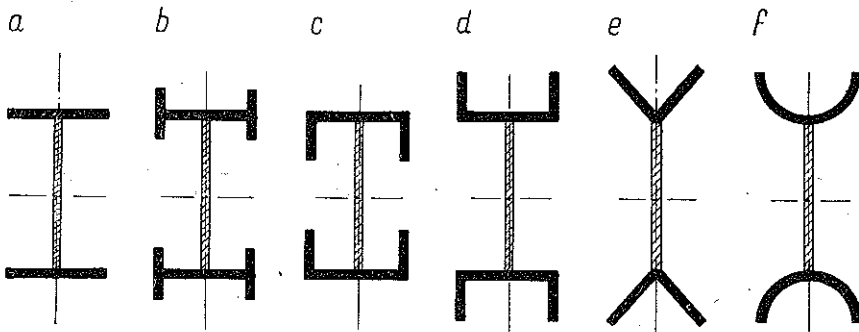


SKRĘCANIE PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH TYPU DWUTEOWNIKA
O ZMIENNEJ WYSOKOŚCI ŚRODNIKA

ZBIGNIEW CYWIŃSKI (GDAŃSK)

1. Uwagi wstępne

W pracy [1] autor niniejszego artykułu rozważał szczegółowo problem skręcania pręta cienkościennego typu powłoki walcowej o zmiennym otwartym przekroju poprzecznym (niesymetrycznym oraz z jedną osią symetrii), gdy zmienność tego przekroju, jako funkcja jego położenia, była określona wyłącznie za pomocą zmian długości konturu przekroju pręta. Przedstawiona w tamtej pracy teoria nie obejmuje w zasadzie innych przypadków zmienności przekroju, jak np. typowego dla budownictwa mostowego przekroju ceowego z poziomo położonym środkiem, wzmocnionego dołem pasami.



Rys. 1

Celem niniejszej pracy jest dalsze rozwinięcie przedstawionej teorii w pracy [1] w zakresie pewnych przekrojów bisymetrycznych. Praca dotyczy mianowicie przekrojów typu dwuteownika, których zmienność charakteryzuje się tym, że przy niezmiennym kształcie i przekroju pasów zmianie ulega jedynie ich wzajemne położenie, co jest spowodowane zmienną wysokością środka. Zakłada się, że zmiany przekroju są symetryczne, a wzdłuż osi pręta łagodne i ciągłe. Pod pojęciem przekrojów typu dwuteownika rozumie się tu przekroje bisymetryczne, które składają się ze środka i pasów, przy czym kształt pasów może być dowolny; wyłącza się tu pasy o przekroju zamkniętym. Kilka przykładów typu dwuteownika podaje rys. 1.

Postawiony problem analizuje się przy zachowaniu wszystkich założeń upraszczających technicznej teorii prętów cienkościennych o stałym przekroju poprzecznym, [2]. Są to hipotezy o nieodkształcalności przekroju poprzecznego, braku odkształcenia postaciowego powierzchni środkowej pręta oraz proporcjonalności spaznienia przy czystym skręcaniu i naprężeń normalnych przy skręcaniu skrępowanym.

W niniejszej pracy ustala się najpierw na drodze energetycznej [3,1] podstawowe równanie różniczkowe problemu skręcania pręta cienkościennego w klasie określonych przekrojów bisymetrycznych. Następnie przechodzi się do ustalenia wyrażień dla sił wewnętrznych: bimomentów i momentów skręcających oraz naprężeń normalnych i tnących, określonych przez siły wewnętrzne. W zakończeniu przedstawia się otrzymane wyniki na tle rozwiązanego w pracy [4] zagadnienia skręcania dwuteownika (rys. 1a) o zmiennej wysokości środka, jako przypadku szczególnego rozważanego tutaj ogólniejszego problemu.

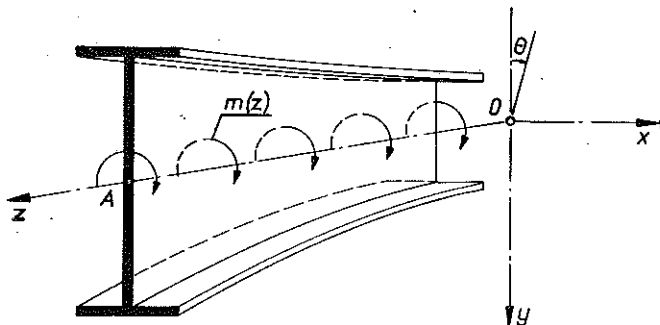
2. Oznaczenia

- A główny biegun wycinkowy przekroju,
- B bimoment,
- E moduł Younga,
- F pole przekroju,
- G moduł sprężystości postaciowej,
- h_z wysokość środka przekroju dwuteowego zmienna wzdłuż osi z ,
- $H = H_k + H_w$ wewnętrzny moment skręcający,
- H_k moment skręcający Saint-Venanta,
- H_w moment giętno-skrętny,
- I_a moment bezwładności przy skręcaniu,
- I_p moment bezwładności przekroju jednej półki dwuteownika względem osi przechodzącej przez środek, określone charakterystyki geometryczne przekroju
- $I_{ww}, I_{ww'}, I_{ww''}, I_{ww'''}, I_{ww''''}$ typu głównego wycinkowego momentu bezwładności przekroju I_{ww} ,
- $I_{w'w'}, I_{w'w''}, I_{w''w''}$ przekroju I_{ww} ,
- $m(z)$ obciążenie skręcające rozłożone w sposób ciągły,
- M skupiony moment skręcający,
- M_p moment zginający działający w płaszczyźnie półki dwuteownika,
- O punkt początkowy prostokątnego układu współrzędnych x, y, z ,
- s współrzędna obiegowa (długość łuku),
- $S_{w(s)}, S_{w'(s)}, S_{w''(s)}, S_{w'''(s)}$ określone charakterystyki geometryczne ustalonej, odciętej części przekroju typu głównego wycinkowego momentu statycznego przekroju $S_{w(s)}$,
- T_p siła tnąca działająca w płaszczyźnie półki dwuteownika,
- $U = U_w + U_z$ energia całkowita,
- U_w energia sprężysta sił wewnętrznych,
- U_z potencjał sił zewnętrznych,
- x, y, z współrzędne prostokątnego układu współrzędnych,
- δ grubość przekroju poprzecznego,

- θ kąt obrotu przekroju pręta,
- σ naprężenie normalne wywołane obciążeniem skręcającym,
- τ odpowiadające naprężeniu σ naprężenie tnące,
- ω pole głównej powierzchni wycinkowej.

3. Podstawowe równanie różniczkowe

Analizę naszego zagadnienia przeprowadza się na przykładzie przekroju dwuteowego (rys. 2), przy czym wyniki tej analizy odnoszą się w całej rozciągłości w zakresie przyjętego charakteru zmian przekroju również do przypadków innych przekrojów bisymetrycznych.



Rys. 2

Badany pręt podparty jest w przekrojach końcowych; rodzaj podparcia jest tu dowolny. Obciążenie zewnętrzne pręta stanowią rozłożone w sposób ciągły momenty skręcające $m(z)$. Przyjęty prostokątny układ współrzędnych x, y, z jest układem lewoskrętnym. Jego oś z jest miejscem geometrycznym środków symetrii poszczególnych przekrojów pręta; ze względu na swe szczególne położenie stanowi ona również oś środków obrotu oraz oś głównych biegunów wycinkowych A . Punkt początkowy O układu x, y, z przyjęty jest na osi z dowolnie, natomiast punkt początkowy współrzędnej obiegowej s przyjmuje się w każdym przekroju na brzegu konturu, przy czym za dodatni przyjmuje się obieg zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Podobnie jak w przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym zakłada się i tu, że w przekroju pręta występują jedynie równomiernie rozłożone na grubości pręta naprężenia normalne σ i naprężenia tnące τ oraz moment skręcający Saint-Venanta H_k jako moment wypadkowy naprężeń tnących czystego skręcania.

Naprężenia normalne σ w dowolnym punkcie zmiennego bisymetrycznego przekroju poprzecznego można wyrazić w postaci następującej:

$$(3.1) \quad \sigma(z, s) = -E [\theta(z) \omega(z, s)]'',$$

gdzie θ oznacza przemieszczenie kątowe (kąt obrotu) przekroju pręta, ω pole głównej powierzchni wycinkowej (w odniesieniu do głównego bieguna wycinkowego A); zaś stała E jest modułem Younga; kreski oznaczają drugą pochodną względem

zmiennej z . Można zauważyć, że zależność (3.1) jest tu ogólniejsza, aniżeli w przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym. Wynika to z faktu, że pole głównej powierzchni wycinkowej ω jest tutaj funkcją nie tylko współrzędnej obiegowej s , ale również współrzędnej z określającej położenie przekroju na długości pręta.

Moment skracający Saint-Venanta H_k wyraża się tak samo, jak dla pręta o stałym przekroju poprzecznym:

$$(3.2) \quad H_k = GI_a \theta',$$

gdzie G jest modułem sprężystości postaciowej, I_a zmiennym wzdłuż osi z momentem bezwładności przy skręcaniu i θ' pierwszą pochodną kąta obrotu θ względem z .

W dalszej analizie wykorzystuje się metodę energetyczną [3 i 1]. Energia sprężysta sił wewnętrznych U_w może być wyrażona następująco:

$$(3.3) \quad U_w = \frac{1}{2E} \int_V \sigma^2 dV + \frac{1}{2} \int_z H_k \theta' dz,$$

gdzie $dV = dx dy dz$.

Potencjał sił zewnętrznych U_z zależy wyłącznie od zewnętrznego obciążenia skręcającego $m(z)$:

$$(3.4) \quad U_z = - \int_z m(z) \theta dz.$$

Jeżeli w równaniu (3.3) uwzględną się związki (3.1) i (3.2), a element objętościowy dV wyrazi się przez $dF dz$ (dF oznacza element pola powierzchni przekroju poprzecznego), to energia całkowita U jako suma energii wewnętrznej U_w i zewnętrznej potencjału U_z przyjmie postać

$$(3.5) \quad U = \frac{1}{2} \int_z [EI_{\omega\omega} \theta'^2 + 4EI_{\omega'\omega'} \theta'^2 + EI_{\omega''\omega''} \theta^2 + 4EI_{\omega\omega'} \theta' \theta'' + 2EI_{\omega\omega''} \theta \theta'' + 4EI_{\omega'\omega''} \theta \theta' + GI_a \theta'^2 - 2m(z) \theta] dz.$$

W wyrażeniu (3.5) zawarte są określone wielkości charakterystyczne dla przekroju, które definiuje się następująco:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} I_{\omega\omega} &= \int_F \omega^2 dF, & I_{\omega\omega'} &= \int_F \omega \omega' dF, & I_{\omega\omega''} &= \int_F \omega \omega'' dF, \\ I_{\omega'\omega'} &= \int_F \omega'^2 dF, & I_{\omega'\omega''} &= \int_F \omega' \omega'' dF, & I_{\omega''\omega''} &= \int_F \omega''^2 dF. \end{aligned}$$

Jak wiadomo, całkowita energia zawarta w pręcie musi mieć wartość minimalną; warunek ten ujmuje równanie Eulera

$$(3.7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta''} \right) = 0,$$

przy czym Φ jest tu funkcją podcałkową wyrażenia (3.5).

Spełniając warunek (3.7) otrzymuje się

$$(3.8) \quad EI_{\omega\omega''}\theta + 2EI_{\omega'\omega''}\theta' + EI_{\omega\omega'''}\theta'' - 2(EI_{\omega'\omega''}\theta + 2EI_{\omega'\omega'''}\theta' + EI_{\omega\omega''''}\theta'')' + \\ + (EI_{\omega\omega''}\theta + 2EI_{\omega\omega'''}\theta' + EI_{\omega\omega''''}\theta'')'' - (GI_d\theta')' = m(z).$$

Równanie (3.8) można doprowadzić do stosunkowo prostej, a zarazem charakterystycznej postaci, jeżeli przy założeniu, że E i G są stałymi, przeprowadzi się w nim określoną operację różniczkowania (składnik $G(I_d\theta)'$ pozostawia się bez zmian), a następnie wyrazi się pochodne określonych wielkości charakterystycznych przekroju przez wielkości typu (3.6) i uporządkuje ze względu na kąt θ i jego pochodne; w wyniku przeprowadzonych działań otrzymuje się mianowicie

$$(3.9) \quad E(I_{\omega\omega}\theta^{IV} + 4I_{\omega\omega'}\theta''' + 6I_{\omega\omega''}\theta'' + 4I_{\omega\omega'''}\theta' + I_{\omega\omega^{IV}}\theta) - G(I_d\theta')' = m(z).$$

W równaniu (3.9) występują dwie dalsze wielkości charakterystyczne przekroju typu (3.6).

Analizując równanie (3.9) narzuca się sam przez się określony symboliczny sposób przedstawienia tego równania. Można zauważyć, że budowa części równania związanej ze stałą E jest podobna do wyrażenia określającego pochodną czwartego rzędu z iloczynu $I_{\omega\omega}\theta$. Zamiast pochodnych charakterystyki podstawowej $I_{\omega\omega} - I_{\omega\omega'}, I_{\omega\omega}'', I_{\omega\omega}'''$ i $I_{\omega\omega}^{IV}$ — występują tu charakterystyki $I_{\omega\omega'}, I_{\omega\omega}'', I_{\omega\omega}'''$ i $I_{\omega\omega^{IV}}$. Korzystając z wzajemnego podobieństwa obu wymienionych typów charakterystyk można równanie (3.9) zapisać symbolicznie w postaci

$$(3.10) \quad E(I_{\omega\omega}\theta)^{****} - G(I_d\theta')' = m(z),$$

gdzie operacja określona czterema gwiazdkami zdefiniowana jest następująco:

$$(3.11) \quad (I_{\omega\omega}\theta)^{****} = I_{\omega\omega}\theta^{IV} + 4I_{\omega\omega'}\theta''' + 6I_{\omega\omega''}\theta'' + 4I_{\omega\omega'''}\theta' + I_{\omega\omega^{IV}}\theta.$$

Równanie (3.10) jest poszukiwanym podstawowym równaniem różniczkowym badanego problemu. Stanowi ono punkt wyjścia do dalszych rozważań. Jest sprawą oczywistą, że równanie to nie może być rozwiązane w sposób ścisły. Rozwiązanie równania można uzyskać jednak metodami przybliżonymi, spośród których najbardziej uniwersalną, a zarazem najmniej skomplikowaną, wydaje się być metoda różnic skończonych [5 i 6]; w przypadkach prostszych można również wykorzystać metodę szeregów potęgowych [4].

4. Naprężenia normalne

Jak wiadomo w teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju stałym [2] lub zmiennym, określonym za pomocą zmian długości konturu [1], wprowadza się pojęcie bimomentu, za pośrednictwem którego wyraża się następnie naprężenia normalne. Bimoment zdefiniować można następująco:

$$(4.1) \quad B = \int_F \sigma \omega dF,$$

gdzie σ jest naprężeniem normalnym [1], zaś ω polem głównej powierzchni wycinkowej rozpatrywanego przekroju. Wstawiając do wzoru (4.1) funkcję (3.1) i uwzględniając oznaczenia (1.6), otrzymuje się

$$(4.2) \quad B = -E(I_{\omega\omega} \theta'' + 2I_{\omega\omega'} \theta' + I_{\omega\omega''} \theta).$$

Wykorzystując zaproponowany uprzednio symboliczny sposób zapisu [por. (3.11)], można zależność (4.2) przedstawić w postaci

$$(4.3) \quad B = -E(I_{\omega\omega} \theta)^{**}.$$

Naprężenia normalne σ określa się z wyjściowej zależności (3.1). Z pomnożenia i podzielenia tej zależności przez $I_{\omega\omega}$ wynika oczywisty związek

$$(4.4) \quad \sigma = -E \left(\frac{I_{\omega\omega} \omega}{I_{\omega\omega}} \theta'' + 2 \frac{I_{\omega\omega} \omega'}{I_{\omega\omega}} \theta' + \frac{I_{\omega\omega} \omega''}{I_{\omega\omega}} \theta \right).$$

W tym miejscu należy zauważyć, że w rozważanym przypadku zmienności przekroju poprzecznego pole głównej powierzchni wycinkowej ω może być przedstawione w postaci iloczynu dwóch niezależnych funkcji, z których jedna, $\varphi(z)$, jest funkcją wyłącznie współrzędnej z , druga zaś, $\psi(s)$, odpowiednio funkcją współrzędnej s . Przy tym założeniu są spełnione następujące związki:

$$(4.5) \quad I_{\omega\omega} \omega' = I_{\omega\omega'} \omega, \quad I_{\omega\omega} \omega'' = I_{\omega\omega''} \omega.$$

Wstawiając (4.5) do (4.4) i uwzględniając (4.2) otrzymuje się:

$$(4.6) \quad \sigma = \frac{B\omega}{I_{\omega\omega}}.$$

Wzór (18) przypomina w zupełności odpowiednią formułę dla naprężeń normalnych σ w przypadku skręcania pręta cienkościennego o stałym przekroju bisymetrycznym z tym zastrzeżeniem, że bimoment dany jest tu w postaci (4.2) lub (4.3), ω i $I_{\omega\omega}$ przyjmują zaś wartości zmienne, zależne od współrzędnej z .

5. Naprężenia tnące

Przy założeniu powolnych i ciągłych zmian przekroju poprzecznego jest spełniona (podobnie jak w przypadku przekroju stałego) zależność

$$(5.1) \quad \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} = 0,$$

z której wynika

$$(5.2) \quad \tau\delta = \tau_0 \delta - \int_0^s \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} ds.$$

Iloczyn $\tau_0 \delta$ oznacza tu strumień naprężeń tnących w początku współrzędnej obiegowej s (na brzegu konturu); w rozważanym tu przypadku $\tau_0 \delta = 0$. Tak więc wzór (5.2) przyjmuje postać

$$(5.3) \quad \tau \delta = - \int_0^s \frac{\partial(\sigma \delta)}{\partial z} ds.$$

Wzór (5.3) przy uwzględnieniu, że $\delta = \text{const}$ i po podstawieniu związku (3.1), sprowadza się do postaci

$$(5.4) \quad \tau \delta = E [S_{\omega(s)} \theta''' + 3S_{\omega'(s)} \theta'' + 3S_{\omega''(s)} \theta' + S_{\omega'''(s)} \theta],$$

przy czym wprowadzono tu oznaczenia:

$$(5.5) \quad S_{\omega(s)} = \int_0^s \omega \delta ds, \quad S_{\omega'(s)} = \int_0^s \omega' \delta ds, \quad S_{\omega''(s)} = \int_0^s \omega'' \delta ds, \quad S_{\omega'''(s)} = \int_0^s \omega''' \delta ds.$$

Wykorzystując wreszcie zaproponowany poprzednio zapis symboliczny można wzór (5.4) przedstawić w postaci następującej:

$$(5.6) \quad \tau = \frac{E}{\delta} [S_{\omega(s)} \theta]^{***}.$$

Naprężenia tnące skręcania skrępowanego τ dane za pomocą wzoru (5.6) określają jak wiadomo moment giętno-skrętny H_ω :

$$(5.7) \quad H_\omega = \int_F \tau \delta d\omega.$$

Podstawiając do (5.7) funkcję (5.4) otrzymuje się

$$(5.8) \quad H_\omega = E \left(\theta''' \int_F S_{\omega(s)} d\omega + 3\theta'' \int_F S_{\omega'(s)} d\omega + 3\theta' \int_F S_{\omega''(s)} d\omega + \theta \int_F S_{\omega'''(s)} d\omega \right).$$

Z całkowania przez części poszczególnych całek wyrażenia (5.8) wynika

$$(5.9) \quad \int_F S_{\omega(s)} d\omega = -I_{\omega\omega}, \quad \int_F S_{\omega'(s)} d\omega = -I_{\omega\omega'}, \\ \int_F S_{\omega''(s)} d\omega = -I_{\omega\omega''}, \quad \int_F S_{\omega'''(s)} d\omega = -I_{\omega\omega'''},$$

co prowadzi do następującego wzoru na moment giętno-skrętny H_ω :

$$(5.10) \quad H_\omega = -E (I_{\omega\omega} \theta''' + 3I_{\omega\omega'} \theta'' + 3I_{\omega\omega''} \theta' + I_{\omega\omega'''} \theta)$$

lub w zapisie symbolicznym

$$(5.11) \quad H_\omega = -E (I_{\omega\omega} \theta)^{***}.$$

Z porównania wyrażeń (4.3) i (5.11) wynika, że moment giętno-skrętny H_ω można napisać również symbolicznie:

$$(5.12) \quad H_\omega = B^*.$$

Można wykazać, że moment giętno-skrętny w postaci (5.10) jest całką (z przeciwnym znakiem) części wyrazów występujących w równaniu (3.8) związanych ze stałą E .¹ Całkując także pozostałe składniki tego równania dojdziemy do wniosku, że i tu również jest spełniona znana zależność wyprowadzona w teorii skręcania prętów cienkościennych o stałym przekroju

$$(5.13) \quad H = H_k + H_\omega,$$

gdzie moment skręcający czystego skręcania (Saint-Venanta) H_k ma postać (3.2), a moment giętno-skrętny H_ω ma jedną z postaci (5.10)–(5.12); H oznacza tu całkowity wewnętrzny moment skręcający działający w przekroju pręta.

Podobnie jak w przypadku prętów o stałym przekroju poprzecznym, można również tutaj przedstawić naprężenia tnące skręcania skrępowanego τ jako funkcję momentu giętno-skrętnego H_ω . Mnożąc i dzieląc obie strony równania (5.6) przez $I_{\omega\omega}$ otrzymuje się

$$(5.14) \quad \tau = \frac{E}{\delta} \left(\frac{I_{\omega\omega}}{I_{\omega\omega}} S_{\omega(s)} \theta'''' + 3 \frac{I_{\omega\omega}}{I_{\omega\omega}} S_{\omega'(s)} \theta''' + 3 \frac{I_{\omega\omega}}{I_{\omega\omega}} S_{\omega''(s)} \theta'' + \frac{I_{\omega\omega}}{I_{\omega\omega}} S_{\omega'''(s)} \theta \right).$$

Jak stwierdzono poprzednio, pole głównej powierzchni wycinkowej ω może być w rozważanym przypadku przedstawione w postaci $\omega(z, s) = \varphi(z) \psi(s)$. Przy tym założeniu można wykazać, że mają następujące związki:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} I_{\omega\omega} S_{\omega'(s)} &= I_{\omega\omega'} S_{\omega(s)}, \\ I_{\omega\omega} S_{\omega''(s)} &= I_{\omega\omega''} S_{\omega(s)}, \\ I_{\omega\omega} S_{\omega'''(s)} &= I_{\omega\omega'''} S_{\omega(s)}. \end{aligned}$$

Z podstawienia związków (5.15) do równania (5.14) i równoczesnego uwzględnienia wyrażenia (5.10) wynika

$$(5.16) \quad \tau = - \frac{H_\omega S_{\omega(s)}}{I_{\omega\omega} \delta}.$$

Otrzymany wzór (5.16) określający naprężenia tnące skręcania skrępowanego τ ma postać identyczną z postacią wzoru dla przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym, jednak z tą różnicą, że moment giętno-skrętny H_ω wyznacza się tu ze wzorów (5.10)–(5.12), a nadto — główny wycinkowy moment bezwładności $I_{\omega\omega}$ oraz wycinkowy moment statyczny $S_{\omega(s)}$ są tutaj funkcjami współrzędnymi z .

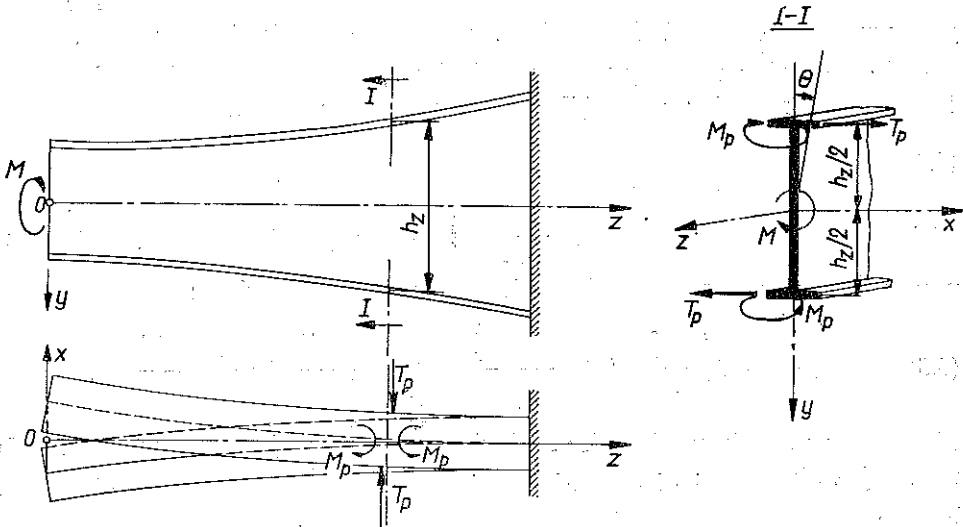
Jak wiadomo, obok wyznaczonych już naprężeń tnących skręcania skrępowanego τ występują w przekroju dodatkowo naprężenia tnące czystego skręcania τ_k . Te ostatnie oblicza się z podobnego wzoru jak w przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym $\tau_k = H_k/I_d \delta$, przy czym moment bezwładności przy skręcaniu I_d jest tu funkcją współrzędnej z .

¹ Ścisłe: $\int E (I_{\omega\omega} \theta)'''' dz = -H_\omega - \int H_\omega \frac{\omega'}{\omega} dz$. Ostatni składnik przy łagodnych zmianach przekroju można pominąć.

6. Przykład zastosowania opracowanej teorii dla dwuteownika.

Porównanie z wynikami pracy [4]

W pracy [4] rozpatrzono szczegółowo przykład skręcania belki wspornikowej o zmiennym przekroju dwuteowym, gdy o charakterze zmienności tego przekroju decydowała wyłącznie zmieniająca się wysokość jego środka. Przypadek ten podlega w całej rozciągłości opracowanej tutaj teorii. Jest więc sprawą oczywistą, że obie metody obliczeniowe, tzn. wyprowadzona w pracy [4] dla przypadku szczególnego oraz ogólna, przedstawiona w niniejszej pracy, powinny prowadzić do identycznych wyników. Konfrontacja taka może w pewnym stopniu świadczyć o poprawności tych metod. Zaproponowany tu sposób weryfikacji obu metod obliczeniowych przeprowadzi się jedynie w odniesieniu do wyrażeń na siły wewnętrzne, tj. bimomentu B i momentu giętno-skrętnego H_ω . Analizie podlega pręt pokazany na rys. 3.



Rys. 3

Jak wiadomo z teorii skręcania prętów cienkościennych o stałym przekroju wskutek skręcania pręta dwuteowego powstają w jego przekroju poprzecznym naprężenia normalne wywołane momentami zginającymi M_p , działającymi w płaszczyznach półek, oraz naprężenia tnące jako suma naprężeń tnących czystego skręcania i naprężeń tnących skręcania skrępowanego, przy czym te ostatnie wywołane są siłami tnącymi T_p , działającymi w płaszczyznach półek. Autor pracy [4] założył, że identyczny stan naprężeń występuje również w rozpatrywanym przez niego przypadku pręta o przekroju zmiennym, przy czym pominął nachylenie pasów.

Uzupełniając pracę [4]², można bimoment wyznaczyć z prostej zależności:

$$(6.1) \quad B = M_p h_z.$$

² W pracy [4] brak pojęcia bimomentu.

Uwzględniając, że $M_p = -EI_p \left(\frac{h_z}{2} \theta \right)''$, gdzie I_p oznacza moment bezwładności przekroju jednej półki dwuteownika względem osi y , a kreski — pochodne względem zmiennej z , można wyrażenie (6.1) przedstawić w postaci

$$(6.2) \quad B = -E \left(\frac{I_p h_z^2}{2} \theta'' + 2 \frac{I_p h_z h_z'}{2} \theta' + \frac{I_p h_z h_z''}{2} \theta \right).$$

Otóż łatwo jest teraz wykazać, że współczynniki ułamkowe stojące przy θ i jej pochodnych są odpowiednio równe

$$(6.3) \quad \frac{I_p h_z^2}{2} = I_{\omega\omega}, \quad \frac{I_p h_z h_z'}{2} = I_{\omega\omega'}, \quad \frac{I_p h_z h_z''}{2} = I_{\omega\omega''},$$

gdzie prawe strony tych równań określają wyrażenia (3.6). Uwzględniając związki (6.3), otrzymuje się wprost postać bimomentu daną zależnościami (4.2) lub (4.3), jako wyrażenie ogólne, które wynika z podanej w niniejszej pracy teorii.

Podobną analizę można przeprowadzić również dla momentu giętno-skrętnego. Moment ten, zgodnie z pracą [4], daje się wyrazić w postaci

$$(6.4) \quad H_\omega = T_p h_z.$$

Mając na uwadze, że $T_p = -EI_p \left(\frac{h_z}{2} \theta \right)'''$ (przy podobnych oznaczeniach poprzednio), można moment giętno-skrętny wyrazić następująco:

$$(6.5) \quad H_\omega = -E \left(\frac{I_p h_z^2}{2} \theta'''' + 3 \frac{I_p h_z h_z'}{2} \theta'' + 3 \frac{I_p h_z h_z''}{2} \theta' + \frac{I_p h_z h_z'''}{2} \theta \right).$$

Pierwsze trzy ułamkowe składniki znajdujące się po prawej stronie wyrażenia (6.5) zostały już określone za pomocą wzorów (6.3), ostatni zaś ma również podobną postać:

$$(6.6) \quad \frac{I_p h_z h_z'''}{2} = I_{\omega\omega'''}.$$

Podstawiając wyrażenia (6.3) i (6.6) do zależności (6.5), otrzymuje się wzór postaci (5.10), który wyprowadzony został na podstawie przedstawionej w niniejszej pracy ogólnej teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju typu dwuteowego.

7. Uwagi końcowe

Przedstawiona w niniejszej pracy teoria stanowi dalszy etap na drodze do opracowania ogólnej teorii skręcania prętów cienkościennych o zmiennych otwartych przekrojach poprzecznych. Pomijając błędy rozwiązań numerycznych możemy na jej podstawie obliczać konkretne zadania z podobną dokładnością, jaką uzyskuje się przy obliczaniu prętów cienkościennych o stałym przekroju poprzecznym za pomocą tzw. technicznej teorii skręcania, opracowanej w najpełniejszej postaci

przez W. Z. WŁASOWA [2]. Teoria opiera się bowiem na wszystkich założeniach upraszczających teorii prętów cienkościennych o stałych otwartych przekrojach poprzecznych. Ma ona zastosowanie wyłącznie do prętów określonego typu, tj. prętów typu dwuteownika o przekrojach bisymetrycznych, zmieniających się wyłącznie za pośrednictwem zmian rozstawu pasów. Przypadek zmiennej wzdłuż osi pręta szerokości pasów nie jest objęty niniejszą teorią.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. CYWIŃSKI, *Teoria skręcania prętów cienkościennych o zmiennej sztywności*, Arch. Inżyn. Łąd., 2, 10 (1964).
2. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
3. F. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York-Toronto-London 1952.
4. F. HAMAYOSHI, *On Torsion of I-beam with a Web of Variable Height*, Mem. Engng, Hokkaido Univ., 11, 1961.
5. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
6. M. G. SALVADORI, M. L. BARON, *Numerical Methods in Engineering*, Englewood Cliffs, N. J. 1961.

Резюме

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ТИПА ДВУТАВРА С ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТОЙ ЕГО СТЕНКИ

Работа представляет собой очередной этап развития общей теории кручения тонкостенных стержней с переменным сечением открытого профиля. Она основана на всех классических принципах технической теории кручения тонкостенных стержней с постоянным сечением.

Предлагаемая теория относится исключительно к стержням типа двутавра бисимметрического сечения с переменным расстоянием его поясов. С помощью энергетического метода выведено основное дифференциальное уравнение задачи (3.10), получены выражения определяющие внутренние усилия [бимомент B (4.3) и крутящие моменты H_x (3.2) и H_w (5.12)], а также определены формулы для напряжений (нормальных и касательных) при стесненном кручении — (4.6) и (5.16).

Сравниваются результаты, полученные согласно предлагаемой теории с результатами, определенными в работе [4].

Summary

TORSION OF THIN-WALLED DOUBLE-TEE BARS WITH A WEB OF VARIABLE HEIGHT

This paper is a next step on the way to elaborate a general theory of thin-walled bars of variable open cross-sections subjected to torsion. It is based on all classic principles of the technical torsion theory of thin-walled bars with constant cross-sections.

The theory presented relates exclusively to bars of bisymmetric I-cross-section type which change by variation of flange distance.

By the way of the energy-method the fundamental differential equation of the problem (3.10) is derived, the expressions for cross-section forces [warping moment B (4.3) and torsion moments H_k (3.2) and H_ω (5.12)], are established and formulae for normal — (4.6) and shearing stress (5.16) are given.

In conclusion, the results obtained by the presented theory are compared with those given in the paper [4].

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lipca 1964 r.