

STAN GRANICZNY RURY GRUBOŚCIENNEJ PRZY JEDNOCZESNYM SKRĘCANIU,
ROZCIĄGANIU I RÓŻNICY CIŚNIEŃ

JACEK SKRZYPEK i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Pod pojęciem analizy «stanu granicznego» będziemy rozumieli określenie rozkładu naprężeń i odkształceń w danym elemencie poddanym działaniu takich obciążeń, które wyczerpują jego nośność przy założeniu idealnej plastyczności materiału. Istnieje więc wtedy pewien schemat zniszczenia, który bądź odpowiada całkowitemu, bądź tylko częściowemu uplastycznieniu elementu.

W pracy jednego z autorów [10] podano ogólne wzory określające stan graniczny rury grubościennej przy następujących ważniejszych założeniach:

- 1) stan naprężenia i odkształcenia jest kołowo symetryczny, czyli składowe stanu naprężenia i odkształcenia zależą tylko od zmiennej r we współrzędnych walcowych r, θ, z ; przemieszczenia mogą przy tym zależeć również od pozostałych zmiennych;
- 2) obciążenia rury są wyłącznie obciążeniami powierzchniowymi — brak sił masowych i obciążeń cieplnych;
- 3) materiał rury jest jednorodny, izotropowy, nieściśliwy i podlega warunkowi plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego.

Przy tych założeniach wykazano, że badany stan odpowiada występowaniu pięciu typów obciążeń, mianowicie rozciąganiu lub ściskaniu, skręcaniu, ciśnieniu normalnemu wewnętrznemu i zewnętrznemu, ciśnieniom stycznym o kierunku osiowym i ciśnieniom stycznym o kierunku obwodowym. Naprężenia normalne są przy tym określone całkami hipereliptycznymi, natomiast naprężenia styczne i odkształcenia — dość prostymi funkcjami elementarnymi. Wykazano również, że stan graniczny może odpowiadać pełnemu lub częściowemu uplastycznieniu, przy czym to ostatnie związane jest z występowaniem ciśnień stycznych, tak że przy rozciąganiu, skręcaniu i różnicy ciśnień normalnych zniszczenie następuje przy całkowitym uplastycznieniu.

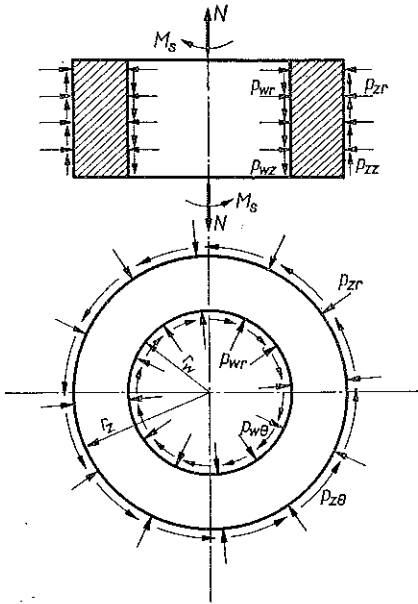
W pracy [11] uogólniono wspomniane rozważania na przypadek występowania obciążeń cieplnych i sił masowych, a jednocześnie na przypadek anizotropii i kołowo-symetrycznej niejednorodności. W obu wymienionych pracach podano jednak tylko wzory ogólne, bez analizy przypadków szczególnych i bez jakichkolwiek obliczeń numerycznych.

W niedawno opublikowanej pracy [5] J. E. PANARELLI i P. G. HODGE zajęli się węższym przypadkiem nośności granicznej rury grubościennej pod jednoczesnym

działaniem skręcania, rozciągania i różnicy ciśnień. Po wyprowadzeniu wzorów ogólnych o postaci całkowej, które stanowią przypadek szczególny wzorów wyprowadzonych w pracy [10], uzyskano na drodze analitycznej efektywne wzory na krzywe graniczne jedynie dla dość już dobrze zbadanych przypadków złożonych, różnica ciśnień — rozciąganie (por. np. W. W. SOKOŁOWSKI [6], A. A. ILIUSZYN i P. M. OGIBAŁOW [4]) oraz rozciąganie-skręcanie (M. ŻYCZKOWSKI [9], M. WNUK [7, 8]). Dla problemu postawionego w tytule pracy, skręcanie-rozciąganie-różnica ciśnień, przytoczono tylko na drodze numerycznej uzyskany wykres dla stosunku średnic rury równego 0,7; podaje on pewne przekroje powierzchni granicznej.

Celem obecnej pracy jest szczegółowa analiza i wyprowadzenie efektywnych wzorów na rozkład naprężeń i powierzchnię graniczną dla przypadku potrójnie złożonego: skręcanie-rozciąganie-różnica ciśnień. Okazuje się mianowicie, że przy pominięciu uwzględnionych w pracy [10] ciśnień stycznych całki hipereliptyczne

przechodzą w znacznie lepiej zbadane całki eliptyczne, które dadzą się sprowadzić do postaci normalnej. Dzięki tablicom W. M. BIELAKOWA, R. I. KRAWCOWEJ i M. G. RAPPOPORTA [1] obliczenia numeryczne dla dowolnego stosunku średnic rury i dowolnego stosunku obciążeń nie przedstawiają już wtedy trudności.



Ry. 1

2. Wzory ogólne

Wzory ogólne zaczerpnijemy z pracy [10] stosując przyjętą tam symbolikę. Przy obciążeniu rury siłą osiową N , momentem skręcającym M_s , ciśnieniami promieniomowymi p_{wr} i p_{zr} , ciśnieniami stycznymi obwodowymi $p_{w\theta}$ i $p_{z\theta}$ oraz osiowymi p_{wz} i p_{zz} (rys. 1) rozkład naprężeń można przedstawić w postaci bezwymiarowej wzorami:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} s_r &= -q_w + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^{\frac{e^2}{\beta^2}} \frac{p(x)}{x^2} dx, & s_{\theta z} &= g\varrho p(\varrho), \\ s_\theta &= -q_w + \frac{2c_r p(\varrho)}{\sqrt{3}\varrho^2} + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^{\frac{e^2}{\beta^2}} \frac{p(x)}{x^2} dx, & s_{zr} &= \frac{\beta c_z}{\varrho}, \\ s_z &= -q_w + \left(e + \frac{c_r}{\sqrt{3}\varrho^2} \right) p(\varrho) + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^{\frac{e^2}{\beta^2}} \frac{p(x)}{x^2} dx, & s_{r\theta} &= \frac{\beta^2 c_\theta}{\varrho^2}, \end{aligned}$$

a rozkład odkształceń wzorami:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} e_r &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c_r}{\varrho^2} - \frac{e}{2}, & e_{\theta z} &= g\varrho, \\ e_\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c_r}{\varrho^2} - \frac{e}{2}, & e_{zr} &= \frac{\beta c_z}{\varrho p(\varrho)}, \\ e_z &= e, & e_{r\theta} &= \frac{\beta^2 c_\theta}{\varrho^2 p(\varrho)}. \end{aligned}$$

Wielkości bezwymiarowe wprowadzono tu wzorami:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} s_r &= \frac{1}{Q} \sigma_r, & s_{\theta z} &= \frac{\sqrt{3}}{Q} \tau_{\theta z}, & e_r &= \frac{3G}{Q} \varepsilon_r, & e_{\theta z} &= \frac{G\sqrt{3}}{Q} \gamma_{\theta z}, \\ s_\theta &= \frac{1}{Q} \sigma_\theta, & s_{zr} &= \frac{\sqrt{3}}{Q} \tau_{zr}, & e_\theta &= \frac{3G}{Q} \varepsilon_\theta, & e_{zr} &= \frac{G\sqrt{3}}{Q} \gamma_{zr}, \\ s_z &= \frac{1}{Q} \sigma_z, & s_{r\theta} &= \frac{\sqrt{3}}{Q} \tau_{r\theta}, & e_z &= \frac{3G}{Q} \varepsilon_z, & e_{r\theta} &= \frac{G\sqrt{3}}{Q} \gamma_{r\theta}, \end{aligned}$$

a ponadto

$$(2.4) \quad q_w = \frac{Pwr}{Q}, \quad q_z = \frac{Pzr}{Q}, \quad \beta = \frac{r_w}{r_z}, \quad \varrho = \frac{r}{r_z},$$

przy czym G oznacza moduł Kirchhoffa (dla ciał nieściśliwych $G = E/3$), Q — granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu.

Występujące we wzorze (2.1) wielkości e , g , c_r , c_θ , c_z oznaczają parametry decydujące o udziale poszczególnych obciążeń; przez p oznaczono funkcję

$$(2.5) \quad p(\varrho) = \sqrt{\frac{\varrho^4 - \beta^2 c_z^2 \varrho^2 - \beta^4 c_\theta^2}{g^2 \varrho^6 + e^2 \varrho^4 + c_r^2}} \quad \text{i} \quad p(x) = \sqrt{\frac{x^2 - \beta^2 c_z^2 x - \beta^4 c_\theta^2}{g^2 x^3 + e^2 x^2 + c_r^2}}.$$

Wzory na poszczególne rodzaje obciążenia przybierają w tym ogólnym przypadku następującą postać:

siła podłużna, rozciągająca lub ściskająca

$$N = 2\pi \int_{r_w}^{r_z} r \sigma_z dr = 2\pi Q r_z^2 \int_{\beta}^1 \varrho s_z d\varrho,$$

a przechodząc do zapisu bezwymiarowego i wprowadzając (2.1)

$$(2.6) \quad n = \frac{N}{FQ} = -q_w + \frac{e}{1 - \beta^2} \int_{\beta^2}^1 p(x) dx + \frac{c_r}{\sqrt{3}(1 - \beta^2)} \int_{\beta^2}^1 \frac{p(x)}{x^2} dx.$$

Aby uzyskać wzór na bezwymiarową różnicę ciśnień zauważmy, że

$$q_z = -s_r \Big|_{\varrho=1},$$

a po wprowadzeniu odpowiedniej zależności z (2.1)

$$(2.7) \quad q_w - q_z = \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^1 \frac{p(x)}{x^2} dx.$$

Wykorzystując powyższe oraz (2.6) otrzymujemy ostatecznie na siłę podłużną

$$(2.8) \quad n = \frac{\beta^2 q_w - q_z}{1 - \beta^2} + \frac{e}{1 - \beta^2} \int_{\beta^2}^1 p(x) dx.$$

Analogiczne wzory dla momentu skręcającego są:

$$M_s = 2\pi \int_{r_w}^{r_z} \tau_{\theta z} r^2 dr = 2\pi \frac{Q}{\sqrt{3}} r_z^3 \int_{\beta}^1 s_{\theta z} \varrho^2 d\varrho,$$

lub w formie bezwymiarowej po uwzględnieniu (2.1)

$$(2.9) \quad m_s = \frac{M_s \sqrt{3}}{W_0 Q} = \frac{2g}{1 - \beta^4} \int_{\beta^2}^1 xp(x) dx,$$

gdzie W_0 oznacza wskaźnik skręcania.

Wyrażeń na pozostałe dwa rodzaje obciążeń (T_z , M_θ) nie cytujemy, gdyż zerują się one w naszym przypadku.

3. Określenie obciążeń (powierzchni granicznej)

Zajmijmy się teraz wyrażeniami na różnicę ciśnień, siłę osiową i moment skręcający i doprowadźmy je do postaci przydatnej w obliczeniach inżynierskich. Przyjmując $c_\theta = c_z = 0$ otrzymamy:

$$(3.1) \quad p(x) = \frac{x}{\sqrt{g^2 x^3 + e^2 x^2 + c_r^2}},$$

a po wprowadzeniu podstawienia $1/x = y$

$$(3.2) \quad p(y) = \frac{y}{c_r \kappa_r \sqrt{y \left(\frac{g^2}{c_r^2} + \frac{e^2}{c_r^2} y + y^3 \right)}},$$

gdzie $\kappa_r = \text{sign } c_r = \pm 1$. Podstawienie to sprowadza wyrażenie trzeciego stopnia w mianowniku do postaci kanonicznej.

Wzory na różnicę ciśnień, siłę podłużną i moment skręcający przyjmą obecnie postać:

$$(3.3) \quad q_w - q_z = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \int_1^{\beta^{-2}} \frac{y dy}{\sqrt{y \left(y^3 + \frac{e^2}{c_r^2} y + \frac{g^2}{c_r^2} \right)}},$$

$$(3.4) \quad n = \frac{\beta^2 q_w - q_z}{1 - \beta^2} + \frac{e\kappa_r}{(1 - \beta^2) c_r} \int_1^{\beta^{-1}} \frac{dy}{y \sqrt{y \left(y^3 + \frac{e^2}{c_r^2} y + \frac{g^2}{c_r^2} \right)}}$$

$$(3.5) \quad m_s = \frac{2g\kappa_r}{(1 - \beta^4) c_r} \int_1^{\beta^{-1}} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y \left(y^3 + \frac{e^2}{c_r^2} y + \frac{g^2}{c_r^2} \right)}}$$

tak że całki hipereliptyczne przechodzą tu na eliptyczne. Zajmiemy się sprowadzeniem tych całek do postaci normalnej i tą samą drogą określimy później również rozkład naprężeń. W tym celu rozpatrzmy najpierw wyrażenie w nawiasie pod pierwiastkiem

$$(3.6) \quad y^3 + \frac{e^2}{c_r^2} y + \frac{g^2}{c_r^2} = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3),$$

bowiem

$$(3.7) \quad \Delta = \frac{g^4}{4c_r^4} + \frac{e^6}{27e_r^6} > 0,$$

i mamy tu do czynienia zawsze z jednym pierwiastkiem rzeczywistym i dwoma zespolonymi sprzężonymi. Pierwiastki te wynoszą:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} y_1 &= \omega_1 - \omega_2, & y_{2,3} &= -\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}(\omega_1 + \omega_2), \\ \omega_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - \frac{g^2}{2c_r^2}}, & 0 &\leq \omega_1 < \infty, \\ \omega_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{g^2}{2c_r^2}}, & 0 &\leq \omega_2 < \infty, \quad \omega_2 \geq \omega_1. \end{aligned}$$

W dalszych obliczeniach dla uzyskania prostszych obliczeń oraz przejrzystego zapisu będziemy stosować również oznaczenia:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2, \\ \alpha_2^2 &= 3(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1 \omega_2). \end{aligned}$$

Przy dwóch pierwiastkach rzeczywistych i dwóch zespolonych sprzężonych wielomianu pod znakiem pierwiastka we wzorach (3.3)-(3.5) sprowadzenie do postaci normalnej uzyskamy przez wprowadzenie nowej zmiennej ζ określonej wzorem:

$$(3.10) \quad \zeta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha_2 y}{\alpha_1 [y - (\omega_1 - \omega_2)]}}.$$

Rozpatrzmy najpierw różnicę ciśnień. W wyniku przeliczeń wyrażenia (3.3) i zastosowania podstawienia (3.10) otrzymamy

$$(3.11) \quad q_w - q_z = \frac{\alpha_r}{\sqrt{3}} \frac{2\alpha_2(\omega_2 - \omega_1)}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{(b + \cos \zeta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} - \\ - \frac{\alpha_r}{\sqrt{3}} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}},$$

gdzie

$$(3.12) \quad k^2 = \frac{3\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2}{8\alpha_1\alpha_2}, \quad b = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}, \\ \zeta_1 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 [1 - (\omega_1 - \omega_2)]}}, \quad \zeta_2 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 [1 - \beta^2(\omega_1 - \omega_2)]}}.$$

Przypomnijmy jeszcze następujące definicje całek eliptycznych zgodne ze stosowanymi oznaczeniami w tablicach W. M. BIELAKOWA, R. I. KRAWCOWEJ i M. G. RAPPOPORTA [1] (w różnych pracach spotkać można różne definicje, zwłaszcza przy całce trzeciego rodzaju).

Normalna całka eliptyczna pierwszego rodzaju

$$(3.13) \quad \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \equiv F(\varphi, k),$$

normalna całka eliptyczna drugiego rodzaju

$$(3.14) \quad \int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} d\vartheta \equiv E(\varphi, k),$$

normalna całka eliptyczna trzeciego rodzaju

$$(3.15) \quad \int_0^y \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1+n\sin^2\vartheta)\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \equiv \Pi(\varphi, n, k).$$

Gdy $y = 1$ ($\varphi = \pi/2$) otrzymujemy pełne całki eliptyczne:

$$(3.16) \quad F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv \mathbf{K}(k), \\ E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv \mathbf{E}(k), \\ \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right) \equiv \mathbf{\Pi}(n, k).$$

Druga z całek we wzorze (3.11) jest wprost całką eliptyczną pierwszego rodzaju, natomiast do pierwszej całki zastosujemy wzór

$$(3.17) \quad \int \frac{dx}{(b + \cos x) \Delta} = \frac{b}{b^2 - 1} \Pi \left(x, \frac{1}{b^2 - 1}, k \right) + \frac{1}{2 \sqrt{(1 - b^2)(k'^2 + k^2 b^2)}} \ln \frac{\Delta \sqrt{1 - b^2} + \sqrt{k'^2 + k^2 b^2} \sin x}{\Delta \sqrt{1 - b^2} - \sqrt{k'^2 + k^2 b^2} \sin x}$$

Wzór ten znajduje się w zasadzie w tablicach GRADSZTEJNA i RYŻIKA [3] jak również BYRDA i FRIEDMANA [2], jednak w obu przypadkach z dwoma błędami: w pracy [3] na str. 183 w liczniku drugiego argumentu funkcji Π jest b zamiast 1, a przed drugim pierwiastkiem w liczniku i mianowniku wyrażenia pod znakiem logarytmu wstawiono omyłkowo k ; w pracy [2] na str. 215 brakuje współczynnika 2 w mianowniku, a pod logarytmem przestawiono współczynniki przy $\sin x$ i Δ ($\sin u$ i du według oznaczenia oryginalnego).

Ostatecznie po wprowadzeniu zamiast logarytmu dogodnej tu funkcji Arth x , otrzymujemy:

$$(3.18) \quad q_w - q_z = \frac{\varkappa_r}{\sqrt{3}} \operatorname{Ar th} \sqrt{\frac{y(y - \omega_1 + \omega_2)}{y^2 + (\omega_1 - \omega_2)y + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2)}} - \frac{\varkappa_r}{\sqrt{3}} \frac{(\omega_2 - \omega_1)^3}{(a_1 + a_2)^2 \sqrt{a_1 a_2}} \Pi(\xi, n, k) - \frac{\varkappa_r}{\sqrt{3}} \frac{\omega_2 - \omega_1}{a_2 + a_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} F(\xi, k) \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-1}}$$

gdzie

$$(3.19) \quad n = - \frac{(a_1 + a_2)^2}{4a_1 a_2}$$

Oznaczenie n (3.19) jest oczywiście różne od (2.6), jednak przyjęto je dla zgodności z [1] i [3].

Wzór (3.18) nie nadaje się jeszcze do obliczeń numerycznych. Wartość parametru n pod znakiem całki eliptycznej trzeciego rodzaju przy korzystaniu z tablic powinna się mieścić w przedziale

$$(3.20) \quad -1 \leq n < \infty,$$

bowiem przy $-\infty < n < -1$ występuje osobliwość i całka jest niedogodna do tabelaryzacji. W naszym przypadku właśnie $-\infty < n < -1$ i występuje osobliwość, która jest jednak pozorna, bowiem taka sama osobliwość występuje w funkcji $\operatorname{Ar th} x$ i powstaje symbol $\infty - \infty$ o wartości skończonej.

Aby sprostać temu wymaganiu skorzystamy z następującego wzoru ([2], str. 13):

$$(3.21) \quad \Pi(\xi, n, k) = - \Pi \left(\xi, \frac{k^2}{n}, k \right) + F(\xi, k) + \sqrt{\frac{-n}{(1+n)(-n-k^2)}} \operatorname{arc tg} \left[\sqrt{\frac{(1+n)(-n-k^2)}{-n(1-k^2 \sin^2 \xi)}} \operatorname{tg} \xi \right],$$

gdzie

$$(3.22) \quad \frac{k^2}{n} = -\frac{3a_1^2 + 4a_1 a_2 + a_2^2}{2(a_1 + a_2)^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że tak określony parametr k^2/n spełnia warunek (3.20) dla dowolnych wartości a_1 i a_2 , jednak pod pierwiastkiem znajdują się liczby ujemne. Pamiętając dalej, że

$$(3.23) \quad \text{arc tg}(ix) = i \text{Arth}(x),$$

wzór (3.21) można zapisać również następująco:

$$(3.24) \quad \Pi(\zeta, n, k) = -\Pi\left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k\right) + F(\zeta, k) + \\ + \sqrt{\frac{-n}{(-n-1)(-n-k^2)}} \text{Arth}\left[\sqrt{\frac{(-n-1)(-n-k^2)}{-n(1-k^2 \sin^2 \zeta)}} \text{tg} \zeta\right].$$

Po wprowadzeniu (3.24) do (3.18), sprawdzeniu równości współczynników przy $\text{Arth}(z)$ (3.18) oraz $\text{Arth}(u)$ (3.24) oraz zastosowaniu wzoru

$$(3.25) \quad \text{Arth}(u) - \text{Arth}(z) = \text{Arth} \frac{u-z}{1-uz},$$

eliminującągo osobliwość otrzymujemy ostatecznie wzór na różnicę ciśnień, nie wykazujący osobliwości i łatwy do stosowania

$$(3.26) \quad q_w - q_z = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\text{Arth} \frac{2\sqrt{y(\omega_2^3 - \omega_1^3) + 3y^2\omega_1\omega_2 + y^4}}{a_1(a_1 + a_2) + 2y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(a_2 - a_1)(\omega_2 - \omega_1)}{(a_2 + a_1)2\sqrt{a_1 a_2}} \Pi\left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k\right) - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} F(\zeta, k) \right]_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}.$$

We wzorze tym zamiast ζ należy podstawić wartość (3.10).

Zajmijmy się obecnie siłą podłużną n . Po wprowadzeniu do wzoru (3.4) zmiennej ζ (3.10) i zastosowaniu oznaczeń (3.8) oraz (3.9) otrzymujemy:

$$(3.27) \quad \bar{n} = \frac{1+\beta^2}{2(1-\beta^2)} \Delta q + \frac{(a_1+a_2) e \kappa_r}{(1-\beta^2) c_r a_1 \sqrt{a_1 a_2} (\omega_2 - \omega_1)} \left[\left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} + 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{(1 + \cos \zeta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} - \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} \right],$$

gdzie \bar{n} oznacza zredukowaną siłę podłużną,

$$(3.28) \quad \bar{n} = n - (-q); \quad \text{ponadto } q = \frac{q_w + q_z}{2}, \quad \Delta q = q_w - q_z.$$

Obie całki z (3.27) również sprowadzają się do całek eliptycznych w postaci normalnej i po kilku przekształceniach otrzymujemy

$$(3.29) \quad \bar{n} = \frac{1+\beta^2}{2(1-\beta^2)} \Delta g + \frac{2e\kappa_r}{(1-\beta^2)c_r a_1} \left\{ \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{a_1 a_2 (a_1 + a_2)}} F(\zeta, k) - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} E(\zeta, k) - \frac{\sqrt{(\omega_2 - \omega_1 + y)[y^2 + (\omega_2 - \omega_1)y + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2)]}}{[a_1(\omega_2 - \omega_1 + y) + a_2 y] \sqrt{y}} \right\} \Bigg|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}$$

Moment skręcający m_s w postaci bezwymiarowej otrzymujemy z wyrażenia (3.5) po zastosowaniu (podobnie jak w poprzednich obliczeniach) nowej zmiennej ζ (3.10) oraz po wprowadzeniu oznaczeń według (3.8) i (3.9):

$$(3.30) \quad m_s = \frac{2g(a_1 + a_2)^2 \kappa_r}{c_r (1 - \beta^4) a_1^2 (\omega_2 - \omega_1)^2 \sqrt{a_1 a_2}} \left\{ \frac{4a_2}{(a_1 + a_2)^2} \times \right. \\ \times \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{(1 - \cos \zeta)^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} - \frac{4a_2}{a_1 + a_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{(1 - \cos \zeta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} + \\ \left. + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} \right\}$$

Po wyrażeniu wszystkich całek za pomocą normalnych całek eliptycznych i łatwych przekształceniach otrzymujemy wzór ostateczny:

$$(3.31) \quad m_s = \frac{4g\kappa_r}{3c_r (1 - \beta^4) (\omega_2 - \omega_1) a_1^3} \left\{ \frac{\sqrt{y^4 + 3y^2 \omega_1 \omega_2 + y(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}{y^2 [a_1 (y - \omega_1 + \omega_2) + a_2 y]} \times \right. \\ \times [(6\omega_1 \omega_2 - a_1^2 - a_1 a_2) y - (\omega_2^3 - \omega_1^3)] + \\ \left. + \frac{3\omega_1 \omega_2 (a_1 - a_2)}{(\omega_2 - \omega_1) \sqrt{a_1 a_2}} F(\zeta, k) + \frac{6\omega_1 \omega_2 a_2}{(\omega_2 - \omega_1) \sqrt{a_1 a_2}} E(\zeta, k) \right\} \Bigg|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}$$

Wzory końcowe (3.26), (3.29) i (3.31) są poszukiwanymi wyrażeniami na graniczne obciążenia wywołujące całkowite uplastycznienie materiału. Są one podane w postaci parametrycznej, a parametrami są e , g , c_r , a ponadto stosunek średnic β .

Dla porządku wypiszmy jeszcze wzory na składowe stanu naprężenia w omawianym przypadku obciążenia momentem skręcającym, siłą podłużną oraz różnicą ciśnień.

Można tu wprost skorzystać z zależności (2.1) pamiętając o (2.5):

$$(3.32) \quad s_r = -q_w + \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\text{Ar th} \frac{2\sqrt{y^4 + 3y^2 \omega_1 \omega_2 + y(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}{2y^2 + a_1 (a_1 + a_2)} + \right. \\ \left. + \frac{(a_2 - a_1) (\omega_2 - \omega_1)}{(a_2 + a_1) 2\sqrt{a_1 a_2}} \Pi\left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k\right) - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} F(\zeta, k) \right] \Bigg|_{y_1=e^{-2}}^{y_2=\beta^{-2}}$$

$$(3.33) \quad s_\theta = -q_w + \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\frac{2}{\sqrt{\frac{g^2}{c_r^2} \varrho^6 + \frac{e^2}{c_r^2} \varrho^4 + 1}} \right] +$$

$$+ \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arth} \frac{2\sqrt{y^4 + 3y^2 \omega_1 \omega_2 + y(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}{2y^2 + a_1(a_1 + a_2)} + \frac{(a_2 - a_1)(\omega_2 - \omega_1)}{(a_2 + a_1) 2\sqrt{a_1 a_2}} \times \right.$$

$$\left. \times \Pi \left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k \right) - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} F(\zeta, k) \right] \Bigg|_{\substack{y_2 = \beta^{-2} \\ y_1 = \varrho^{-2}}}$$

$$(3.34) \quad s_z = -q_w + \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\frac{\frac{e}{c_r} \sqrt{3} \varrho^2 + 1}{\sqrt{\frac{g^2}{c_r^2} \varrho^6 + \frac{e^2}{c_r^2} \varrho^4 + 1}} \right] +$$

$$+ \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arth} \frac{2\sqrt{y^4 + 3y^2 \omega_1 \omega_2 + y(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}{2y^2 + a_1(a_1 + a_2)} + \frac{(a_2 - a_1)(\omega_2 - \omega_1)}{(a_2 + a_1) 2\sqrt{a_1 a_2}} \times \right.$$

$$\left. \times \Pi \left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k \right) - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} F(\zeta, k) \right] \Bigg|_{\substack{y_2 = \beta^{-2} \\ y_1 = \varrho^{-2}}}$$

$$(3.35) \quad s_{\theta z} = \frac{\kappa_r \varrho^3 \frac{g}{c_r}}{\sqrt{\frac{g^2}{c_r^2} \varrho^6 + \frac{e^2}{c_r^2} \varrho^4 + 1}}, \quad s_{zr} = s_{r\theta} = 0.$$

4. Przypadki szczególne

Podamy teraz przykłady efektywnych, numerycznych obliczeń oraz sporządzania krzywych granicznych na podstawie wzorów (3.26), (3.29) i (3.31) dla szczególnych przypadków (różnica ciśnień, siła podłużna, $g = 0$, oraz dla płaskiego stanu odkształcenia, $e = 0$).

4.1. $g = 0$, różnica ciśnień i siła podłużna. W tym przypadku otrzymujemy

$$(4.1) \quad \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e}{c_r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta, \quad \text{gdzie} \quad \vartheta = \frac{e}{c_r},$$

$$a_1 = a_2 = \frac{e}{c_r} = \vartheta.$$

Wzór na różnicę ciśnień ulega znacznemu uproszczeniu i jest wyrażony za pomocą funkcji elementarnych:

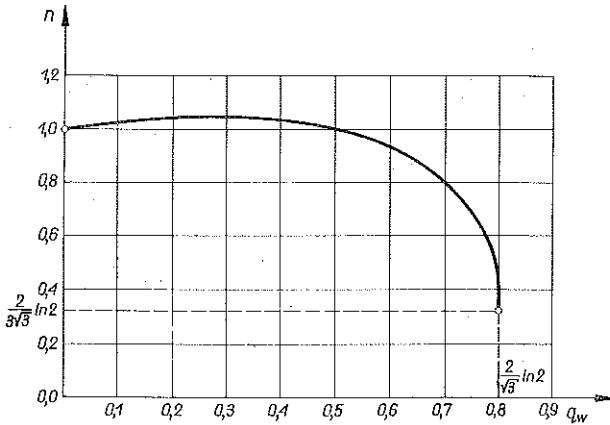
$$(4.2) \quad q_w = q_z = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \operatorname{Arth} \frac{y}{\sqrt{y^2 + \vartheta^2}} \Bigg|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}$$

Także i wyrażenie na siłę podłużną daje się zapisać za pomocą samych tylko funkcji elementarnych:

$$(4.3) \quad \bar{n} = \frac{1 + \beta^2}{2(1 - \beta^2)} \Delta q - \kappa_r \frac{\sqrt{y^2 + \vartheta^2}}{y\vartheta(1 - \beta^2)} \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}$$

Wzór (4.3) podający zależność pomiędzy siłą podłużną a różnicą ciśnień w przypadku osiągnięcia stanu granicznego jest identyczny (po wprowadzeniu odpowiednich oznaczeń) ze wzorem wyprowadzonym przy założeniu tylko tego, szczególnego typu obciążenia (por. np. [6]).

Przyjmując ustaloną wartość β np. $\beta = 1/2$ oraz zakładając kolejno różne wartości dla parametru ϑ , otrzymamy poszukiwaną krzywą graniczną (rys. 2).



Rys. 2

4.2. $e = 0$, płaski stan odkształcenia. Przypadek ten nie jest już tak prosty, jak poprzedni, ale i tu wzory ulegają wybitnemu uproszczeniu. Wprowadźmy oznaczenie

$$(4.4) \quad \left(\frac{g}{c_r}\right)^{2/3} = \theta;$$

wtedy

$$(4.5) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \theta, \quad \alpha_1 = \theta, \quad \alpha_2 = \sqrt{3}.$$

W tym przypadku dogodnie jest wprowadzić nową zmienną

$$(4.6) \quad t = \frac{y}{\theta},$$

bowiem parametr θ pojawi się wtedy tylko w granicach całkowania, a nie w wyrażeniach podcałkowych. Otrzymujemy mianowicie

$$(4.7) \quad q_w - q_z = \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\text{Arth} \frac{2\sqrt{t+t^4}}{1+\sqrt{3+2t^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}(1+\sqrt{3})^2} \Pi\left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k\right) - \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\zeta, k) \right]_{t_1=\frac{1}{\theta}}^{t_2=\frac{1}{\beta^2\theta}}$$

gdzie

$$(4.8) \quad k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{k^2}{n} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{t}{t+1}}.$$

Dla ustalonej wartości β np. $\beta = 1/2$ oraz różnych wartości parametru θ otrzymujemy różne wartości $q_w - q_z$.

Tablice całek eliptycznych sporządzone są dla wartości argumentu ζ zawartego w przedziale

$$(4.9) \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dla wartości ζ nie spełniających warunku (4.9) należy stosować wzory redukcyjne

$$(4.10) \quad \begin{aligned} F(m\pi \pm \varphi, k) &= 2\mathbf{K}(k) \pm F(\varphi, k), \\ \Pi(m\pi \pm \varphi, n, k) &= 2\mathbf{\Pi}(n, k) \pm \Pi(\varphi, n, k). \end{aligned}$$

Wzór na moment skracający podlega dużo większemu uproszczeniu i wyraża się za pomocą funkcji elementarnych:

$$(4.11) \quad m_s = -\frac{4}{3} \frac{\kappa_r}{(1-\beta^4)\theta^{3/2}} \sqrt{\frac{t^4+t}{t^2}} \Bigg|_{t_1=\theta^{-1}}^{t_2=4\theta^{-1}}.$$

Przy obliczaniu wartości wyrażenia pod pierwiastkiem wygodnie jest dla małych wartości parametru θ stosować rozwinięcie w szereg (pozwalające uniknąć odejmowania bliskich sobie wartości):

$$(4.12) \quad \sqrt{\frac{t^4+t}{t^4}} = 1 + \frac{1}{2t^3} - \frac{1}{8t^6} + \dots,$$

a po uwzględnieniu granic

$$(4.13) \quad \sqrt{\frac{t^4+t}{t^4}} \Bigg|_{t_1=\theta^{-1}}^{t_2=4\theta^{-1}} = \sqrt{\frac{t^4+t}{t^4}} \Bigg|_{t_1=\theta^*}^{t_2=4\theta^*} = \frac{1}{128\theta^{*3}} - \frac{1}{2\theta^{*3}} - \frac{1}{32768\theta^{*6}} + \frac{1}{8\theta^{*6}} + \dots,$$

gdzie $\theta^* = 1/\theta$ (dla dużych θ^*). W tym przypadku obciążenia zredukowana siła podłużna jest proporcjonalna do różnicy ciśnień:

$$(4.14) \quad \bar{n} = \frac{1+\beta^2}{2(1-\beta^2)} \Delta q,$$

a przyjmując np. $\beta = 1/2$ otrzymamy

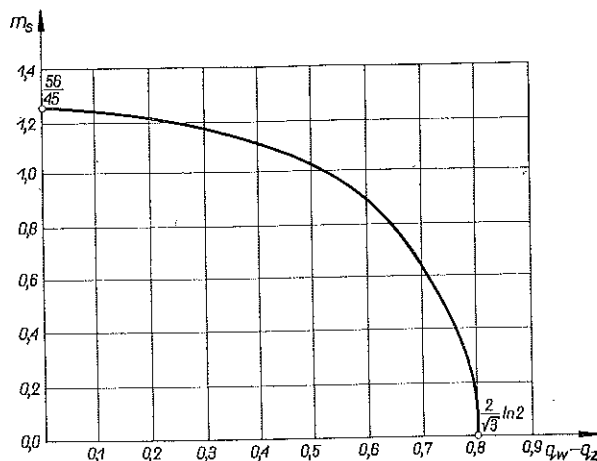
$$(4.15) \quad \bar{n} = \frac{5}{6} \Delta q.$$

Podajmy jeszcze wartości graniczne

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \theta^* \rightarrow 0 \quad (\theta \rightarrow \infty), \quad q_w - q_z \rightarrow 0, \\ m_s \rightarrow \frac{4}{3} \frac{1-\beta^3}{1-\beta^4} = \frac{56}{45} = 1,2444, \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \theta^* &\rightarrow \infty (\theta \rightarrow 0), \quad m_s \rightarrow 0, \\ q_w - q_z &\rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln 2 \cong 0,800372, \end{aligned}$$

przy czym wartości liczbowe podano dla $\beta = 1/2$. Otrzymaną krzywą graniczną przedstawia rys. 3.



Rys. 3

4.3. $n = 0$, brak siły osiowej. Problem ten można rozwiązać na drodze numerycznej ustalając zależność między parametrami e i c_r z warunku $n = 0$. W przypadku małej różnicy ciśnień można jednak związek ten określić analitycznie stosując rozwinięcia w szeregi potęgowe. Wzór na różnicę ciśnień (3.3) zapiszemy w postaci

$$(4.18) \quad \Delta q = \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_1^{\beta^{-2}} \frac{y dy}{\sqrt{y(g^2 + e^2 y + c_r^2 y^3)}}.$$

Przekształćmy jeszcze powyższe wyrażenie następująco:

$$(4.19) \quad \Delta q = \frac{c_r}{\sqrt{3} |g|} \int_1^{\beta^{-2}} \frac{y dy}{\sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{e^2}{g^2} y + \frac{c_r^2}{g^2} y^3}},$$

i zastosujmy rozwinięcie wyrażenia podcałkowego w szereg potęgowy. Otrzymamy wówczas:

$$(4.20) \quad \Delta q = \frac{c_r}{|g| \sqrt{3}} \int_1^{\beta^{-2}} \frac{y dy}{\sqrt{y}} \left(1 - \frac{e^2}{2g^2} y - \frac{c_r^2}{2g^2} y^3 + \dots \right),$$

a po wykonaniu prostych całkowań

$$(4.21) \quad \Delta q = \frac{c_r}{|g|\sqrt{3}} \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{e^2}{5g^2} y^{5/2} - \frac{c_r^2}{9g^2} y^{9/2} + \dots \right]_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}$$

Dla przykładu zajmiemy się przypadkiem samego ciśnienia wewnętrznego, $q_z = 0$, $q_w = \Delta q$. Przekształcając w analogiczny sposób wyrażenie na siłę podłużną oraz uwzględniając (4.21) otrzymujemy

$$(4.22) \quad n = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{c_r}{|g|\sqrt{3}} \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{e^2}{5g^2} y^{5/2} - \frac{c_r^2}{9g^2} y^{9/2} + \dots \right]_1^{\beta^{-2}} + \frac{1}{1-\beta^2} \frac{e}{|g|} \left[-2y^{-1/2} + \frac{e^2}{g^2} y^{1/2} - \frac{c_r^2}{5g^2} y^{5/2} + \dots \right]_1^{\beta^{-2}}$$

We wzorze (4.22) siła podłużna wyrażona jest poprzez parametry e , g , c_r oraz β .

Dla uzyskania prostej zależności między e i c_r , przy której siła podłużna znika, pomińmy wyrażenia zawierające w mianowniku g^2 (pamiętając o uczynionym założeniu dużego skręcania). Po uwzględnieniu granic otrzymamy

$$(4.23) \quad n = \frac{c_r}{|g|} \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1-\beta^3}{1-\beta^2} - \frac{e}{|g|} \frac{2(1-\beta)}{1-\beta^2}$$

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia

$$(4.24) \quad \mu_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1-\beta^3}{1-\beta^2}, \quad \mu_2 = 2 \frac{1-\beta}{1-\beta^2};$$

wzór (4.23) przyjmie wówczas postać

$$(4.25) \quad n = c_r \frac{\mu_1}{|g|} - e \frac{\mu_2}{|g|}$$

Zakładając teraz $n = 0$ otrzymamy poszukiwaną zależność

$$(4.26) \quad e = \frac{\mu_1}{\mu_2} c_r,$$

gdzie

$$(4.27) \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1-\beta^3}{3\sqrt{3}(1-\beta^2)}$$

Podstawiając tę zależność do wzorów ogólnych (3.26), (3.29), (3.31) otrzymujemy część krzywej granicznej położoną w pobliżu czystego skręcania.

Literatura cytowana w tekście

1. В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Раппопорт, *Таблицы эллиптических интегралов*, т. 1-2, Изд. АН СССР, Москва 1962-1963.
2. P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1962.

4. А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, *Упруго-пластические деформации полых цилиндров*, Изд. Московского Университета, Москва 1960.
5. J. E. PANARELLI i P. G. HODGE, *Interaction of pressure, end load, and twisting moment for a rigid-plastic circular tube*, Transaction of the ASME- Series E, J. Appl. Mech., 3, 30 (1963), 396-400.
6. В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1950, tłum. polskie, Warszawa 1956.
7. М. WNUK, *Stan graniczny pręta jednocześnie skręcанego i rozciąganego przy dowolnym kształcie przekroju*, Rozpr. Inżyn., 3, 10 (1962), 565-581.
8. М. WNUK, *Przykłady obliczania krzywych nośności granicznej*, Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963), 611-634.
9. М. ŻYCZKOWSKI, *Przypadek jednoczesnego rozciągania i skręcania pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 2, 3 (1955), 285-322.
10. М. ŻYCZKOWSKI, *The limit load of a thick-walled tube in a general circularly symmetrical case*, Arch. Mech. Stos., 2, 8 (1956), 155-178.
11. М. ŻYCZKOWSKI, *Certain general formulae for plane circularly symmetric plastic states*, Arch. Mech. Stos., 4, 10 (1958), 463-478.

Резюме

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ, ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ КРУЧЕНИИ, РАСТЯЖЕНИИ И РАЗНИЦЕ ДАВЛЕНИЙ

Приводится подробный анализ предельного состояния толстостенной трубы для втрое сложного случая нагрузки крутящим моментом, разницей давлений и продольной силой. В работе [10] даются общие формулы, определяющие предельное состояние толстостенной трубы для более сложного случая нагрузки: растяжения или сжатия, кручения, радиальных внутренних и внешних давлений, касательных давлений в осевом направлении, а также касательных давлений в окружном направлении. Однако, как в настоящей работе, так и в работе [11], где этот случай обобщается, добавляя к нему термические нагрузки и массовые силы, не приводятся никакие особые случаи ни численные расчеты. В настоящей публикации рассматриваемые формулы (при пренебрежении касательными давлениями) использовано при численных расчетах, сводя все существующие там интегралы к нормальным эллиптическим интегралам. Все величины в этих формулах представлены в безразмерной форме.

Основываясь на полученных выражениях для разницы давлений, продольной силы и крутящего момента, даются числовые примеры и примеры изготовления предельных кривых для отдельных случаев нагрузки:

- а — продольная сила и разница давлений,
- б — плоское деформированное состояние,
- в — крутящий момент, разница давлений (и отсутствие осевой силы).

Все расчеты проведены при использовании таблиц эллиптических интегралов В. М. Белякова, Р. И. Кравцовой и М. Г. Раппопорта [1]. Диаграммы изготовлены принимая отношение диаметров, $\beta = 1/2$.

Summary

THE LIMIT STATE OF A THICK-WALLED TUBE UNDER SIMULTANEOUS TORSION, TENSION AND PRESSURE DIFFERENCE

This is a detailed analysis of the limit state of a thick-walled tube in a triply combined case loading, namely with a torque, a pressure difference and a longitudinal force.

General equations describing the limit state of a thick-walled tube are established in [10] for a more complex case of combined tension or compression, torsion, radial inner and outer pressure, and circumferential axial and shear loadings.

However, a discussion of particular cases and examples of numerical computation have not been given in either the paper mentioned above or in [11], in which the above problem is generalized by adding thermal loads and mass forces. In the present publication, the formulae obtained are adapted (shear loadings being disregarded) for numerical computation by reducing all the integrals involved to normal elliptic integrals. All the quantities involved are expressed in dimensionless form.

On the basis of the expressions obtained for the pressure difference, longitudinal force and torque examples of numerical computation are given. The limit curves are presented in the particular cases of

- a) combined longitudinal force and pressure difference,
- b) plane state of strain,
- c) combined torque and pressure difference with no axial force.

All the computations have been performed using tables of elliptic integrals of V. M. BELAKOV, R. I. KRAVCOWA and M. G. RAPPOPORT [1]. The diagrams have been performed assuming for the ratio of diameters, $\beta = 1/2$.

KATEDRA FIZYKI I KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 lipca 1964 r.
