

WYMIAROWANIE PRĘTÓW O KRZYWIŹNIE PIERWOTNEJ
NA GRUNCIE TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

WANG DU-CHING I MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

1. Uwagi wstępne

Pręty o krzywiznie pierwotnej poddane zginaniu, a przy tym ewentualnie rozciąganiu i ścinaniu, można w zakresie sprężystym obliczać bądź metodami elementarnej wytrzymałości materiałów, bądź teorii sprężystości. Zasadnicza różnica między tymi metodami polega na pominięciu we wzorach elementarnych naprężeń promieniowych przy czystym zginaniu oraz naprężeń stycznych, pochodzących od ścinania (te ostatnie można by w przybliżeniu uwzględnić — por. R. KAPPUS [2]). Teoria sprężystości pozwala na wyprowadzenie wzorów ścisłych, jednakże tylko dla przekroju prostokątnego lub, w pewnym przybliżeniu, dla przekroju złożonego z prostokątów.

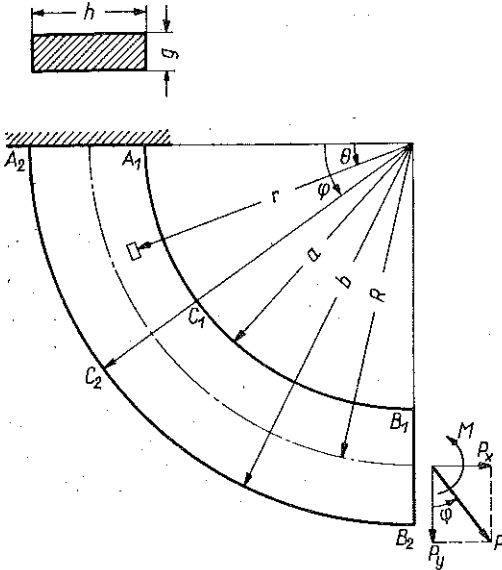
Uzyskane obiema tymi drogami wzory określają naprężenia jako funkcji wymiarów przekroju i obciążeń, natomiast nie nadają się, praktycznie biorąc, do bezpośredniego wymiarowania, czyli do doboru niezbędnych wymiarów przekroju w zależności od obciążeń zewnętrznych i przyjętych naprężeń dopuszczalnych. Ze względu na wymiary przekroju otrzymujemy bowiem równania przestępne, których rozwiązywanie metodami przybliżonymi jest żmudne. W pracy [4] J. WALCZAK i M. ŻYCZKOWSKI zastosowali do analitycznego rozwiązywania równań, uzyskiwanych przy zastosowaniu metody wytrzymałości materiałów, rozwinięcia na szeregi potęgowe i działania na tych szeregach, co doprowadziło do prostych wzorów wynikowych, nadających się do bezpośredniego wykorzystania w praktyce inżynierskiej. Małymi parametrami były przy tym wielkości charakteryzujące krzywiznę pręta.

Celem obecnej pracy jest zastosowanie podobnej metody do «odwrócenia» wzorów znanych z teorii sprężystości. Ograniczymy się w związku z tym do przekroju prostokątnego, natomiast uwzględnimy oprócz zginania wpływ ścinania i rozciągania lub ściskania, przy czym zbadamy różne kombinacje kierunków sił i ich zwrotów. Równaniem wyjściowym będzie

$$(1.1) \quad \max \sigma_0 = k,$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem zastępczym (zredukowanym), zależnym od składowych stanu naprężenia, $\sigma_0 = \sigma_0(\sigma_{ij})$, które z kolei zależą od uogólnionych obciążeń zewnętrznych P_n i wymiarów pręta, mianowicie wysokości i szerokości przekroju h i g oraz średniego promienia krzywizny R , czyli $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(P_n, h, g, R)$; k oznacza

napężenie dopuszczalne. Będziemy więc rozwiązywać równanie (1.1) ze względu na wymiary przekroju, w szczególności wysokości h ; inne ujęcia, polegające np. na ustaleniu z góry nie średniego promienia krzywizny R , lecz wewnętrznego $a = R - h/2$, można również rozwiązać na tej samej drodze, jak to wykazano w pracy [4]. Kres górny napężenia zastępczego, $\max \sigma_\theta$, będzie obliczany w oparciu o hipotezę energetyczną Hubera-Misesa-Hencky'ego, jednak przyjęcie innej hipotezy jako wyjściowej nie zmieniłoby rozważań w istotnym stopniu.



Rys. 1

2. Wzory wyjściowe

Weźmiemy pod uwagę pręt kołowo zakrzywiony, obciążony na końcu swobodnym najogólniejszym płaskim układem sił, który można zredukować do siły skupionej o składowych P_x i P_y oraz momentu skupionego M (rys. 1). Przyjmijmy, że kąt rozwarcia pręta wynosi: $\pi/2$, jednak założenie to ze względu na ogólność obciążenia nie jest specjalnie istotne. Rozkład naprężeń w tak obciążonym pręcie można określić przez superpozycję wzorów

H. N. GOŁOWINA (M. T. HUBER [1], P. F. PĄPKOWICZ [3]; w tej ostatniej monografii znaki ostatnich składników w pierwszych nawiasach są błędne):

$$(2.1) \quad \sigma_r = -\frac{P_x \sin \theta + P_y \cos \theta}{gS} \left(r - \frac{a^2 + b^2}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right) + \frac{4(M + P_x R)}{gW} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right),$$

$$\sigma_\theta = -\frac{P_x \sin \theta + P_y \cos \theta}{gS} \left(3r - \frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^3} \right) + \frac{4(M + P_x R)}{gW} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right),$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P_x \cos \theta + P_y \sin \theta}{gS} \left(r - \frac{a^2 + b^2}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right),$$

gdzie dla skrócenia wprowadzono następujące oznaczenia wartości dodatnich stałych

$$(2.2) \quad S = (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} - (b^2 - a^2), \quad W = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Należy przede wszystkim określić kres górny naprężenia zastępczego σ_0 . Będziemy badali kwadrat tego naprężenia, określony w naszym przypadku za pomocą wzoru

$$(2.3) \quad \sigma_0^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta + 3\tau_{r\theta}^2.$$

Zazwyczaj niebezpieczeństwo zniszczenia pręta związane jest z naprężeniami σ_θ , które są z reguły monotoniczną funkcją zmiennej r , a ich wartość bezwzględna osiąga kres górny na promieniu $r = a$ lub $r = b$ i najpierw zbadamy te przypadki. Na promieniach tych oczywiście $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$, co znacznie ułatwia analizę. Dla $r = a$ mamy

$$(2.4) \quad \sigma_0 = |\sigma_\theta| = \left| \frac{2(P_x \sin \theta + P_y \cos \theta)(b^2 - a^2)}{agS} - \frac{4(M + P_x R)(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2)}{gW} \right|.$$

Funkcja ta może osiągnąć kres górny dla $\theta = 0$ (punkt A_1 , rys. 1), $\theta = \pi/2$ (punkt B_1) lub przy warunku $\partial\sigma_\theta/\partial\theta = 0$ (punkt C_1). Punkt nieistnienia pochodnej $\partial\sigma_\theta/\partial\theta$, mianowicie $\sigma_\theta = 0$, oczywiście nas nie interesuje. Podstawimy $P_x = P \sin \varphi$, $P_y = P \cos \varphi$ oraz zapiszemy (2.4) w postaci

$$(2.5) \quad \sigma_\theta = \frac{2P(b^2 - a^2) \cos(\theta - \varphi)}{agS} - \frac{4(M + PR \sin \varphi)(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2)}{gW}.$$

Z warunku $\partial\sigma_\theta/\partial\theta = 0$ otrzymujemy $\theta = \varphi$; dla pręta przedstawionego na rys. 1 warunek ten może być spełniony tylko dla $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, bo tylko w takim przedziale zmienia się θ . Ostatecznie warunki bezpieczeństwa, odniesione kolejno do punktów A_1 , B_1 i C_1 napiszemy następująco:

$$(2.6) \quad \left| \frac{2P(b^2 - a^2) \cos \varphi}{agS} - \frac{4(M + PR \sin \varphi)(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2)}{gW} \right| \leq k,$$

$$(2.7) \quad \left| \frac{2P(b^2 - a^2) \sin \varphi}{agS} - \frac{4(M + PR \sin \varphi)(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2)}{gW} \right| \leq k,$$

$$(2.8) \quad \left| \frac{2P(b^2 - a^2)}{agS} - \frac{4(M + PR \sin \varphi)(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2)}{gW} \right| \leq k,$$

gdzie k oznacza założone naprężenie dopuszczalne. Na ogół nie można *a priori* powiedzieć, który z tych trzech warunków jest najmocniejszy; zależy to od znaków P , M i od wartości φ .

Podobnie wyprowadzamy warunki dla punktów A_2, B_2 i C_2 na promieniu $r = b$. Lokalne ekstremum może tu zajść znowu tylko przy $\theta = \varphi$ i wobec tego mamy odpowiednio:

$$(2.9) \quad \left| -\frac{2P(b^2 - a^2) \cos \varphi}{bgS} + \frac{4(M + PR \sin \varphi) \left(b^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{a} \right)}{gW} \right| \leq k,$$

$$(2.10) \quad \left| -\frac{2P(b^2 - a^2) \sin \varphi}{bgS} + \frac{4(M + PR \sin \varphi) \left(b^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{a} \right)}{gW} \right| \leq k,$$

$$(2.11) \quad \left| -\frac{2P(b^2 - a^2)}{bgS} + \frac{4(M + PR \sin \varphi) \left(b^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{a} \right)}{gW} \right| \leq k.$$

Poszczególne składniki wzorów (2.6)–(2.8) są większe co do bezwzględnej wartości od odpowiednich składników wzorów (2.9)–(2.11). Jeżeli znak obu składników w poszczególnych wzorach jest ten sam (a więc np. przy $MP > 0$, $\pi/2 < \varphi < \pi$), to wynika stąd, że warunki (2.6)–(2.8) są mocniejsze od warunków (2.9)–(2.11). W przypadku różnych znaków składników wniosek ten może jednak nie być prawdziwy i będziemy musieli przeprowadzić dokładniejsze badania.

Naprężenie zastępcze σ_0 może również osiągnąć swój kres górny wewnątrz przedziału $a < r < b$. Przypadek ten jest związany z istnieniem lokalnego maksimum naprężeń σ_r i $\tau_{r\theta}$; możemy z nim mieć do czynienia tylko przy prętach bardzo silnie zakrzywionych, a więc przy dużej wartości stosunku h/R . Przy przyjęciu wzorów (2.1), odpowiadających ogólnemu przypadkowi obciążenia, badanie ekstremum lokalnego jest bardzo uciążliwe, toteż zbadamy je jedynie w niektórych przypadkach szczególnych.

3. Wzory ogólne określające wysokość przekroju

Wymiarowanie przekroju pręta na podstawie warunków wytrzymałościowych (2.6)–(2.11) może być przeprowadzone w różny sposób. Jeżeli obierzemy promienie a i b , a tym samym promień krzywizny osi $R = (a+b)/2$, to z równań (2.6)–(2.11) możemy obliczyć niezbędną szerokość przekroju g bez najmniejszej trudności. Natomiast jeżeli ustalimy bądź szerokość g i promień krzywizny R , bądź szerokość g , promień wewnętrzny a lub zewnętrzny b i poszukujemy niezbędnej wysokości przekroju $h = b - a$, bądź wreszcie jeżeli zakładamy wartość stosunku h/g i promień krzywizny R , a poszukujemy h i g , to wtedy równania (2.6)–(2.11) stają się równaniami przestępnymi ze względu na poszukiwane niewiadome.

Zastosujemy obecnie metodę szeregów potęgowych do określenia wysokości h przy danych R i g . Inne warianty problemu mogą być rozwiązane analogicznie; niektóre rozwiązania na gruncie wytrzymałości materiałów podaje praca [4].

Zajmiemy się najpierw przypadkiem, w którym kres górny naprężenia zastępczego jest osiągnięty na promieniu wewnętrznym $r = a$. Wynikające stąd warunki wytrzymałościowe (2.6)–(2.8) napiszemy w postaci wspólnej:

(3.1)

$$\left| \frac{2P \mu (b^2 - a^2)}{ag \left[(a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} - (b^2 - a^2) \right]} - \frac{4(M + PR \sin \varphi) \left(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2 \right)}{g \left[(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \right]} \right| = k,$$

przy czym kolejno $\mu = \cos \varphi$, $\mu = \sin \varphi$ i $\mu = 1$ dla punktów A_1 , B_1 i C_1 ; znaki nierówności słabej zastąpiono przez znak równości, jednak w końcowym efekcie z otrzymanych wzorów na wysokość przekroju h trzeba będzie wybrać wzór, określający wartość największą. Wprowadzimy obecnie oznaczenia

$$(3.2) \quad x = \frac{h}{2R}, \quad \psi = \frac{PR}{M};$$

to ostatnie wymaga w zasadzie założenia $M \neq 0$, jednak przypadek $M = 0$ będzie można uzyskać na drodze przejścia granicznego. Podstawiając

$$(3.3) \quad a = R(1 - x), \quad b = R(1 + x), \quad b^2 - a^2 = 4R^2 x,$$

otrzymujemy najpierw

(3.4)

$$\left| \frac{4\psi \mu x}{(1 - x) \left[(1 + x^2) \ln \frac{1 + x}{1 - x} - 2x \right]} - \frac{2(1 + \psi \sin \varphi) \left[(1 + x)^2 \ln \frac{1 + x}{1 - x} - 2x \right]}{4x^2 - (1 - x^2)^2 \left(\ln \frac{1 + x}{1 - x} \right)^2} \right| = \frac{gkR^2}{|M|}.$$

Zastosowanie rozwinięcia

$$(3.5) \quad \ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

i wykonanie dzielenia szeregów pozwala zapisać (3.4) w postaci

$$(3.6) \quad \frac{1}{x^2} \left| - (1 + \psi \sin \varphi - \mu \psi) - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \psi \sin \varphi - \mu \psi \right) x - \right. \\ \left. - \left(\frac{7}{15} + \frac{7}{15} \psi \sin \varphi - \frac{3}{5} \mu \psi \right) x^2 - \dots \right| = \frac{2gkR^2}{3|M|}.$$

Założymy, że szereg po lewej stronie równości (3.6) jest na tyle szybko zbieżny, a jego pierwszy wyraz na tyle duży co do wartości bezwzględnej, że znak sumy szeregu jest równy znakowi pierwszego wyrazu. Oznaczmy

$$(3.7) \quad \text{sign}(1 + \psi \sin \varphi - \mu\psi) = \kappa.$$

Wtedy zamiast (3.6) można napisać

$$(3.8) \quad \frac{\kappa}{x^2} \left[(1 + \psi \sin \varphi - \mu\psi) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \psi \sin \varphi - \mu\psi \right) x + \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{15} + \frac{7}{15} \psi \sin \varphi - \frac{3}{5} \mu\psi \right) x^2 + \dots \right] = \frac{2gkR^2}{3|M|}$$

albo dogodniej

$$(3.9) \quad \frac{1}{x^2} \left[|1 + \psi \sin \varphi - \mu\psi| + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \psi \sin \varphi - \mu\psi \right) \kappa x + \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{15} + \frac{7}{15} \psi \sin \varphi - \frac{3}{5} \mu\psi \right) \kappa x^2 + \dots \right] = \frac{2gkR^2}{3|M|}.$$

Aby rozwiązać (3.9) ze względu na x wprowadzimy oznaczenie

$$(3.10) \quad y = \sqrt[3]{\frac{3|M|}{2gkR^2}}.$$

Jak widać z równania (3.9), jest to wielkość tego samego rzędu co x i poszukiwane rozwinięcie możemy napisać w postaci

$$(3.11) \quad x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$$

Po podstawieniu (3.11) do (3.9) i wykonaniu odpowiednich działań na szeregach [5, 6] oraz porównaniu współczynników po obu stronach równości obliczamy kolejno niewiadome a_i :

$$(3.12) \quad a_1 = \sqrt{|1 - (\mu - \sin \varphi) \psi|}, \\ a_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{3}{2} \mu - \sin \varphi \right) \psi \right] \kappa, \\ a_3 = \frac{1}{\sqrt{|1 - (\mu - \sin \varphi) \psi|}} \left[\frac{13}{45} - \left(\frac{7}{10} \mu - \frac{26}{45} \sin \varphi \right) \psi + \right. \\ \left. + \left(\frac{17}{40} \mu^2 - \frac{7}{10} \mu \sin \varphi + \frac{13}{45} \sin^2 \varphi \right) \psi^2 \right]$$

Podstawienie (3.12) do (3.11) określa poszukiwaną wysokość przekroju. Wynik końcowy zapiszemy jednak inaczej, zwracając uwagę na fakt, iż wysokość

$$(3.13) \quad h_0 = \sqrt[3]{\frac{6|M|}{gk}} = 2Ry$$

jest niezbędną wysokością pręta prostego, poddanego czystemu zginaniu momentem M ; będzie ona stanowić dla nas dogodną wielkość porównawczą. Dzieliąc (3.11) obustronnie przez $2R$ i podstawiając (3.13) otrzymamy

$$(3.14) \quad h = h_0 \left\{ \sqrt{|1 - (\mu - \sin \varphi) \psi|} + \frac{1}{6} \kappa \left[1 - \left(\frac{3}{2} \mu - \sin \varphi \right) \psi \right] \frac{h_0}{R} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{|1 - (\mu - \sin \varphi) \psi|}} \left[\frac{13}{180} - \left(\frac{7}{40} \mu - \frac{13}{90} \sin \varphi \right) \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{17}{160} \mu^2 - \frac{7}{40} \mu \sin \varphi + \frac{13}{180} \sin^2 \varphi \right) \psi^2 \right] \left(\frac{h_0}{R} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Podobnie wyprowadzamy wzory na niezbędną wysokość przekroju ze względu na naprężenia w punktach A_2 , B_2 i C_2 , warunki (2.9)–(2.11). Wprowadzając podobnie jak poprzednio ogólne oznaczenie μ , napiszemy te trzy warunki wspólnie; po wprowadzeniu oznaczeń (3.2) zamiast (3.4) otrzymujemy

$$(3.15) \quad \left| - \frac{4\psi\mu x}{(1+x) \left[(1+x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x \right]} + \frac{2(1+\psi \sin \varphi) \left[2x - (1-x)^2 \ln \frac{1+x}{1-x} \right]}{4x^2 - (1-x^2)^2 \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right)^2} \right| = \frac{gkR^2}{|M|}.$$

Stosując rozwinięcie (3.5), wprowadzając oznaczenie (3.7) i wykonując odpowiednie działania na szeregach otrzymujemy ostatecznie wzór

$$(3.16) \quad h = h_0 \left\{ \sqrt{|1 - (\mu - \sin \varphi) \psi|} - \frac{1}{6} \kappa \left[1 - \left(\frac{3}{2} \mu - \sin \varphi \right) \psi \right] \frac{h_0}{R} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{|1 - (\mu - \sin \varphi) \psi|}} \left[\frac{13}{180} - \left(\frac{7}{40} \mu - \frac{13}{90} \sin \varphi \right) \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{17}{160} \mu^2 - \frac{7}{40} \mu \sin \varphi + \frac{13}{180} \sin^2 \varphi \right) \psi^2 \right] \left(\frac{h_0}{R} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Wzór ten różni się od (3.14) jedynie znakiem przy drugim wyrazie; prawdopodobnie wystąpią jedynie różnice w znakach przy wszystkich parzystych wyrazach. Pamiętając, że symbol μ ma potrójne znaczenie, stwierdzamy, iż wzory (3.14) i (3.16) określają sześć na ogół różnych wartości wysokości h , z których należy wybrać wartość największą. Każdorazowe porównywanie wyników poszczególnych wzorów byłoby zbyt żmudne, toteż poddamy je obecnie ogólnej analizie. Analiza ta będzie miała charakter przybliżony, mianowicie będzie słuszna tylko przy małych wartościach stosunku h_0/R ; wpływ tego stosunku na wyniki analizy podamy później tylko dla pewnych przypadków szczególnych.

4. Analiza w przypadku ogólnym

Ponieważ pierwsze wyrazy wzorów (3.14) i (3.16) są identyczne, więc ograniczając się najpierw tylko do tego wspólnego wyrazu i podstawiając kolejno $\mu = \cos \varphi$ (przekrój utwierdzony, punkty A_1 i A_2), $\mu = \sin \varphi$ (przekrój swobodny, punkty B_1 i B_2) wreszcie $\mu = 1$ ($\theta = \varphi$, punkty C_1 i C_2) otrzymujemy do zbadania zamiast sześciu tylko trzy przypadki. Postawimy sobie za cel określenie obszarów w płaszczyźnie φ, ψ , w których poszczególne wartości μ zapewnią największą wartość wyrażenia $|1 - (\mu - \sin \varphi) \psi|$. Rozważając zarówno dodatnie jak i ujemne wartości współczynnika ψ , wystarczy dobierać kąt φ z przedziału $0 \leq \varphi \leq \pi$; dalszą komplikację wprowadziłoby przyjęcie różnej wytrzymałości materiału na rozciąganie i ściskanie, ale tym problemem nie będziemy się zajmowali.

Będziemy więc porównywali wyrażenia (A), $|1 - (\cos \varphi - \sin \varphi) \psi|$, (B) 1, (C) $|1 - (1 - \sin \varphi) \psi|$, przy czym to ostatnie odnosi się tylko do przedziału $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Z porównania wielkości (A) i (B) otrzymujemy dwa równania:

$$(4.1) \quad 1 - (\cos \varphi - \sin \varphi) \psi = 1, \quad -1 + (\cos \varphi - \sin \varphi) \psi = 1,$$

skąd wynikają równania linii granicznych

$$(4.2) \quad \psi = 0, \quad \varphi = \pi/4, \quad \psi = \frac{2}{\cos \varphi - \sin \varphi}.$$

Krzywe te przedstawiono na rys. 2 podając w poszczególnych obszarach, które z wyrażeń (A) lub (B) jest większe.

Podobnie z porównania (A) i (C) otrzymujemy dwa równania:

$$(4.3) \quad 1 - (\cos \varphi - \sin \varphi) \psi = 1 - (1 - \sin \varphi) \psi, \\ -1 + (\cos \varphi - \sin \varphi) \psi = 1 - (1 - \sin \varphi) \psi,$$

skąd

$$(4.4) \quad \psi = 0, \quad \psi = \frac{2}{1 + \cos \varphi - 2 \sin \varphi}$$

(rys. 3) a z porównania (B) i (C) wynika

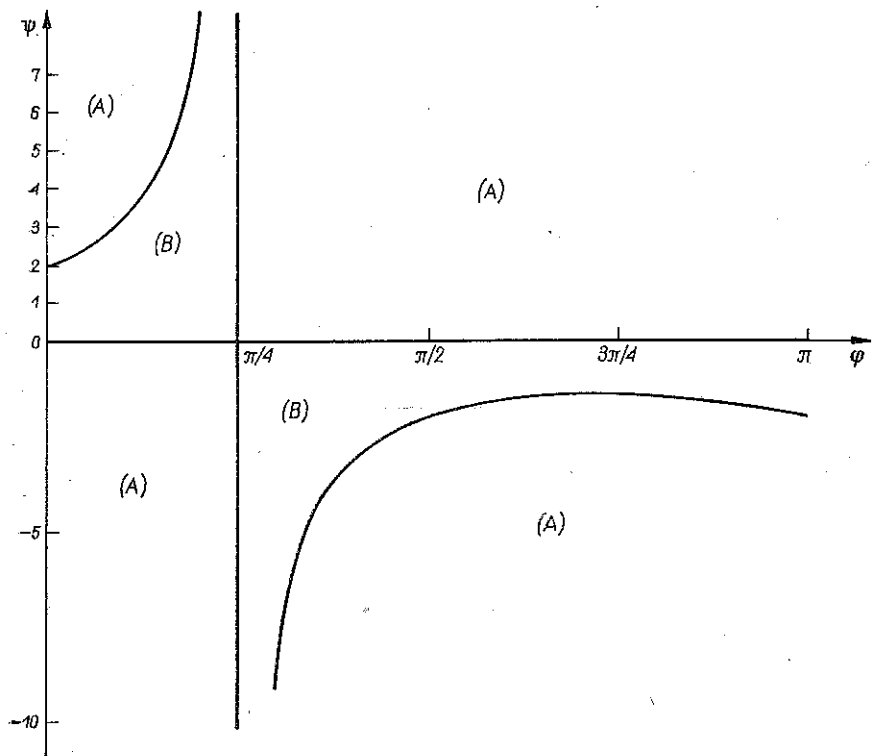
$$(4.5) \quad \psi = 0, \quad \psi = \frac{2}{1 - \sin \varphi}$$

(rys. 4).

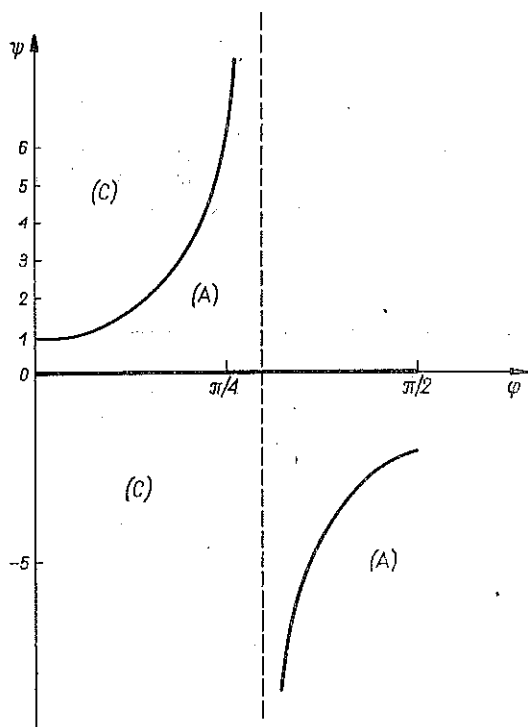
«Nakładając» na siebie rys. 2-4 dochodzimy do poszukiwanego podziału płaszczyzny φ, ψ na podobszary, w których poszczególne wyrażenia (A), (B) i (C) przyjmują największą wartość. Podział ten przedstawiono na rys. 5.

Obecnie przejdziemy do porównania naprężeń na promieniach a i b , a więc na brzegu wewnętrznym i zewnętrznym. Wzory (3.14) i (3.16) różnią się tylko znakiem drugiego wyrazu, a więc należy zbadać znak wyrażenia

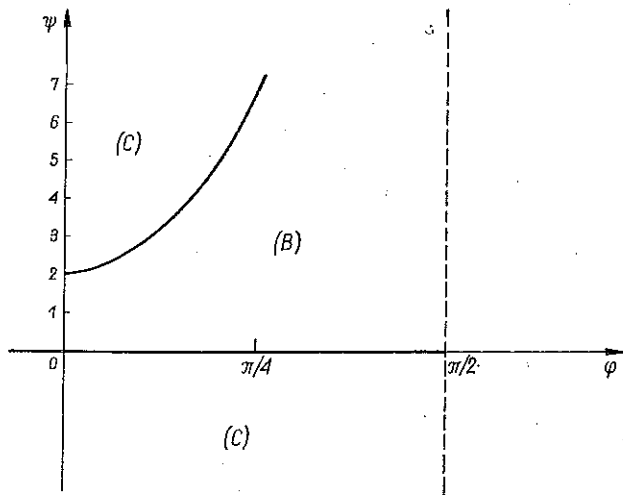
$$(4.6) \quad f(\varphi, \psi) = \left[1 - \left(\frac{3}{2} \mu - \sin \varphi \right) \psi \right] \kappa.$$



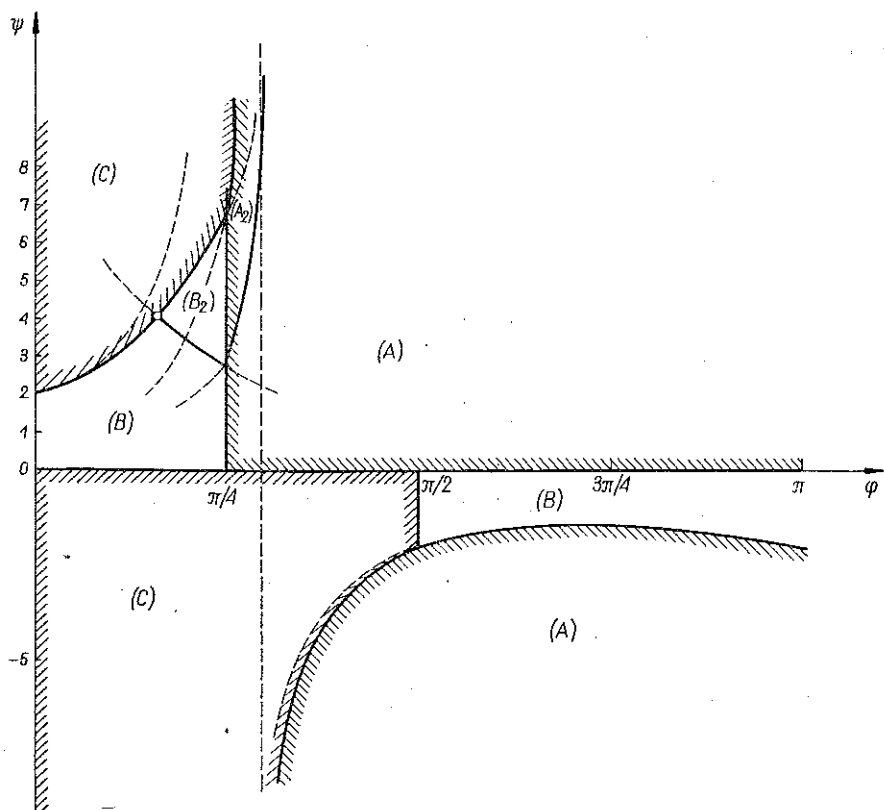
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Graniczny przypadek uzyskany jedynie przez przyrównanie do zera nawiasu granicznego; współczynnik κ (3.7) zmienia swój znak dla $1 - (\mu - \sin \varphi) \psi = 0$, ale ten przypadek dla poszczególnych wartości μ jest wykluczony, bo wtedy przy innych wartościach μ wartość bezwzględna tego wyrażenia jest oczywiście większa. Otrzymujemy więc dla przypadku (A) równanie

$$(4.7) \quad \psi = \frac{1}{\frac{3}{2} \cos \varphi - \sin \varphi}.$$

Część tej krzywej leży w obszarze (A) na rys. 5 i dzieli go na A_1 (punkt wewnętrzny) i A_2 (punkt zewnętrzny, obszar gęsto zakreskowany). Oczywiście obszar odpowiadający punktowi wewnętrznemu jest znacznie większy; oznaczono go tylko symbolem (A). Dla przypadku (B) otrzymujemy równanie graniczne

$$(4.8) \quad \psi = \frac{2}{\sin \varphi};$$

część tej krzywej leży w obszarze (B) i wyodrębnia podobszar B_2 , odpowiadający punktowi zewnętrznemu. Natomiast dla przypadku (C) równanie graniczne ma postać

$$(4.9) \quad \psi = \frac{1}{\frac{3}{2} - \sin \varphi}$$

i żadna gałąź tej krzywej nie leży w obszarze (C) na rys. 5. Tak więc wymiarowanie ze względu na punkt C_2 nie wchodzi w rachubę.

Rysunek 5 zezwala na łatwe orientacyjne określenie punktu niebezpiecznego, a więc na dobór właściwego wzoru spośród sześciu, napisanych łącznie w postaci (3.14) i (3.16). Stwierdziliśmy, że w poszczególnych obszarach płaszczyzny φ , ψ pięć z nich może określać poszukiwaną wysokość przekroju h , natomiast wzór (3.16) przy $\mu = 1$ nie ma zastosowania w żadnym przypadku.

Należy tu jednak podkreślić, że rozkład naprężeń w przekrojach A i C można uważać za ścisły w oparciu o zasadę de Saint-Venanta, natomiast wymiarowanie ze względu na przekrój swobodny B jest uzasadnione tylko wtedy, gdy obciążenia zewnętrzne są przyłożone na tej ścianie zgodnie z warunkami brzegowymi teorii sprężystości, wynikającymi ze wzorów (2.1) przy $\theta = \pi/2$.

5. Przypadek $\varphi = \pi/2$ (siła normalna)

W przypadku tym, jak wynika z rys. 5, przekrojem niebezpiecznym może być bądź przekrój utwierdzony (A), bądź swobodny (B). Podstawiając dla (A) $\mu = \cos \varphi = 0$ otrzymujemy

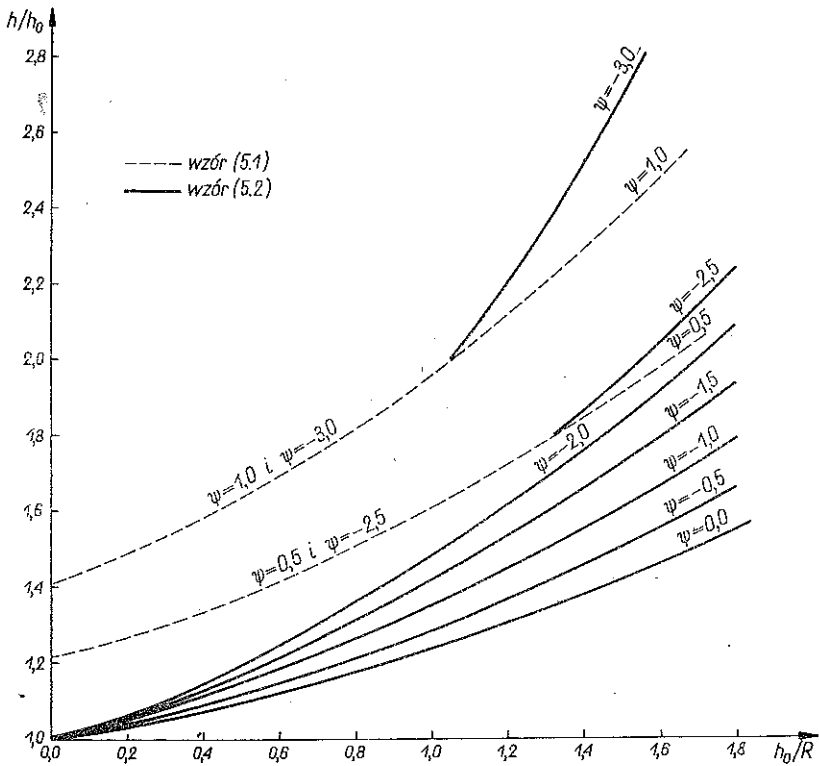
$$(5.1) \quad h = h_0 \left[\sqrt{|1+\psi|} + \frac{1}{6} |1+\psi| \frac{h_0}{R} + \frac{13}{180} |1+\psi|^{3/2} \left(\frac{h_0}{R} \right)^2 + \dots \right].$$

Wzór ten wynika z (3.14), bowiem mamy tu $\kappa(1+\psi) = |1+\psi|$; wzór (3.16) może

być pominięty, gdyż daje mniejsze wartości h od (3.14). Podstawiając dalej dla (B) $\mu = \sin \varphi = 1$ uzyskujemy

$$(5.2) \quad h = h_0 \left[1 + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2} \psi \right) \frac{h_0}{R} + \frac{13}{180} \left(1 - \frac{11}{26} \psi + \frac{5}{104} \psi^2 \right) \left(\frac{h_0}{R} \right)^2 + \dots \right].$$

Wzór ten różni się dopiero trzecim wyrazem od wzoru (31) pracy J. WALCZAKA, i M. ŻYCZKOWSKIEGO [4], gdzie na podstawie metody wytrzymałości materiałów uzyskano współczynnik $23/360$ wobec występującego tu $13/180 = 26/360$. Należy przy tym zwrócić uwagę, że parametr ψ zdefiniowano w pracy [4] z przeciwnym znakiem niż w obecnej. Przy $\psi = 0$ otrzymujemy bardzo prosty wzór dla przypadku czystego zginania. Małe różnice liczbowe wynikają stąd, że w punktach niebezpiecznych naprężenia pominięte w elementarnej wytrzymałości materiałów są właśnie równe zeru, $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$.



Rys. 6

Z przeprowadzonej w poprzednim rozdziale wstępnej analizy wynika, że dla $-2 < \psi < 0$ należy stosować wzór (5.2), natomiast w pozostałych zakresach ψ — wzór (5.1). Wniosek ten jest słuszny dla prętów słabo zakrzywionych przy małej wartości stosunku h_0/R . Przy dodatnich ψ niewątpliwie szereg (5.1) daje większe wartości niż (5.2) i $\psi = 0$ jest tu ścisłą granicą stosowalności. Natomiast ze wzrostem stosunku h_0/R zakres stosowalności wzoru (5.2) po stronie ujemnych ψ nieco się poszerza; najlepiej obrazuje to rys. 6, na którym przedstawiono zależność $h/h_0 = f(h_0/R)$.

6. Przypadek $M = 0$ (siła przyłożona w środku ciężkości)

Wzory dla tego przypadku możemy uzyskać przez przejście do granicy, bowiem mamy tu $|\psi| \rightarrow \infty$, $h_0 \rightarrow 0$. Wprowadzimy tu oznaczenie

$$(6.1) \quad H_0 = \sqrt{\frac{6|P|R}{gk}};$$

wtedy

$$(6.2) \quad \lim_{M \rightarrow 0} h_0 \sqrt{|\psi|} = H_0$$

i ze wzorów (3.14) i (3.16) wynika: przy $\mu = 1$, przypadek (C),

$$(6.3) \quad h = H_0 \left[\sqrt{1 - \sin \varphi} + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} - \sin \varphi \right) \frac{H_0}{R} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin \varphi}} \left(\frac{17}{160} - \frac{7}{40} \sin \varphi + \frac{13}{180} \sin^2 \varphi \right) \left(\frac{H_0}{R} \right)^2 + \dots \right];$$

a przy $\mu = \cos \varphi$, przypadek (A),

$$(6.4) \quad h = H_0 \left[\sqrt{|\sin \varphi - \cos \varphi|} + \frac{1}{6} |\sin \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi| \frac{H_0}{R} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{|\sin \varphi - \cos \varphi|}} \left(\frac{17}{160} \cos^2 \varphi - \frac{7}{40} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{13}{180} \sin^2 \varphi \right) \left(\frac{H_0}{R} \right)^2 + \dots \right].$$

Przyjęcie $\mu = \sin \varphi$, przypadek (B), daje tu znikanie pierwszego wyrazu i wynikające stąd wartości wysokości h są mniejsze. Wprawdzie szereg (3.14) staje się rozbieżny, bo współczynnik trzeciego wyrazu zmierza do nieskończoności, jednak zbieżny szereg można uzyskać przez podstawienie $\mu = \sin \varphi$ już w równaniu (3.9), co zmienia nieco typ odwróconego szeregu: w szeregu (3.11) występują tylko wyrazy parzyste. Podobna uwaga odnosi się do szeregu (6.3) przy $\varphi = \pi/2$ lub do szeregu (6.4) przy $\varphi = \pi/4$; przypadki te nie posiadają jednak znaczenia praktycznego, bowiem przy tych wartościach kątów φ pozostały wzór podaje większą wartość h , a więc obowiązującą.

Zbadamy obecnie zakres stosowalności wzorów (6.3) i (6.4). Decydujący jest przede wszystkim pierwszy wyraz. Przy małych wartościach kąta φ wzór (6.3) daje niemniejsze wartości h niż (6.4), jest więc obowiązujący. Równość obu h wystąpi, w pierwszym przybliżeniu, przy $1 - \sin \varphi = \sin \varphi - \cos \varphi$, skąd $\varphi = \varphi^* = 2 \arcsin(1/\sqrt{5}) = 53^\circ 08'$. Ze wzrostem stosunku H_0/R ta graniczna wartość φ^* nieco rośnie, bowiem mamy tu $3/2 - \sin \varphi > |\sin \varphi - 3/2 \cos \varphi|$. Dla $\varphi > \varphi^*$ należy stosować wzór (6.4), przy czym w pewnym niewielkim przedziale wyrażenie $\sin \varphi - 3/2 \cos \varphi$ jest ujemne, co odpowiada występowaniu największego naprężenia w punkcie zewnętrznym A_2 . Graniczny kąt wynosi $\varphi = \varphi^{**} = 1/2 \arcsin(-5/13) = 56^\circ 19'$; dla $\varphi > \varphi^{**}$ niebezpiecznym punktem jest punkt wewnętrzny A_1 .

Zajmiemy się jeszcze bardziej szczegółowo przypadkiem $\varphi = 0$, a więc siły stycznej do przekroju. Ze wzoru (6.3) lub (6.4) otrzymujemy tu dla pokrywających się punktów A_1 i C_1 (utwierdzenie)

$$(6.5) \quad h = H_0 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{H_0}{R} + \frac{17}{160} \left(\frac{H_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{40} \left(\frac{H_0}{R} \right)^3 + \dots \right]$$

(we wzorze tym podano obliczony dodatkowo czwarty wyraz szeregu). Wykażemy, że punkt ten jest istotnie punktem niebezpiecznym, zbadamy mianowicie przedział $a < r < b$, który w przypadku ogólnym nie był badany. Do wzorów (2.1) podstawimy $P_x = M = 0$, $P_y = P$.

Zacniemy analizę od zginanego i rozciąganego przekroju utwierdzonego, $\theta = 0$. Mamy tu $\tau_{r\theta} = 0$, zatem po zróżniczkowaniu (2.3)

$$(6.6) \quad \frac{d(\sigma_0^2)}{dr} = \sigma_r (2\sigma'_r - \sigma'_\theta) + \sigma_\theta (2\sigma'_\theta - \sigma'_r).$$

Wykażemy, że wewnątrz przedziału $a < r < b$ nie może zachodzić maksimum wyrażenia σ_0^2 . Przyrównując pochodną (6.6) do zera otrzymujemy równanie

$$(6.7) \quad 7r^8 - (b^4 - 4a^2b^2 + a^4)r^4 - 9a^4b^4 = 0,$$

które posiada tylko jeden dodatni pierwiastek rzeczywisty $r = r^*$. Ale

$$(6.8) \quad \left[\frac{d(\sigma_0^2)}{dr} \right]_{r=a} = \frac{2P^2}{g^2 S^2} \frac{6(a^4 - b^4) + 4b^2(a^2 - b^2)}{a^3} < 0,$$

$$(6.9) \quad \left[\frac{d(\sigma_0^2)}{dr} \right]_{r=b} = \frac{2P^2}{g^2 S^2} \frac{6(b^4 - a^4) + 4a^2(b^2 - a^2)}{b^3} > 0,$$

zatem w punkcie $r = r^*$ zachodzi lokalne minimum naprężenia zastępczego i punkt ten nie może być punktem niebezpiecznym.

Przejdźmy obecnie do przekroju swobodnego $\theta = \pi/2$. Mamy tu wyłącznie naprężenia $\tau_{r\theta}$, które są oczywiście równe zero dla $r = a$ i $r = b$ oraz osiągają co do wartości bezwzględnej maksimum przy

$$(6.10) \quad r = \bar{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 12a^2b^2} - (a^2 + b^2)}.$$

Odpowiednią wartość maksymalną można określić za pomocą wzoru

$$(6.11) \quad \max |\tau_{r\theta}| = \frac{2P(\bar{r}^4 - a^2b^2)}{g\bar{r}^3 \left[(a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} - (b^2 - a^2) \right]}.$$

Zwymiarujemy obecnie przekrój z warunku $\max |\tau_{r\theta}| = k_t = k/\sqrt{3}$. Podstawiając (3.3) otrzymujemy najpierw po dokonaniu odpowiednich rozwinięć

$$(6.12) \quad \bar{r} = R(1 - x^2 + \dots)$$

a po podstawieniu tej wartości do (6.11) i wykonaniu działań

$$(6.13) \quad \frac{k}{\sqrt{3}} = \frac{3P}{4gRx} \left(1 - \frac{23}{20} x^2 + \dots \right).$$

Stąd ostatecznie po wprowadzeniu H_0 (6.1) i odwróceniu szeregu

$$(6.14) \quad h = H_0 \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{H_0}{R} - \frac{69\sqrt{3}}{5120} \left(\frac{H_0}{R} \right)^5 + \dots \right].$$

Ta wartość mogłaby być porównywalną z (6.5) tylko przy H_0/R rzędu $H_0/R = 3$, co jest oczywiście wykluczone.

Wreszcie w przekrojach pośrednich $0 < \theta < \pi/2$ na promieniu $r = \bar{r}$ występuje zarówno maksimum $|\sigma_r|$ jak i $|\tau_{r\theta}|$ i obie wartości maksymalne są określone wzorem (6.11) ze współczynnikiem odpowiednio $\cos \theta$ lub $\sin \theta$. Oznaczając wartość (6.11) przez t i pomijając małe na tym promieniu naprężenia σ_θ mamy

$$(6.15) \quad \sigma_0 = \sqrt{t^2 \cos^2 \theta + 3t^2 \sin^2 \theta} = t \sqrt{3 - 2 \cos^2 \theta} < t \sqrt{3},$$

zatem przekroje pośrednie są na promieniu \bar{r} mniej narażone od przekroju $\theta = \pi/2$ i ostatecznie punktem niebezpiecznym może tu być tylko $A_1 = C_1$, a ostateczny wzór obliczeniowy ma postać (6.5).

7. Przykład liczbowy

Zwymiarujemy pręt zakrzywiony obciążony siłą $P_y = P = 10\,000$ kG przy $P_x = M = 0$. Przyjmiemy $R = 80$ cm, $g = 10$ cm, $k = 1200$ kG/cm²; wtedy $H_0 = 20$ cm, oraz przy zachowaniu czterech wyrazów szeregu (6.5)

$$h = 20 \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{17}{2560} + \frac{1}{2560} \right) = 21,391 \text{ cm.}$$

Mamy więc promień wewnętrzny $a = 80 - 10,695 = 69,305$ cm, promień zewnętrzny $b = 80 + 10,695 = 90,695$ cm. Sprawdzając aktualny warunek bezpieczeństwa (2.6) otrzymujemy $\max \sigma_0 = 1203,3$ kG/cm², zatem błąd nie przekracza 0,3 %.

Literatura cytowana w tekście

1. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, t. I, PAU Kraków 1948.
2. R. KAPPUS, *Die Schubspannung in krummen Balken*, Stahlbau 21 (1952), 126; 22 (1953), 235.
3. П. Ф. ПАНКОВИЧ, *Теория упругости*, Гос. Изд. Оборонной Пром., Москва 1939.
4. J. WALCZAK, M. ŻYCZKOWSKI, *Nowy sposób wymiarowania prętów o dużej krzywiźnie*, Arch. Bud. Masz., 4 (1957), 33–61.
5. M. ŻYCZKOWSKI, *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, Z. angew. Math. Phys., 12 (1961), 572–576.
6. M. ŻYCZKOWSKI, *Tablice współczynników przy potęgowaniu szeregów potęgowych*, Zastosowania Mat., 6 (1963), 395–406.

Резюме

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ С НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ В СВЕТЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе рассматривается вопрос непосредственного подбора размеров стержня под влиянием нагрузки сосредоточенным моментом и сосредоточенной силой в произвольном направлении (рис. 1). По сравнению с работой [4] принято здесь в основу точные формулы теории упругости, а не элементарного сопротивления материалов, что однако вызвало сужение рассуждений к сечению в форме прямоугольника.

Самое большое приведенное напряжение на контуре стержня может появиться в точках A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 (рис. 1). Условия безопасности записано принимая во внимание все эти точки и решая их методом степенных рядов как уравнения с неизвестной высотой сечения h . Самое большое из этих значений определяет, существенно, необходимое значение высоты h , так как доказывается позже (хотя только в особых случаях), что внутри области стержня верхний предел приведенного напряжения появиться не может. Чтобы представить правила подбора соответствующей формулы сравниваются, непосредственно их результаты; они зависят от направления сосредоточенной силы (угол φ) и отношения этой силы к моменту, который характеризует параметр ψ (3.2). В плоскости φ — ψ определяются области, в которых обязывают формулы, (рис. 5), причем оказалось, что точка C_2 ни в коем случае не является опасной точкой.

Подробно обсуждается случай нормальной силы для свободного сечения при одновременном сечении момента и случай самой сосредоточенной силы, действующей в произвольном направлении. Точность формул иллюстрируется числовым примером.

S u m m a r y

DIRECT DESIGN OF BARS WITH AN INITIAL CURVATURE ON THE BASIS OF THE THEORY OF ELASTICITY

This paper is devoted to the problem of direct evaluation of the dimensions of a circularly curved bar loaded with a concentrated moment and a concentrated force of any direction, Fig. 1. By contrast with Ref. [4] accurate equations of the theory of elasticity are used instead of the elementary formulae of strength of materials. This necessitates the considerations to be confined to the case of a rectangular cross-section.

The maximum effective stress at the contour may occur at the points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 and C_2 , Fig. 1. The safety conditions are established for all of these points and solved by the method of power series for the unknown height h of the profile. The highest of them determines the absolutely necessary value of h , because, as shown later (in some particular cases, however), the upper bound of the effective stress cannot take place inside the region. In order to establish the rules for selecting the approximate formula, their results are compared directly. They depend on the direction of the concentrated force (angle φ) and the force-to-moment ratio described by the parameter ψ , (3.2). The validity regions of the equations are determined in the φ — ψ plane (Fig. 5), thus showing that the point C_2 is never dangerous.

The case in which the force is normal to the free section, with simultaneous action of the moment, and the case of a concentrated force acting alone in an arbitrary direction are discussed in detail. The accuracy of the equations is illustrated by a numerical example.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1964 r.