

PEWNA METODA PRZYBLIŻONEGO OBLICZANIA
DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIEŃ DYFUZJI

ZYGMUNT THRUN (GDAŃSK)

1. Uwagi wstępne

Przybliżone rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia dyfuzji lub przewodnictwa cieplnego można przyjąć jak wiadomo w postaci

$$(1.1) \quad T^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(x, y).$$

Tutaj φ_i są funkcjami współrzędnych przestrzennych, które przyjmuje się zgodnie z danymi warunkami brzegowymi zagadnienia. Niewiadome funkcje zmiennej czasowej a_i wyznacza się z układu równań różniczkowych w ten sposób, ażeby spełniały warunek początkowy.

Przybliżone rozwiązanie można również poszukiwać w postaci następującej:

$$(1.2) \quad T^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \varphi_i(y).$$

W powyższym wyrażeniu funkcje $\varphi_i(y)$ muszą spełniać tylko część danych warunków brzegowych, a pozostałe warunki brzegowe oraz warunek początkowy spełniają niewiadome funkcje $a_i(x, t)$. Funkcje te wyznaczyć można również z pewnego układu równań różniczkowych. Rozwiązanie (1.2) będzie oczywiście znacznie dokładniejsze niż (1.1), ponieważ z góry obieramy tu tylko funkcje jednej zmiennej przestrzennej, pozostałe zaś dwóch zmiennych wyznaczamy już z równań różniczkowych zagadnienia. Rozwiązanie (1.2) zajmuje miejsce pośrednie między rozwiązaniami przybliżonym (1.1) i ścisłym.

2. Metoda rozwiązania we współrzędnych prostokątnych x, y

W dwuwymiarowym, niejednorodnym i anizotropowym obszarze Ω dane zagadnienie przewodnictwa cieplnego jest określone za pomocą znanego równania różniczkowego przewodnictwa

$$(2.1) \quad L(T) - A = \gamma c T_t - (K_x T_x)_x - (K_y T_y)_y - A(x, y, t) = 0$$

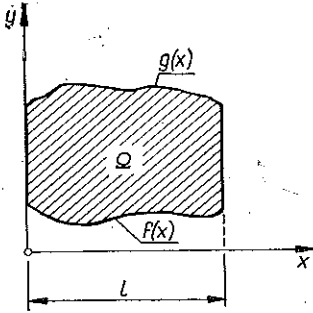
przy warunkach brzegowych

$$(2.2) \quad k_1 T_x + k_2 T_y + k_3 T = 0$$

oraz dla warunku początkowego

$$(2.3) \quad T(x, y, 0) = f(x, y).$$

W powyższych i dalszych zależnościach różniczkowanie względem określonej zmiennej oznaczono przecinkiem z zaznaczeniem indeksowym zmiennej. Przez $A(x, y, t)$ oznaczamy ciepło generowane przez jednostkę obszaru w jednostce czasu.



Rys. 1

Osie prostokątnego układu współrzędnych x, y są tzw. «głównymi osiami przewodnictwa», a wielkości K_x i K_y «głównymi współczynnikami przewodnictwa» dla danej anizotropii termicznej materiału ośrodka. Niech obszar Ω będzie ograniczony jak na rys. 1. Funkcje $\varphi_i(y)$ występujące w rozwiązaniu przybliżonym (1.2) muszą spełniać jednorodne warunki brzegowe (2.2) wzdłuż krawędzi $f(x)$ i $g(x)$; wzdłuż brzegów $x=0$ i $x=l$ poszukiwane funkcje $a_i(x, t)$ powinny spełniać warunki brzegowe. Wstawmy wyrażenie (1.2) do równania różniczkowego (2.1), przemnożmy całość przez $\varphi_k(y)$ i scałkujemy w granicach od $f(x)$ do $g(x)$:

$$(2.4) \quad \int_{f(x)}^{g(x)} [L(T^*) - A] \varphi_k(y) dy = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Otrzymamy w ten sposób układ n równań różniczkowych dla wyznaczenia niewiadomych funkcji $a_i(x, t)$:

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^n (a_{i,t} A_{ik} + a_{i,xx} B_{ik} + a_{i,x} C_{ik} + a_i D_{ik}) = Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

W powyższym wzorze przyjęto oznaczenia:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \int_{f(x)}^{g(x)} \gamma c \varphi_i \varphi_k dy, & B_{ik} &= - \int_{f(x)}^{g(x)} K_x \varphi_i \varphi_k dy, \\ C_{ik} &= - \int_{f(x)}^{g(x)} K_{x,x} \varphi_i \varphi_k dy, & D_{ik} &= - \int_{f(x)}^{g(x)} (K_y \varphi_{i,y})_{,y} \varphi_k dy, \\ Z_k &= \int_{f(x)}^{g(x)} A \varphi_k dy. \end{aligned}$$

Do układu równań różniczkowych (2.5) odnoszą się warunki brzegowe (2.2), które muszą być spełnione wzdłuż brzegów obszaru $x=0$ i $x=l$ oraz warunek początkowy (2.3).

Przykład. Wyznaczyć niestacjonarny rozkład temperatur w jednorodnym i izotropowym obszarze prostokątnym ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq b$), generującym ciepło według zależności $A = A_0 e^{-\alpha t}$. Krawędzie $x=0$, $x=l$, $y=0$, $y=b$ niech

będą utrzymywane w temperaturze zerowej oraz w chwili $t = 0$ niech temperatura w całym obszarze wynosi zero.

Przyjmujemy pierwsze przybliżenie w postaci

$$(2.7) \quad T_1^*(x, y, t) = a_1(x, t) \varphi_1(y) = a_1(x, t) b^2(\eta - \eta^2),$$

gdzie $y = \eta b$.

Po wyznaczeniu współczynników (2.6):

$$A_{11} = -\frac{B_{11}}{\kappa} = \gamma c \frac{b^5}{30}, \quad C_{11} = 0, \quad D_{11} = K \frac{b^3}{3}, \quad Z_1 = \frac{A_0 b^3}{6} e^{-\omega t}, \quad \kappa = \frac{K}{\gamma c}$$

równanie (2.5) przyjmie postać

$$a_{1,xx} - \frac{1}{\kappa} a_{1,t} - \frac{10}{b^2} a_1 = \frac{-5A_0}{Kb^2} e^{-\omega t}.$$

Wykonując transformacje Laplace'a

$$\bar{a}_1(x, p) = \int_0^{\infty} a_1(x, t) e^{-pt} dt,$$

otrzymamy

$$\bar{a}_{1,xx} - \left(\frac{p}{\kappa} + \frac{10}{b^2} \right) \bar{a}_1 = \frac{-5A_0}{Kb^2} \frac{1}{(p + \omega)}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania przy danych warunkach brzegowych $\bar{a}_1(0, p) = 0$, $\bar{a}_2(1, p) = 0$ jest funkcja

$$\bar{a}_1(x, p) = \frac{5A_0}{Kb^2(p + \omega)(p + 10\kappa/b^2)} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{p/\kappa + 10/b^2} \right]}{\operatorname{ch} \left(\frac{l}{2} \sqrt{p/\kappa + 10/b^2} \right)} \right\}.$$

Retransformacja Laplace'a prowadzi do funkcji

$$(2.8) \quad a_1(x, t) = \frac{5\kappa A_0}{Kb^2(\omega - 10\kappa/b^2)} (e^{-10\kappa t/b^2} - e^{-\omega t}) - \frac{5\kappa A_0}{Kb^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt} \operatorname{ch} \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{p/\kappa + 10/b^2} \right]}{(p + \omega)(p + 10\kappa/b^2) \operatorname{ch} \left(\frac{l}{2} \sqrt{p/\kappa + 10/b^2} \right)} dp.$$

Podcałkowa funkcja analityczna ma bieguny pojedyncze w punktach $p = -\omega$, $p = -10\kappa/b^2$ oraz $p = -10\kappa/b^2 - \kappa\pi^2(2n+1)^2/l^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Residua w powyższych biegunach wynoszą odpowiednio

$$\frac{e^{-\omega t} \operatorname{ch} \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) \sqrt{10/b^2 - \omega/\kappa} \right]}{(10\kappa/b^2 - \omega) \operatorname{ch} \left(\frac{l}{2} \sqrt{10/b^2 - \omega/\kappa} \right)}, \quad \frac{e^{-10\kappa t/b^2}}{(\omega - 10\kappa/b^2)},$$

$$\frac{4(-1)^{n+1} \cos \left[(2n+1) \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \right]}{\pi (2n+1) [\omega - 10 \kappa/b^2 - \kappa \pi^2 (2n+1)^2/l^2]} \exp \{ - \kappa t [10/b^2 + \pi^2 (2n+1)^2/l^2] \}.$$

Za pomocą znanego twierdzenia Cauchy'ego o sumie residuów otrzymamy wartość całki niewłaściwej występującej we wzorze (2.8). Ostatecznie pierwszym przybliżeniem jest funkcja

$$T_1^*(x, y, t) = a_1(x, t) \varphi_1(y) = \frac{-5A_0 b^2}{K\lambda^2} e^{-\omega t} (\eta - \eta^2) \left\{ 1 - \frac{\cos \left[\frac{\lambda}{b} \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cos \frac{\lambda l}{2b}} \right\} - \frac{20A_0 b^2}{K\pi} (\eta - \eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin [(2n+1) \pi x/l] \exp \{ - \kappa t [10/b^2 + \pi^2 (2n+1)^2/l^2] \}}{(2n+1) [\pi^2 b^2 (2n+1)^2/l^2 - \lambda^2]},$$

gdzie $\lambda^2 = (\omega b^2/\kappa - 10)$.

3. Współrzędne sferyczne r, θ

Dla zagadnień osiowo-symetrycznych, w których występuje funkcja $T(r, \theta, t)$, równanie przewodnictwa (2.1) można, jak wiadomo, przedstawić w postaci

$$(3.1) \quad L(T) - A = c\gamma T_{,t} - \frac{1}{r^2} (K_r r^2 T_{,r})_{,r} - \frac{1}{r^2} [K_\theta (1 - \mu^2) T_{,\mu}]_{,\mu} - A(r, \mu, t) = 0,$$

gdzie $\mu = \cos \theta$.

Można tutaj poszukiwać rozwiązania przybliżonego

$$(3.2) \quad T^*(r, \mu, t) = \sum_{i=0}^n a_i(r, t) \varphi_i(\mu).$$

Układ równań różniczkowych dla wyznaczenia niewiadomych funkcji $a_i(r, t)$ otrzymamy z analogicznych do (2.4) warunków ortogonalności

$$\int_{(\mu)} [L(T^*) - A] \varphi_k(\mu) d\mu = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

w następującej postaci:

$$(3.3) \quad \sum_{i=0}^n \left(a_{i,t} A_{ik} + a_{i,rr} B_{ik} + \frac{a_{i,r}}{r^2} D_{ik} + \frac{a_i}{r^2} C_{ik} \right) = Z_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Wartości powyższych współczynników wynoszą

$$(3.4) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \int_{(\mu)} c\gamma \varphi_i \varphi_k d\mu, & B_{ik} &= - \int_{(\mu)} K_r \varphi_i \varphi_k d\mu, \\ C_{ik} &= - \int_{(\mu)} [K_\theta (1 - \mu^2) \varphi_{i,\mu}]_{,\mu} \varphi_k d\mu, \\ D_{ik} &= - \int_{(\mu)} (K_r r^2)_{,r} \varphi_i \varphi_k d\mu, & Z_k &= \int_{(\mu)} A \varphi_k d\mu. \end{aligned}$$

Przykład. W jednorodnym i izotropowym obszarze kulistym w odległości $r = r'$ od ośrodka kuli działa chwilowe, punktowe źródło ciepła, które możemy przedstawić za pomocą funkcji Diraca:

$$A(r, \mu, t) = \frac{1}{2\pi r^2} \delta(t) \delta(r - r') \delta(1 - \mu).$$

Powierzchnia tej kuli jest utrzymywana w temperaturze zerowej. Promień kuli $r = a$. Przybliżone rozwiązanie (3.2) możemy określić za pomocą wielomianów Legendre'a następująco:

$$(3.5) \quad T_n^*(r, \mu, t) = \sum_{i=0}^n a_i(r, t) P_i(\mu).$$

Wyznaczamy współczynniki (3.4) dla $i \neq k$ znajdziemy $A_{ik} = B_{ik} = C_{ik} = D_{ik} = 0$; dla $i = k$ natomiast

$$A_{kk} = \frac{-B_{kk}}{\kappa} = \frac{C_{kk}}{\kappa k(k+1)} = \frac{2cy}{2k+1}, \quad D_{kk} = 0,$$

$$Z_k = \int_{-1}^1 AP_k(\mu) d\mu = \delta(t) \delta(r - r') / 2\pi r^2.$$

Układ równań (3.3) sprowadzi się do równań niezależnych, które po wykonaniu transformacji Laplace'a przyjmą postać

$$(3.6) \quad \bar{a}_{k,rr}(r, p) + \frac{2}{r} \bar{a}_{k,r}(r, p) - \left[\frac{p}{\kappa} + \frac{k(k+1)}{r^2} \right] \bar{a}_k = \\ = \frac{-(2k+1)}{2K} \frac{\delta(r - r')}{2\pi r^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Do równań tych odnoszą się warunki następujące brzegowe dla $r = 0$, \bar{a}_k muszą przyjmować wartości ograniczone, a dla $r = a$, $\bar{a}_k = 0$.

Drogą podstawienia $y_k = \sqrt{r} \bar{a}_k$ układ (3.6) można sprowadzić do zmodyfikowanych równań Bessela:

$$(3.7) \quad y_{k,rr} + \frac{1}{r} y_{k,r} - \left[\frac{p}{\kappa} + \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 / r^2 \right] y_k = \frac{-(2k+1) \sqrt{r}}{4\pi K r^2} \delta(r - r').$$

Równania powyższe przy danych warunkach brzegowych łatwo rozwiążemy za pomocą skończonej transformacji Hankela. W tym celu pomnożmy obydwie strony równań przez funkcje Bessela $J_{k+\frac{1}{2}}(ra_m)$ i scałkujemy względem r od $r = 0$ do $r = a$. Oznaczając skończone transformacje przez

$$\tilde{y}_k(a_m) = \int_0^a y_k(r) J_{k+\frac{1}{2}}(ra_m) dr,$$

otrzymamy stąd

$$\tilde{y}_k(\alpha_m) \left(\alpha_m^2 + \frac{p}{\kappa} \right) = \frac{(2k+1) J_{k+\frac{1}{2}}(r' \alpha_m)}{4\pi K \sqrt{r'}}$$

przy czym ze względu na warunki brzegowe (2.7) α_m muszą być pierwiastkami równania

$$(3.8) \quad J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \alpha_m) = 0.$$

Retransformacja daje

$$y_k(r) = \sqrt{r} \tilde{a}_k(r, p) = \frac{(2k+1)}{2\pi a^2 c \gamma \sqrt{r'}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{k+\frac{1}{2}}(r' \alpha_m) J_{k+\frac{1}{2}}(r \alpha_m)}{(p + \kappa \alpha_m^2) [J'_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \alpha_m)]^2},$$

przy czym sumę należy brać po wszystkich dodatnich pierwiastkach równania (3.8). Po wykonaniu z kolei retransformacji Laplace'a otrzymamy funkcje $a_k(r, t)$ i (3.5):

$$T_n^*(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi a^2 c \gamma \sqrt{r'}} \sum_{k=0}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{k+\frac{1}{2}}(r' \alpha_m) J_{k+\frac{1}{2}}(r \alpha_m)}{[J'_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \alpha_m)]^2} (2k+1) e^{-\kappa \alpha_m^2 t} P_k(\mu).$$

Dla $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy z powyższego wzoru wynik ścisły (por. [1] str. 315, wzór (8)).

4. Współrzędne cylindryczne r, z

Równanie przewodnictwa cieplnego dla zagadnień osiowo-symetrycznych rozpatrywanych we współrzędnych walcowych, jak wiadomo, ma postać

$$(4.1) \quad L(T) - A = \gamma c T_t - K_r \left(T_{,rr} + \frac{1}{r} T_{,r} \right) - K_z T_{,zz} - A(r, z, t) = 0.$$

Możemy poszukiwać rozwiązania przybliżonego przy jednorodnych warunkach brzegowych w postaci

$$(4.2) \quad T_n^*(r, z, t) = \sum_{i=1}^n a_i(r, t) \varphi_i(z).$$

Z zależności

$$\int_{(z)} [L(T^*) - A] \varphi_k(z) dz = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

otrzymamy układ równań różniczkowych względem niewiadomych funkcji $a_i(r, t)$:

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^n \left[a_{i,t} A_{ik} + \left(a_{i,rr} + \frac{1}{r} a_{i,r} \right) B_{ik} + a_i C_{ik} \right] = Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Współczynniki przyjmują tu wartości następujące:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \int_{(z)} \gamma c \varphi_i \varphi_k dz, & B_{ik} &= - \int_{(z)} K_r \varphi_i \varphi_k dz, \\ C_{ik} &= - \int_{(z)} K_z \varphi_{i,zz} \varphi_k dz, & Z_k &= \int_{(z)} A \varphi_k dz. \end{aligned}$$

Można też przyjąć przybliżone rozwiązanie w innej postaci niż w (4.2), mianowicie:

$$(4.5) \quad T_n^*(r, z, t) = \sum_{i=1}^n a_i(z, t) \varphi_i(r).$$

Z warunków ortogonalności

$$\int_{(r)} [L(T^*) - A] r \varphi_k(r) dr = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

otrzymamy znowu układ równań różniczkowych dla wyznaczenia niewiadomych funkcji $a_i(z, t)$ w następującej postaci:

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^n (a_{i,t} A_{ik} + a_{i,zz} B_{ik} + a_i C_{ik}) = Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym

$$(4.7) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \int_{(r)} \gamma c \varphi_i \varphi_k r dr, & B_{ik} &= - \int_{(r)} K_z \varphi_i \varphi_k r dr, \\ C_{ik} &= - \int_{(r)} K_r \left(\varphi_{i,rr} + \frac{1}{r} \varphi_{i,r} \right) \varphi_k r dr, & Z_k &= \int_{(r)} A r \varphi_k dr. \end{aligned}$$

Przykład. Dany jest obszar cylindryczny przedstawiony na rys. 2 oraz temperatura początkowa $T(z, 0) = 1$ na płaszczyźnie $z = l/2$. Pobocznica walca jest utrzymywana w temperaturze zera, obydwie zaś płaszczyzny dane są izolowane termicznie od otoczenia. Warunek początkowy napiszemy za pomocą funkcji Diraca następująco: jeśli $t = 0$, to

$$(4.8) \quad f(z) = \delta \left(z - \frac{l}{2} \right).$$

Szukać będziemy rozwiązania przybliżonego (4.5) w następującej postaci:

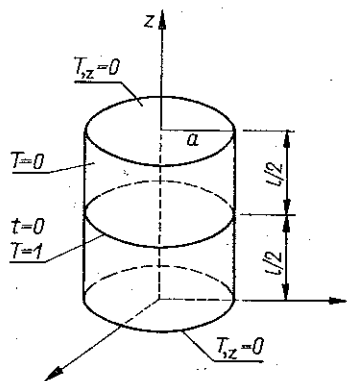
$$(4.9) \quad T_n^*(r, z, t) = \sum_{i=1}^n a_i(z, t) (1 - \varrho^2) \varrho^{i-1},$$

gdzie $\varrho = r/a$.

a) Przybliżenie pierwsze $\varphi_1 = (1 - \varrho^2)$. Po wyznaczeniu współczynników (4.7) układ równań (4.6) redukuje się tu do jednego równania

$$a_{1,t} - \kappa_z a_{1,zz} + \frac{6\kappa_r}{a^2} a_1 = 0,$$

przy oznaczeniach $\kappa_r = K_r/\gamma c$ oraz $\kappa_z = K_z/\gamma c$. Ze względu na warunki brzegowe $z = 0$, $z = l$, $a_{1,z} = 0$ do rozwiązania powyższego równania możemy zastosować skończoną transformację kosinusową. Wprowadzając oznaczenia



Rys. 2

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1^c(m, t) &= \int_0^l a_1(z, t) \cos \alpha_m z dz, \\ \tilde{a}_{1,t}^c(m, t) &= \int_0^l a_{1,t}(z, t) \cos \alpha_m z dz, \quad \alpha_m = m\pi/l\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\tilde{a}_1^c(m, t) \left(\kappa_z \alpha_m^2 + \frac{6\kappa_r}{a^2} \right) + \tilde{a}_{1,t}^c = 0.$$

Kolejna transformacja i retransformacja Laplace'a dają

$$(4.10) \quad \tilde{a}_1^c(m, t) = \tilde{a}_1^c(m, 0) \exp[-t(\kappa_z \alpha_m^2 + 6\kappa_r/a^2)].$$

Wielkość $\tilde{a}_1^c(m, 0)$ wyznaczymy z warunku początkowego (4.8), który spełnimy w ten sposób, ażeby

$$(4.11) \quad \delta \int_0^l \int_0^a \left[\delta \left(z - \frac{l}{2} \right) - a_1(z, 0) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right]^2 r dr dz = 0.$$

Symbol przed znakiem całki oznacza tu pierwszą wariację względem $a_1(z, 0)$, pierwszy zaś symbol pod znakiem całki oznacza funkcję Diraca. Warunek ten po wykonaniu transformacji kosinusowej

$$\tilde{a}_1^c(m, 0) = \int_0^l a_1(z, 0) \cos \alpha_m z dz, \quad \delta^c \left(m - \frac{l}{2} \right) = \cos \frac{m\pi}{2}$$

daje

$$\tilde{a}_1^c(m, 0) \int_0^1 \varrho (1 - \varrho^2)^2 d\varrho = \cos \frac{m\pi}{2} \int_0^1 \varrho (1 - \varrho^2) d\varrho.$$

Wobec tego

$$\tilde{a}_1^c(m, 0) = \frac{3}{2} \cos \frac{m\pi}{2}.$$

Po wstawieniu powyższego wyniku do (4.10) i po wykonaniu retransformacji kosinusowej otrzymamy ostateczną postać pierwszego przybliżenia:

$$(4.12) \quad T_1^* = \frac{3}{2l} (1 - \varrho^2) e^{-6\kappa_r t/a^2} + \frac{3}{l} (1 - \varrho^2) \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi z}{l} \exp \left[-t \left(\kappa_z \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{6\kappa_r}{a^2} \right) \right].$$

b) Przybliżenie drugie. Dla obliczenia drugiego przybliżenia założmy, że rozpatrywany ośrodek jest izotropowy, czyli $K_r = K_z = K$, $\kappa_r = \kappa_z = \kappa$. Drugie przybliżenie przyjmujemy zgodnie z (4.9) w postaci

$$(4.13) \quad T_2^* = a_1(z, t) \varphi_1(r) + a_2(z, t) \varphi_2(r), \quad \varphi_1 = (1 - \varrho^2), \quad \varphi_2 = (1 - \varrho^2) \varrho^2.$$

Współczynniki (4.7) wynoszą odpowiednio:

$$A_{11} = -\frac{B_{11}}{\kappa} = \gamma c a^2 \int_0^1 \varphi_1^2 \varrho d\varrho = \gamma c \frac{a^2}{6}, \quad A_{22} = -\frac{B_{22}}{\kappa} = \gamma c \frac{a^2}{60},$$

$$A_{12} = A_{21} = -\frac{B_{12}}{\kappa} = -\frac{B_{21}}{\kappa} = \gamma c \frac{a^2}{24}, \quad C_{12} = C_{21} = C_{22} = \frac{K}{3}, \quad C_{11} = K.$$

Układ równań różniczkowych (4.6) przyjmie postać

$$(4.14) \quad \begin{aligned} a_{1,t} + \frac{1}{4} a_{2,t} - \kappa a_{1,rr} - \frac{\kappa}{4} a_{2,rr} + \frac{6\kappa}{a^2} a_1 + \frac{2\kappa}{a^2} a_2 &= 0, \\ \frac{5}{2} a_{1,t} + a_{2,t} - \frac{5\kappa}{2} a_{1,rr} - \kappa a_{2,rr} + \frac{20\kappa}{a^2} a_1 + \frac{20\kappa}{a^2} a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ze względu na dane warunki brzegowe $z = 0$, $z = l$, $a_{1,z} = a_{2,z} = 0$ możemy i tu zastosować skończoną transformację kosinusową wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i^c(m, t) &= \int_0^l a_i(z, t) \cos \alpha_m z dz, \quad i = 1, 2; \\ \tilde{a}_{i,t}^c(m, t) &= \int_0^l a_{i,t}(z, t) \cos \alpha_m z dz, \quad \alpha_m = m\pi/l. \end{aligned}$$

Po wykonaniu transformacji Laplace'a otrzymamy z (4.14) układ dwóch równań algebraicznych, którego rozwiązaniem są funkcje

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \tilde{\bar{a}}_1^c(m, p) &= \frac{p \tilde{a}_1^c(m, 0) + \tilde{a}_{1,t}^c(m, 0) (\kappa \alpha_m^2 + 40\kappa/a^2) + \tilde{a}_2^c(m, 0) 8\kappa/a^2}{(p + \kappa \alpha_m^2 + 64\kappa/3a^2)^2 - (8\sqrt{34} \kappa/3a^2)^2}, \\ \tilde{\bar{a}}_2^c(m, p) &= \frac{p \tilde{a}_2^c(m, 0) + \tilde{a}_{2,t}^c(m, 0) (\kappa \alpha_m^2 + 8\kappa/3a^2) - \tilde{a}_1^c(m, 0) 40\kappa/3a^2}{(p + \kappa \alpha_m^2 + 64\kappa/3a^2)^2 - (8\sqrt{34} \kappa/3a^2)^2}. \end{aligned}$$

Ażeby spełnić warunek początkowy (4.8), wyznaczmy wielkości $\tilde{a}_1^c(m, 0)$ i $\tilde{a}_2^c(m, 0)$ z warunku analogicznego do (4.11):

$$\delta \int_0^l \int_0^1 \left[\delta \left(z - \frac{l}{2} \right) - a_1(z, 0) \varphi_1 - a_2(z, 0) \varphi_2 \right]^2 \varrho d\varrho dz = 0.$$

Otrzymane stąd dwa równania po wykonaniu skończonej transformacji kosinusowej przyjmują postać następującą:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \tilde{a}_1^c(m, 0) \int_0^1 \varrho \varphi_1^2 d\varrho + \tilde{a}_2^c(m, 0) \int_0^1 \varrho \varphi_1 \varphi_2 d\varrho &= \cos \frac{m\pi}{2} \int_0^1 \varrho \varphi_1 d\varrho, \\ \tilde{a}_1^c(m, 0) \int_0^1 \varrho \varphi_2 \varphi_1 d\varrho + \tilde{a}_2^c(m, 0) \int_0^1 \varrho \varphi_2^2 d\varrho &= \cos \frac{m\pi}{2} \int_0^1 \varrho \varphi_2 d\varrho. \end{aligned}$$

Z rozwiązania powyższego układu równań otrzymamy

$$\tilde{a}_1^c(m, 0) = \frac{2}{3} \cos \frac{m\pi}{2}, \quad \tilde{a}_2^c(m, 0) = \frac{10}{3} \cos \frac{m\pi}{2}.$$

Po wstawieniu powyższych wielkości do (4.15) oraz po wykonaniu retransformacji kolejno Laplace'a i kosinusowej, otrzymamy

$$a_1(z, t) = \frac{2}{3l} \left(\operatorname{ch} \beta t + \frac{22}{\sqrt{34}} \operatorname{sh} \beta t \right) e^{-64\kappa t/3a^2} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi z}{l} e^{-\kappa a_m^2 t} \right),$$

$$a_2(z, t) = \frac{10}{3l} \left(\operatorname{ch} \beta t - \frac{8}{\sqrt{34}} \operatorname{sh} \beta t \right) e^{-64\kappa t/3a^2} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi z}{l} e^{-\kappa a_m^2 t} \right),$$

$$\beta = 8 \sqrt{34} \kappa / 3a^2.$$

Ostateczną postać drugiego przybliżenia otrzymamy następnie podstawiając (4.16) do wzoru (4.13).

c) Porównanie wyników kolejnych dwóch przybliżeń z wynikiem ścisłym. Jak wiadomo z teorii przewodnictwa cieplnego, rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego przy jednorodnych warunkach brzegowych można otrzymać jako iloczyn dwóch odpowiednich rozwiązań jednowymiarowych, jeżeli również temperaturę początkową można przedstawić jako taki iloczyn. Dla powyżej rozpatrywanego przykładu cylindra otrzymamy stąd rozwiązanie ścisłe w postaci iloczynu (por. [1, s. 22; s. 85 wzór (6); s. 174, wzór (5); s. 175, rys. 19])

$$T(r, z, t) = \psi(z, l) \chi(r, a),$$

gdzie

$$\psi(z, l) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi z}{l} e^{-\kappa m^2 \pi^2 t/l^2},$$

$$\chi(r, a) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa a_n^2 t} \frac{J_0(r a_n)}{a_n J_1(a a_n)};$$

a_n są tutaj dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(a a_n) = 0$. Z powyższych wzorów wyznaczmy temperaturę z dokładnością do trzech znaków dziesiętnych przy następujących wartościach liczbowych:

$$(4.17) \quad \frac{\kappa t}{a^2} = 0,1, \quad \frac{r}{a} = 0,5, \quad \frac{a}{l} = 0,5, \quad \frac{z}{l} = 0,25.$$

Otrzymamy stąd $\psi = 0,961/l$, $\chi = 0,608$, czyli ścisła wartość dla temperatury wynosi

$$(4.18) \quad T = 0,961 \times 0,608 \frac{1}{l} = 0,584 \frac{1}{l}.$$

Dla pierwszego przybliżenia przy $\kappa_z = \kappa_r = \kappa$ i przy danych liczbowych (4.17) otrzymamy z wyrażenia (4.12) z dokładnością do trzech znaków dziesiętnych

$$T_1^* = 0,594 \frac{1}{l}.$$

Błąd w stosunku do wartości (4.18) wynosi 1,71%.

Dla drugiego przybliżenia otrzymamy przy powyższych danych liczbowych z (4.16) wartości: $a_1 = 0,8355/l$ oraz $a_2 = -0,2391/l$. Ostateczne drugie przybliżenie obliczymy z (4.13):

$$T_2^* = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 = (0,8355 \times 0,75 - 0,2391 \times 0,1875) \frac{1}{l} = 0,582 \frac{1}{l}.$$

W stosunku do wartości (4.18) daje to tylko 0,34% błędu.

5. Uwagi końcowe

Otrzymanie rozwiązania przybliżonego za pomocą obranych funkcji (1.2), (3.2), (4.2) i (4.5) jest ograniczone do zagadnień o jednorodnych warunkach brzegowych: na krawędziach rozpatrywanego obszaru temperatura musi wynosić zero, strumień przepływu ciepła również zero lub mamy promieniowanie do ośrodka o temperaturze zera. Nie stanowi to jednakże istotnego ograniczenia różnorodności zagadnień, które mogą być rozwiązywane za pomocą niniejszej metody. Z teorii przewodnictwa cieplnego wiadomo bowiem, że rozwiązanie każdego niestacjonarnego zagadnienia przy dowolnych niejednorodnych warunkach brzegowych można otrzymać z superpozycji rozwiązania zagadnienia stacjonarnego o danych niejednorodnych warunkach i rozwiązania niestacjonarnego przy jednorodnych warunkach brzegowych [1, s. 18–19]. Uwzględnienie w niniejszej metodzie przybliżonej dowolnej temperatury początkowej nie sprawia trudności, jak wykazują przykłady.

Rozszerzenie zakresu rozpatrywanych zagadnień dwuwymiarowych na zagadnienia trzywymiarowe jest także możliwe. W przypadku współrzędnych prostokątnych przybliżone rozwiązanie wybieramy wtedy w postaci funkcji

$$T_n^*(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \varphi_i(y, z).$$

Przy jednorodnych warunkach brzegowych omawiany ośrodek przewodzenia ciepła z dwóch stron musi być ograniczony prostopadłymi do osi x płaszczyznami, poza tym może być ograniczony dowolnie. Ośrodek może być pod względem własności termicznych niejednorodny i anizotropowy.

Literatura cytowana w tekście

1. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, 1948.
2. C. B. BIEZENO, J. J. KOCH, *Over een nieuwe methode ter berekening van vlakke platen*, Ingenieur, Haag, 38 (1923).
3. J. W. GREEN, *An expansion method for parabolic partial differential equations*, J. of Res., Nat. Bureau of Standards, 51 (1953).

4. Л. Б. Канторович, Б. Я. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Москва 1962.
5. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960.
6. M. A. BIOT, *New methods in heat flow analysis with application to flight structures*, J. of the Aero Sci., 12, 24 (1957).

Резюме

НЕКОТОРЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ВОПРОСОВ, КАСАЮЩИХСЯ ДИФФУЗИИ

Предлагается способ приближенного вычисления начально краевых задач, касающихся диффузии для неоднородных и анизотропных сред. Этот метод отличается большой точностью результатов так, что для практических целей достаточно точным является уже первое приближение. Для двумерных задач приближенное течение принимается в виде произведения, принятой априори, функции одной пространственной переменной и неизвестной функции второй пространственной переменной и временной переменной. Из условий ортогональности для определения неизвестных функций получается затем система дифференциальных уравнений.

Метод иллюстрируется тремя примерами в прямоугольных, сферических и цилиндрических координатах.

Summary

A METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEMS

The note presents a method of approximate solution of initial and boundary value problems in conduction of heat in two-dimensional, nonhomogeneous and anisotropic regions. There is a great accuracy in the results reached by this approximate method of solution, therefore the first approximation is usually sufficient for practical problems. In twodimensional problems the approximate solution is assumed in form of a product of two functions: one — initially assumed function of one space variable only, and the second — unknown function of a space variable and a time variable. From orthogonality conditions a system of differential equations is then derived, the solution of which produces the unknown functions. The method is illustrated by three examples in different coordinate systems.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1964 r.