , znajdujące się na przecięciu zaznaczonych kolumn i wierszy, tworzą nową macierz G_{nm} .

Zaznaczmy w macierzach Ω_{m0} wiersze, które znajdują się na tych samych miejscach, na których występują znane wielkości w kolumnie π_m . Wiersze te tworzą macierz dwukolumnową; dzieląc ją na dwa bloki sześciokolumnowe, pierwszy z nich oznaczmy przez T_{m0} , drugi przez G_{m0} .

Zaznaczmy w macierzach Ω_{Kn} kolumny, które znajdują się na tych samych miejscach, na których występują niezerowe wyrazy w kolumnach $\check{\pi}_n$; tworzą one macierz dwunastowierszową; górny sześciowierszowy blok tej macierzy oznaczmy przez G_{Kn} — dolny przez \check{T}_{Kn} .

Podzielmy wreszcie macierz Ω_{K0} na cztery kwadratowe bloki szóstego stopnia oraz kolumnę ω_K na dwie kolumny sześciowyrazowe:

$$(3.1) \quad \Omega_{K0} = \begin{bmatrix} T_{K0} & G_{K0} \\ 0 & T_{K0} \end{bmatrix}.$$

Oznaczając przez ξ_n kolumnę utworzoną z niezerowych wyrazów kolumny $\check{\pi}_n$, a przez η_n kolumnę znanych wielkości w przekroju m , z zależności (2.8) wyodrębnimy równania:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \eta_m &= G_{m0} p_0 + T_{m0} q_0 + \sum_n G_{mn} \xi_n + \omega_n^*, \quad m = a, b, \dots, z, \quad n = a, b, \dots, y; \\ q_K &= G_{K0} p_0 + T_{K0} q_0 + \sum_n G_{Kn} \xi_n + \omega'_K, \quad n < m; \end{aligned}$$

$$p_K = -\check{T}_{K0} p_0 - \sum_n \check{T}_{Kn} \xi_n - \omega''_K, \quad n = a, b, \dots, y, z.$$

Kolumny ω_m^* składają się z wyrazów kolumn ω_m , znajdujących się na tych samych miejscach, na których występują znane wielkości kolumn π_m .

Podpory pośrednie, kompensatory lub przeguby dostarczają warunków brzegowych, które napisać można w ogólnej postaci

$$(3.3) \quad \eta_m = -G_{mm} \xi_m + \xi_m^*.$$

Macierz kwadratowa G_{mm} jest macierzą sprężystości podpory lub macierzą sztywności kompensatora w przekroju m , kolumna ξ_m^* jest utworzona z przemieszczeń wymuszonych podpory lub znanych wielkości wewnętrznych w przekroju (np. zerowych wartości momentów w przegubie).

Rugując ze związków (3.2) i (3.3) kolumny η_m otrzymujemy równanie macierzowe:

$$(3.4) \quad \begin{bmatrix} T_{a0} & G_{a0} & G_{aa} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{b0} & G_{b0} & G_{ba} & G_{bb} & 0 & \dots & 0 \\ T_{c0} & G_{c0} & G_{ca} & G_{cb} & G_{cc} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{z0} & G_{z0} & G_{za} & G_{zb} & G_{zc} & \dots & G_{zz} \\ T_{K0} & G_{K0} & G_{Ka} & G_{Kb} & G_{Kc} & \dots & G_{Kz} \\ 0 & \tilde{T}_{K0} & \tilde{T}_{Ka} & \tilde{T}_{Kb} & \tilde{T}_{Kc} & \dots & \tilde{T}_{Kz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ p_0 \\ \xi_a \\ \xi_b \\ \xi_c \\ \dots \\ \xi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_a^* - \omega_a^* \\ \xi_b^* - \omega_b^* \\ \xi_c^* - \omega_c^* \\ \dots \\ \xi_z^* - \omega_z^* \\ q_K - \omega_b' \\ z p_K - \omega_K'' \end{bmatrix}$$

Występującą w (3.4) macierz kwadratową nazwiemy macierzą zbiorczą a jej część odgradzoną linią przerywaną — macierzą główną gałęzi 0, K. Macierz główna jest nieosobliwą macierzą kwadratową; wprowadzimy macierz odwrotną:

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} H_{0a} & H_{0b} & \dots & H_{0z} & H_{0K} \\ H_{aa} & H_{ab} & \dots & H_{az} & H_{aK} \\ H_{ba} & H_{bb} & \dots & H_{bz} & H_{bK} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{za} & H_{zb} & \dots & H_{zz} & H_{zK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{a0} & G_{aa} & 0 & \dots & 0 \\ G_{b0} & G_{ba} & G_{bb} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{z0} & G_{za} & G_{zb} & \dots & G_{zz} \\ G_{K0} & G_{Ka} & G_{Kb} & \dots & G_{Kz} \end{bmatrix}^{-1},$$

w której bloki H_{mn} (H_{0n} , H_{ac}) posiadają tyle wierszy (kolumn), ile kolumn (wierszy) posiadają bloki G_{nm} (G_{n0} , G_{K0}) macierzy głównej.

Gdy rurociąg składa się tylko z jednej gałęzi sztywno utwierdzonej na obu końcach, to bez wpływu na ogólność rozważań można przyjąć $q_0 = 0$. Sześciowierszowa kolumna q_K określa wtedy znane przemieszczenia wymuszone przekroju K. Oddziaływanie w utwierdzeniu 0 i niewiadome w kolumnach ξ_m dla dowolnych wpływów zewnętrznych, wyznaczmy z (3.4) i (3.5) otrzymując

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} p_0 \\ \xi_a \\ \xi_b \\ \dots \\ \xi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0a} & H_{0b} & \dots & H_{0z} & H_{0K} \\ H_{aa} & H_{ab} & \dots & H_{az} & H_{aK} \\ H_{ba} & H_{bb} & \dots & H_{bz} & H_{bK} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{za} & H_{zb} & \dots & H_{zz} & H_{zK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_a^* - \omega_a^* \\ \xi_b^* - \omega_b^* \\ \dots \\ \xi_z^* - \omega_z^* \\ q_K - \omega_K' \end{bmatrix}.$$

Po obliczeniu p_0 , ξ_a , ..., ξ_z można określić stan przemieszczenia i napięcia przekroju 1, 2, ..., z, K, korzystając z (2.4).

Jeżeli rurociąg składa się z wielu gałęzi, wtedy dla każdej z nich należy określić wzory przejścia wyrażające momenty i siły, działające na skrajne przekroje gałęzi, przez przemieszczenia tych przekrojów oraz przez znane wpływy zewnętrzne. Korzystając ponownie z (3.4) i (3.5) po prostych przekształceniach uzyskamy wtedy zależności

$$(3.7) \quad p_0 = H_{00} q_0 + H_{0K} q_K + \check{p}_0,$$

$$(3.8) \quad p_K = H_{K0} q_0 + H_{KK} q_K + \check{p}_K,$$

$$(3.9) \quad \xi_m = H_{m0} q_0 + H_{mK} q_K + \check{\xi}_m, \quad m = ab, \dots, z,$$

w których

$$(3.10) \quad \begin{aligned} H_{00} &= - \left(\sum_n H_{0n} T_{n0} + H_{0K} T_{K0} \right), & H_{m0} &= - \left(\sum_n H_{mn} T_{n0} + H_{mK} T_{K0} \right), \\ H_{K0} &= - \left(\tilde{T}_{K0} H_{00} + \sum_n \tilde{T}_{Kn} H_{n0} \right), & H_{KK} &= - \left(\tilde{T}_0 H_{0K} + \sum_n \tilde{T}_{Kn} H_{nK} \right), \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \check{p}_0 &= \sum_n H_{0n} (\xi_n^* - \omega_n^*) - H_{0K} \omega_K', \\ \check{\xi}_m &= \sum_n H_{mn} (\xi_n^* - \omega_n^*) - H_{mK} \omega_K'', \\ p_K &= - \tilde{T}_{K0} \check{p}_0 - \sum_n \tilde{T}_{Kn} \check{\xi}_n - \omega_K''. \end{aligned}$$

W (3.10) i (3.11) wskaźnik sumacyjny n przebiega ciąg a, b, c, \dots, y, z . Wzory (3.7) i (3.8) są poszukiwanymi wzorami przejścia. Występujące w nich macierze kwadratowe szóstego stopnia H_{00}, H_{KK} macierze sztywności są symetryczne, a macierz H_{K0} jest macierzą transponowaną względem H_{0K} . Warunki te, wynikające z zasady Bettiego, stanowią kontrolę poprawności rachunku.

Znając budowę wzorów przejścia (3.6), dalsze obliczenia możemy przeprowadzić jak np. w [1]. Z warunków równowagi węzłów rurociągu otrzymamy wtedy układ równań dla obrotów i przesunięć tych węzłów². Po ich wyznaczeniu obliczamy z (3.6) i (3.7) kolumny $p_0, \xi_a, \xi_b, \dots, \xi_y$. Posługując się kolejno wzorami (2.7) dla $N = 0, 1, \dots, z$ wyznaczamy składowe stanu napięcia i przemieszczenia π_N w skrajnych przekrojach kolejnych odcinków. Gdy poszukujemy tych składowych tylko w niektórych przekrojach, wygodniej posłużyć się wzorami (2.8). Dla dowolnego przekroju S dowolnego odcinka $N, N+1$ składowe stanu napięcia i przemieszczenia wyznaczamy następnie ze wzorów (1.1).

Powyższy sposób da się zastosować do obliczeń statycznych rurociągu rozgałęzionego o dowolnym układzie gałęzi. W wielu przypadkach spotykanych w praktyce można jednak wykorzystać prostszy sposób podany w następnym punkcie pracy.

4. Przypadek szczególny

Przypadek ten dotyczy ustrojów posiadających taką trasę łączącą dwa punkty stałe, na której znajdują się wszystkie podpory pośrednie, przeguby, kompensatory i rozgałęzienia. Rozgałęzienia możemy traktować jako sprężyste podatne podpory pośrednie gałęzi o powyższej trasie. Dla każdego z punktów łączących tę gałąź z punktem stałym należy wtedy wyznaczyć macierz sprężystości oraz kolumnę wyrazów wolnych postępując analogicznie jak przy wyznaczaniu macierzy W i kolumny t we wzorach (2.3)₁ i (2.3)₃. Oznaczając przez η_m kolumnę oddziaływań

² Jeżeli niektóre gałęzie są przegubowe podparte w punktach stałych, wtedy dodatkowymi niewiadomymi są obroty przekrojów przypodporowych tych gałęzi, a dodatkowymi równaniami — warunki zerowania się momentów w przegubach.

pręta na gałąź możemy dla każdego węzła M napisać warunki o tej samej budowie (3.3), jak dla dowolnej podpory sprężystej.

Rozpatrzmy najpierw gałąź o dowolnych skrajnych podporach A i Z sprężystości niepodatnych. Oznaczając przez ξ_a kolumnę nieznaną sześciu parametrów początkowych oraz przez ξ_z kolumnę sześciu znanych parametrów końcowych napiszemy na podstawie (2.8) równania

$$(4.1) \quad \eta_m = \sum_n G_{mn} \xi_n + \omega_m^*, \quad m, n = a, b, c, \dots, y, z, \quad m \geq n, \quad G_{aa} = G_{zz} = 0.$$

Macierze G_{mn} i kolumny ω_m^* z macierzy przeniesienia wyodrębniamy w sposób omówiony w poprzednim punkcie pracy.

Rugując z (4.1) i (3.3) kolumny η_m uzyskamy układ równań dla sześciu nieznanymi parametrów początkowych ξ_a i niewiadomych w kolumnach $\xi_b, \xi_c, \dots, \xi_y, \xi_z$:

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} G_{ba} & G_{bb} & 0 & \dots & 0 \\ G_{ca} & G_{cb} & G_{cc} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{ya} & G_{yb} & G_{yc} & \dots & G_{yy} \\ G_{za} & G_{zb} & G_{zc} & \dots & G_{zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_a \\ \xi_b \\ \xi_c \\ \dots \\ \xi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_b^* - \omega_b^* \\ \xi_c^* - \omega_c^* \\ \dots \\ \xi_y^* - \omega_y^* \\ \eta_z \end{bmatrix}.$$

Przechodząc do gałęzi $0 - K$ o sprężystości podpartych skrajnych przekrojach oznaczamy macierz sprężystości podpór w 0 i K przez G_{00} i G_{KK} . Zamiast układów (4.2) otrzymamy wtedy z (3.4) i ze wzorów $q_0 = -G_{00}p_0 + q_0^*$, $q_K = G_{KK}p_K + q_K^*$ poniższy układ równań (T_{00} i \tilde{T}_{KK} są macierzami jednostkowymi szóstego stopnia):

$$(4.3) \quad \begin{bmatrix} T_{00} & G_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ T_{a0} & G_{a0} & G_{aa} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ T_{b0} & G_{b0} & G_{ba} & G_{bb} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{z0} & G_{z0} & G_{za} & G_{zb} & \dots & G_{zz} & 0 \\ T_{K0} & G_{K0} & G_{Ka} & G_{Kb} & \dots & G_{Kz} & G_{KK} \\ 0 & T_{K0} & T_{K0} & T_{Kb} & \dots & T_{Kz} & T_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ p_0 \\ \xi_a \\ \xi_b \\ \dots \\ \xi_z \\ p_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^* \\ \xi_a^* - \omega_a^* \\ \xi_b^* - \omega_b^* \\ \dots \\ \xi_z^* - \omega_z^* \\ -q_K^* - \omega_K^* \\ -\omega_K'' \end{bmatrix}.$$

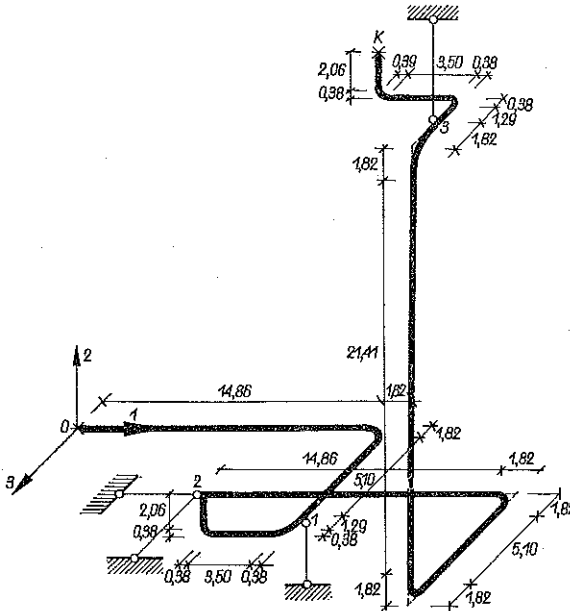
Po rozwiązaniu układu równań (4.2) lub (4.3) posługując się równaniami (2.4), wyznaczmy stan napięcia i przemieszczenia w kolejnych podporach gałęzi.

Na zakończenie nadmienimy, że dla gałęzi bezprzegubowych o wszystkich podporach sprężystości podatnych warto stosować rekurencyjne sposoby obliczeń [7]. Bez względu na liczbę niewiadomych wymagają one rozwiązania układu tylko sześciu równań lub wyznaczenia odwrotności jednej macierzy szóstego stopnia.

5. Przykład liczbowy

Wyprowadzone w tej pracy wzory zastosujemy teraz do obliczenia oddziaływań podporowych dla gałęzi rurociągu o schemacie statycznym przedstawionym na rys. 1, poddanej dowolnym wpływem niemechanicznym. Obliczenia macierzy $W_{00}, W_{11}, W_{22}, W_{33}$, odcinków $0 - 1, 1 - 2, 2 - 3$ i $3 - K$, zostały przeprowadzone

dzione w oparciu o [3]. Nie przytaczając znanych wyliczeń macierze te zestawiono od razu w tablicy 1. Macierze przeniesienia Ω_{10} , Ω_{21} , Ω_{32} , Ω_{K3} wyznaczone zgodnie z (2.6) wpisano w tablice 2-5. W tablicach 6-11 zestawiono pozostałe macierze przeniesienia $\Omega_{K2} = \Omega_{K3} \Omega_{32}$, $\Omega_{K1} = \Omega_{K2} \Omega_{21}$, $\Omega_{K0} = \Omega_{K1} \Omega_{10}$, $\Omega_{31} = \Omega_{32} \Omega_{21}$, $\Omega_{30} = \Omega_{31} \Omega_{10}$, $\Omega_{20} = \Omega_{21} \Omega_{10}$. Z macierzy przeniesienia Ω_{nm} ($3 \geq n > m \geq 1$)



Rys. 1

wyodrębniono macierze G_{nm} zaznaczając strzałkami kolumny odpowiadające miejscom występowania niewiadomych oddziaływań na podporze m oraz wiersze odpowiadające miejscom występowania znanych wielkości w przekroju n (pierwsze trzy miejsca odpowiadają obrotom, dalsze odpowiadają kolejno przemieszczeniu, momentom i siłom). Z macierzy Ω_{m0} (macierzy Ω_{Km}) wyodrębniono macierze T_{m0} , G_{m0} (macierze G_{Km} , \tilde{T}_{Km}) zaznaczając strzałkami wiersze (kolumny) odpowiadające miejscom występowania znanych wielkości w przekroju n (niewiadomych w przekroju m). Z wyodrębnionych macierzy utworzono macierz zbiorczą, a odcinając z niej pierwsze sześć kolumn i ostatnie sześć wierszy — macierz główną (tablica 12):

$$(5.1) \quad \begin{bmatrix} T_{10} & G_{10} & 0 & 0 & 0 \\ T_{20} & G_{20} & G_{21} & G_{22} & 0 \\ T_{30} & G_{30} & G_{31} & G_{32} & G_{33} \\ T_{K0} & G_{K0} & G_{K1} & G_{K2} & G_{K3} \\ 0 & \tilde{T}_{K0} & \tilde{T}_{K1} & \tilde{T}_{K2} & \tilde{T}_{K3} \end{bmatrix}$$

Występujący tu blok G_{22} , G_{33} jest macierzą sprężystości sprężystości podatnej podpory 2 i 3 (wyrazy macierzy sprężystości pomnożone są przez sztywność porów-

Tablica 1

W ₀₀						W ₁₁					
27,82	0	0	0	0	0	25,93	0	0	0	0	0
0	23,03	0	-23,42	24,26	0	0	25,05	0	-38,10	39,50	8,18
0	0	24,92	0	0	244,83	0	0	0	8,15	0	-60,70
0	-24,42	0	111,42	-276,12	0	24,44	0	24,44	74,41	54,89	0
24,26	0	-276,12	0	3938,35	406,77	8,15	-38,10	8,15	34,73	34,73	101,68
0	244,83	0	-406,77	0	0	54,89	39,50	54,89	261,77	261,77	-13,70
					3303,54	0	-60,70	0	101,68	-13,70	235,71

W ₂₂						W ₃₃					
55,37	0	0	0	0	0	25,93	0	0	0	0	0
0	57,67	0	-324,25	261,65	-345,44	0	25,05	0	38,10	-39,50	-8,18
0	0	53,13	353,77	0	822,98	0	0	0	8,15	0	-60,70
0	0	353,77	8936,64	-747,05	0	24,74	0	24,74	74,41	54,89	0
261,65	-324,25	353,77	8936,64	-5900,38	-5407,66	8,15	38,10	8,15	34,73	34,73	-101,68
-345,44	822,98	0	-5407,66	13840,88	-2974,33	54,89	-39,50	54,89	261,77	261,77	13,70
				-2974,33	18959,33	0	-60,70	0	-101,68	13,70	235,71

Tablica 2 Ω₁₀

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	6,92	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
→	-6,92	0	16,68	0	1	0	0	0	0	-139,55	0	835,21	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,56	0	780,22	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	139,31	0	0	0	0	6,92	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-6,92	0	16,68	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-16,68	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 3 Ω_{21}

1	0	0	0	0	0	0	0	-25,93	0	0	0	-39,50	8,18
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-25,05	38,10	0	0	60,70
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-8,15	-54,89	0	0
↑	0	-2,44	1	0	0	0	0	0	-3,73	9,11	99,20	-0,31	0
-1,67	0	-4,26	0	1	0	0	0	3,80	0	-0,01	38,03	0,04	0
↑	2,44	0	0	0	1	0	0	-55,09	-46,01	60,63	-82,68	42,83	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1,67	-2,44	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1,67	0	-4,26	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,44	4,26	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 4 Ω_{32}

1	0	0	0	0	0	0	0	-55,37	0	0	0	-261,65	345,44
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-57,67	324,25	0	0	-822,98
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-353,77	747,05	0	0
0	0	-25,05	1	0	0	0	0	0	-74,83	2169,22	-12813,22	-287,36	0
↑	-6,92	16,68	0	1	0	0	0	121,51	0	-0,50	430,53	583,89	0
25,05	0	0	0	0	1	0	0	-1041,58	138,96	-0,83	-3580,00	3421,25	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	6,92	-25,05	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-6,92	0	16,68	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25,05	-16,68	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 7 Ω_{X1}

↑	1	0	0	0	0	0	0	0	-107,23	0	0	0	0	0	0	-576,87	1209,72
↑	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-107,77	0	0	0	0	0	0	-767,03
↑	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	714,48	0
↑	0	6,92	-29,93	0	1	0	0	0	-110,07	-102,01	1881,59	6980,93	2971,10	1480,72	0	-8853,22	1360,53
↑	-6,92	0	8,16	0	0	0	0	165,18	0	0	-117,93	0	0	0	-3811,29	1151,42	
↑	29,93	-8,16	0	0	0	1	0	-1999,68	112,38	0	0	0	0	0	-7742,60	4583,53	
↑	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	6,92	-29,93	
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	8,16	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-8,16	0	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 8 Ω_{X0}

↑	1	0	0	0	0	0	0	0	-135,05	0	0	0	0	0	0	-1343,15	1209,72
↑	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-130,80	0	0	0	0	0	0	-2809,47
↑	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
↑	0	13,84	-29,93	0	1	0	0	0	-404,35	-126,93	2627,45	7966,85	2971,10	505,58	0	2692,12	-3456,58
↑	-13,84	0	24,84	0	0	0	0	525,94	0	0	-460,82	0	0	0	-48502,35	1151,39	-3456,58
↑	29,93	-24,84	0	0	0	1	0	-2832,33	439,62	0	0	0	0	0	2533,02	9236,11	1151,39
↑	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-22306,56	0	9236,11
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13,84	-29,93	-29,93
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	24,84
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-24,84	0	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
↑	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 9 Ω_{31}

1	0	0	0	0	0	0	0	0	-81,30	0	0	0	0	-393,63	488,72
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-82,72	0	0	0	0	-516,61
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-77,57	0	458,66	465,83	0
0	8,59	-27,49	1	0	0	0	0	0	0	-254,91	1640,84	0	5155,22	-7176,41	451,15
-8,59	0	12,42	0	1	0	0	0	0	304,75	0	-497,60	0	-476,00	-563,67	230,84
27,49	-12,42	0	0	0	1	0	0	0	-1746,22	510,78	0	0	-807,77	-6391,60	4606,00
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	8,59	-27,49
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	12,42
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-8,59	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	27,49	-12,42	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 10 Ω_{30}

1	0	0	0	0	0	0	0	0	-109,12	0	0	0	0	-980,48	488,72
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-105,75	0	0	0	0	-2141,21
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-102,49	0	1055,21	2035,81	0
0	15,51	-27,49	1	0	0	0	0	0	0	-584,68	2325,89	0	71,6319	-42136,16	-7141,25
-15,51	0	29,10	0	1	0	0	0	0	711,97	0	-946,56	0	-476,00	14318,18	230,81
27,49	-29,10	0	0	0	1	0	0	0	-2510,99	936,12	0	0	-4642,50	-19142,35	16946,82
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	15,51	-27,49
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-15,51	0	29,10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	27,49	-29,10	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 11 Ω_{20}

		→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
1	P_2	-6,92	0	16,68	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-243,20	8,18
0	P_1	0	8,59	-2,44	1	0	0	0	0	0	0	0	0	235,57	0	-601,96
0	P_3	2,44	-12,42	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-8,15	628,89	0
→	0	8,59	-2,44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	132,77	-14333,22	-1758,83
→	-8,59	0	12,42	0	1	0	0	218,51	0	0	0	0	0	-0,01	-1057,28	0,04
→	2,44	-12,42	0	0	0	1	0	-122,97	-4,81	0	0	0	0	481,21	-523,09	-987,38
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	8,59	-2,44
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-8,59	0	12,42
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2,44	-12,42	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tablica 12

		0														1			2			3																								
		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}											
1	P_2	-6,92	0	16,68	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	168,25	0	-139,55	0	835,21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
2	P_1	0	8,59	-2,44	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	132,77	-1433,22	-1758,85	-987,38	-1758,85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
3	P_2	2,44	-12,42	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	481,21	-523,09	-987,38	-987,38	-987,38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
M_1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	711,97	0	-946,65	-476,00	14318,18	230,81	1269,72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
M_2		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-135,05	0	0	-1343,15	-1343,15	-1343,15	-1269,72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
M_3		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1405,64	0	0	0	0	-2809,47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
P_1		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1171,57	2692,12	2692,12	2692,12	2692,12	2692,12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_2		0	13,84	-29,93	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7966,45	-48502,35	-48502,35	-48502,35	-48502,35	-48502,35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_3		0	-13,84	0	24,84	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	525,94	-460,82	-460,82	-460,82	-460,82	-460,82	-460,82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_4		29,93	-24,84	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-2832,33	439,62	439,62	439,62	439,62	439,62	439,62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	P_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
2	P_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-13,84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	P_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	29,93	-24,84	-24,84	-24,84	-24,84	-24,84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tablica 13

	1	2	3	K			U_1^k	U_2^k	U_3^k
M_0^0	0,002242	-0,000097	0,000022	-0,000748	-0,000839	0,000063	0,000149	0,000088	-0,000153
M_2^0	0,000127	-0,001747	0,000222	-0,012018	-0,004002	-0,002620	0,000050	0,000087	0,000471
M_3^0	-0,008058	-0,000303	0,000060	-0,000992	-0,000956	0,000888	0,000133	0,000587	-0,000289
P_1^0	0,000075	-0,000473	-0,000052	0,000984	0,000549	-0,000708	-0,000040	-0,000062	-0,000064
P_2^0	-0,000600	-0,000031	0,000006	-0,000015	0,000009	0,000136	-0,000008	0,000080	-0,000017
P_3^0	0,000025	-0,000096	-0,000036	0,000870	0,000106	-0,000338	-0,000030	-0,000036	-0,000039
P_1^1	0,000955	0,000003	-0,000053	0,000363	0,000090	-0,001178	-0,000078	-0,000302	-0,000044
P_2^1	0,000003	0,000525	-0,000009	-0,000644	-0,000442	-0,000689	-0,000052	0,000039	0,000033
P_3^1	0,000019	0,000063	-0,000005	0,000183	-0,000176	-0,000016	-0,000002	0,000015	-0,000024
P_2^3	-0,000053	-0,000009	0,000719	0,000259	-0,000039	-0,001616	0,000061	-0,000672	0,000041

nawczą rurociągu $PI_0 = 7653,6 \text{ Tm}^2$). Odwrotność macierzy głównej wpisano do tablicy 13. Macierz odwrotną dzielimy na bloki: pionowe (poziome) linie podziału macierzy głównej, po jej obrocie o kąt prosty w prawo (w lewo) stają się poziomymi (pionowymi) liniami podziału macierzy odwrotnej. Znając wyrazy macierzy odwrotnej można zgodnie z (3.6) otrzymać ogólne rozwiązanie dla obustronnie doskonale sztywno utwierdzonej gałęzi rurociągu. Oddziaływania w utwierdzeniu 0 oraz na podporach pośrednich, dla dowolnych wpływów niemechanicznych, podaje wzór

$$(5.2) \quad \begin{bmatrix} p_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{01} & H_{02} & H_{03} & H_{0K} \\ H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{1K} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{2K} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{3K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \xi_3^* \\ q_K \end{bmatrix},$$

w którym zgodnie z warunkami podporowymi

$$(5.3) \quad p_0 = \begin{bmatrix} M_1^0 \\ M_2^0 \\ M_3^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \end{bmatrix}, \quad q_K = \begin{bmatrix} v_1^K \\ v_2^K \\ v_3^K \\ u_1^K \\ u_2^K \\ u_3^K \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = [P_2^1], \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} P_1^2 \\ P_3^2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = [P_2^3],$$

$$\xi_1^* = [u_2^1], \quad \xi_2^* = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3^* = [u_3^2].$$

Dla rozpatrywanego schematu zależności (5.2) przedstawia tablica 13. Należy pamiętać, że wyrazy kolumn ξ_m^* i q_K (wymuszone przemieszczenia podpór) muszą być określone przy $q_0 = 0$.

W celu sprawdzenia poprawności rachunku wyznaczmy dodatkowo macierze sztywności H_{00} i H_{KK} . Korzystając z bloku macierzy odwrotnej oraz z macierzy T_{n0} ($n = 1, 2, 3, K$) i \tilde{T}_{Km} ($m = 0, 1, 2, 3$) występującej w macierzy zbiorczej (5.1) obliczamy

$$(5.4) \quad H_{00} = -(H_{01} T_{10} + H_{02} T_{20} + H_{03} T_{30} + H_{0K} T_{K0}),$$

$$(5.5) \quad H_{KK} = -(T_{K0} H_{0K} + \tilde{T}_{K1} H_{1K} + \tilde{T}_{K2} H_{2K} + \tilde{T}_{K3} H_{3K}).$$

Tablica 14 H_{00}

0,022909	-0,006766	-0,036046	-0,000058	-0,002354	0,000360
-0,006766	0,081709	-0,010723	0,001702	-0,000420	-0,004637
-0,036046	-0,010723	0,120434	0,000164	0,007403	0,000722
-0,000058	0,001702	0,000164	0,000513	0,000039	0,000126
-0,002354	-0,000420	0,007403	0,000039	0,000714	0,000046
0,000360	-0,004637	0,000722	0,000126	0,000046	0,000426

Macierze te figurują w tablicach 14 i 15; ich symetria i dodatnia określoność jest warunkiem poprawności obliczeń. Dysponując macierzami H_{00} i H_{KK} oraz macierzą

H_{0K} (stanowiącą górny prawy blok macierzy odwrotnej) można dla rozpatrywanej gałęzi napisać również wzory przejścia (3.7) i (3.8).

Tablica 15 H_{KK}

0,028058	-0,001634	-0,007091	-0,000344	-0,000886	-0,001060
-0,001634	0,008832	-0,002201	-0,000107	-0,000046	0,000076
-0,007091	-0,002201	0,039893	0,001398	0,002622	0,000348
-0,000344	-0,000107	0,001398	0,000092	0,000024	0,000031
-0,000886	-0,000046	0,002622	0,000024	0,000894	0,000020
-0,001060	0,000076	0,000348	0,000031	0,000020	0,000063

Literatura cytowana w tekście

1. C. WOŹNIAK, *Statyka przestrzennych rozgałęzionych rurociągów samokompensacyjnych*, Rozpr. Inżyn., 1, 11 (1963).
2. J. N. SOULE, *Solution of multiple branch piping flexibility problems by tensor analysis*, J. Appl. Mech., 2, 23 (1956).
3. The M. W. Kellogg Company, *Design of Piping Systems*, New-York-London 1957.
4. A. GAGE, *Le calcul des tuyauteries a haute temperature*, Dunod, Paris 1957.
5. L. BLANJEAN, E. DONY, *Methode matricielles de calcul de tuyauteries soumis a expansion thermique entreee*, Acier-Stahl-Steel, No. 12, 1957.
6. C. WOŹNIAK, *Integral treatment of bar structures*, Arch. Mech. Stos., 1, 13 (1961).
7. M. ŁUKOWIAK, C. WOŹNIAK, *Rekurencyjne sposoby obliczania rurociągów samokompensacyjnych*, Arch. Inżyn. Ładow., (w druku).

Р е з ю м е

ИЗ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АВТОКОМПЕНСАЦИОННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

В работе [1] дается способ расчета разветвленных автокомпенсационных трубопроводов, в которых для каждого ответвления определяются так наз. формулы перехода, а затем при помощи итерационной процедуры учитывается совместная работа отдельных ответвлений. Формулы для перехода (выражающие силы действующие на концы ответвления в форме перемещений), которые даны в [1], касались ответвлений, опертых исключительно на крайние сечения. В приведенной выше работе эти формулы выводятся, принимая во внимание, как добавочные увеличения жесткости ответвлений за счет промежуточных опор, так и увеличения гибкости за счет компенсаторов и разного рода шарниров. Учитываются также воздействия наружных сосредоточенных и распределенных нагрузок, а также влияние предварительных натяжений, осуществляемых в произвольных сечениях трубопровода. По сравнению с известными методами расчета ответвленных автокомпенсационных трубопроводов приведенный в работе способ, отличается общностью рассуждений, представленных в одной простой исчислительной схеме.

Summary

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF SELF-COMPENSATING PIPELINES

Ref. 1 represents a computation method of a ramified self-compensating pipeline. In this method transition equations are found for each branch, the cooperation between the branches being determined by an iteration procedure. The transition equations (expressing the forces acting on the ends of the branches in terms) of [1] concern branches supported at extreme points only. These equations have been obtained taking into consideration both additional stiffening by means of intermediate supports and flexible compensating elements and various joints. Also the action of external concentrated and distributed loads is accounted for as well as the influence of prestress at any points of the network. In confrontation with other computation methods of ramified self-compensating pipelines the present method is characterized by a considerable generality of the considerations which are contained in a single computation scheme.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 stycznia 1964 r.
