ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 13 (1965)

Z TEORII ODKSZTAŁCEŃ WIELOKROTNYCH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH OŚRODKA STOCHASTYCZNIE NIEJEDNORODNEGO (BETONU)

CZESŁAW EIMER (WARSZAWA)

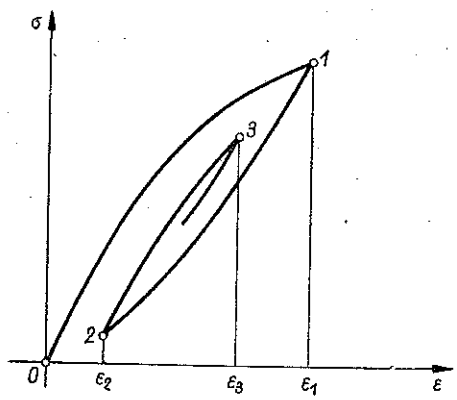
1. Konstrukcje spotykane w dzisiejszym budownictwie są z reguły narażone na kolejne cykle obciążenia i odciążenia. Jeśli cykle te przebiegają dostatecznie szybko, możemy abstrahować od zjawisk reologicznych i wyeliminować z rozważań wpływ prędkości przyrostu odkształceń; w szczególności bywa tak np. w przypadku obciążeń dynamicznych, tj. gdy tempo zmian określają prawa bezwładności. Jeśli, z drugiej strony, szybkość ta nie jest nadmierna, staramy się wówczas ująć proces jako sekwencję stanów termodynamicznie zrównoważonych o wzajemnie jednoznacznej zależności naprężenia od odkształcenia przy danym kierunku ruchu (tj. dla gałęzi obciążenia lub odciążenia), co np. w teorii plastyczności prowadzi do teorii zwanych deformacyjnymi. Ponieważ każdy z poprzednich cykli wprowadza w ogólności zmiany nieodwracalne, w szczególności odkształcenia plastyczne, zatem równanie krzywej $\sigma(\varepsilon)$ zależy od zasięgu tychże cykli, ma więc ogólnie postać

$$\sigma = \sigma(\varepsilon; \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

lub

$$\sigma = \sigma(\varepsilon; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ oraz $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ oznaczają ekstremalne naprężenia lub odkształcenia w kolejnych cyklach, tzn. takie, przy których następuje zmiana kierunku odkształcenia (czyli znaku $\dot{\varepsilon}$, por. rys. 1).

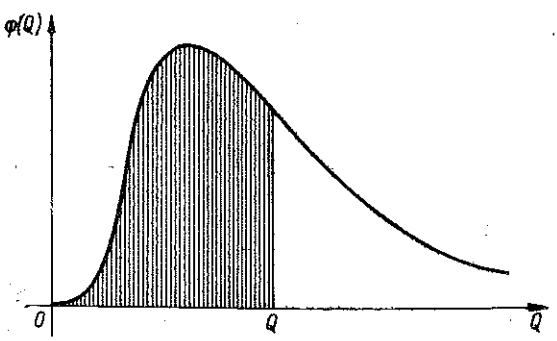


Rys. 1

Nieskończona w ogólności liczba równań powyższego typu dla kolejnych gałęzi krzywej $\sigma(\varepsilon)$ może być określona jedynie przez ustalenie modelu ośrodka, uwzględniającego własności poszczególnych ziaren i proporcje (ilości) poszczególnych typów ziaren. Jak stąd wynika, model taki ma charakter statystyczny. W najprostszym przypadku uwzględnienia tylko dwu podstawowych własności ziaren: idealnej sprężystości i idealnej plastyczności elementem modelu będzie układ szeregowy sprężyny i suwaka tarciowego (ciało idealnie sprężysto-plastyczne), a modelem dla zagadnień jednowymiarowych zespół bardzo wielu takich elementów (odpowiadających poszczególnym ziarnom) ustawionych równolegle obok siebie pomiędzy sztywnymi płaszczyznami, co odpowiada założeniu płaskich przekrojów.

Ponieważ założenie płaskich przekrojów odnosi się z samej swej istoty do makro-układu (złożonego z wielu mikro-elementów), tj. ma charakter fenomenologiczny, słuszniejsze byłoby mówić o założeniach jednowymiarowości zagadnienia i jednorodności mikro-odkształceń przy równoczesnej niejednorodności przypadkowej mikro-naprężeń. Oznacza to daleko idące uproszczenie problemu, gdyż w rzeczywistości zarówno pole mikro-naprężeń jak i pole mikro-odkształceń mają charakter pól przypadkowych przestrzennych i poprawne rozwiązanie zagadnień jednowymiarowych, o które nam tutaj chodzi (zwłaszcza z dziedziny żelbetnictwa, ustroje belkowe, ramowe itd), polegałoby na odpowiednim uśrednieniu «jednokierunkowym» wyników teorii ogólnej. Jednakże próby podejścia w ten sposób do zagadnień inżynierskich nie rokowałyby, zdaniem autora, powodzenia, przynajmniej na obecnym etapie rozwoju teorii i metod obliczeniowych, ze względu na bardzo skomplikowany charakter zagadnienia, ani też nie dawałyby gwarancji większej dokładności ze względu na konieczność poczynienia na samym wstępie szeregu założeń upraszczających dotyczących struktury geometrycznej i topologicznej («mikrostruktury») ośrodka, warunków plastyczności i praw płynięcia dla poszczególnych typów ziaren, mikro- i makroanizotropowości itd. Bardziej celowe z punktu widzenia zastosowań praktycznych wydaje się określenie występujących we wzorach parametrów bezpośrednio z badań doświadczalnych przy równoczesnym maksymalnym uproszczeniu teorii.

Z punktu widzenia naukowego teoria «jednowymiarowa» wystarcza do wykazania, że zachowanie się materiału wykazującego wyłącznie własności idealnej sprężystości i idealnej plastyczności (w każdym punkcie) jest znacznie bogatsze i bardziej złożone niż to sugeruje popularny wykres $\sigma(\varepsilon)$ złożony z dwu prostych (dla ciała doskonale sprężysto-plastycznego), w szczególności, że występuje zjawisko wzmocnienia i pojawiają się pętle histerezy przy cyklach odciążenia i obciążenia, a więc tym samym zjawisko tłumienia drgań (por. p. 4).



Rys. 2

Przyjmiemy, że poszczególne elementy w modelu jednowymiarowym mają takie same moduły sprężystości (sprężyny), natomiast różne granice plastyczności Q (określające graniczny opór tarcia w spoczynku suwaka). Jest to równoznaczne z przyjęciem założenia jednorodności w zakresie sprężystym, co w przypadku zagadnienia jednowymiarowego nie stanowi istotnego ograniczenia. Wartość Q uważamy za zmienną przypadkową o znanej dystrybuancie $\Phi(Q)$ i gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(Q)$ (rys. 2)[1]. Zakładamy, że dla poszczególnego ziarna granice plastyczności przy ści-

[1] W rachunku prawdopodobieństwa wielkości przypadkowe zwykle oznacza się dużymi literami, dane — małymi, z czego tu rezygnujemy gwoli nie komplikowania utartych oznaczeń, których sens wynika jasno z kontekstu.

skaniu i rozciąganiu mają tę samą wartość bezwzględną, przy czym Q traktujemy jako wielkość arytmetyczną, wobec czego rozkład $\varphi(Q)$ jest jednostronny, tj. $\varphi(Q) = 0$ dla $Q \leqslant 0$. Założenie to staje się zrozumiałe w świetle mechanizmu uplastycznienia, związanego np. z ruchem dyslokacji i poślizgami plastycznymi krystalitów, w których określony kierunek ruchu nie jest uprzywilejowany w stosunku do przeciwnego. W świetle tych uwag różne wartości granic «technicznych» Q_c i Q_r przy ściskaniu i rozciąganiu np. dla betonu są wynikiem nakładania się zjawisk o odmiennym mechanizmie, związanych z narastaniem mikrodefektów (mikrorys), jak to potwierdzają badania doświadczalne [3]. Ograniczając rozważania do obszaru dostatecznie oddalonego od naprężeń niszczących, ściskających i rozciągających, możemy abstrahować od tych zjawisk. Modele omówionego typu były przyjmowane w zagadnieniach tłumienia drgań [1, 6 i 8], jednakże bez bliższej analizy kolejnych cykli o dowolnych granicach obciążenia. Próbę uwzględnienia mikrorys metodami statystyki matematycznej w zagadnieniu trójwymiarowym podjął J. MURZEWSKI [5]; w teorii plastyczności znane są oparte na rozważaniach typu statystycznego teorie Batdorfa-Budianskyego, Lina i Besselinga. Model ogólniejszy od przyjętego w niniejszej pracy (o charakterze reologicznym) w przypadku odkształceń jednokierunkowych został podany przez autora [2].

2. W dalszym ciągu wskaźnikami nieparzystymi będziemy oznaczali odkształcenia maksymalne, parzystymi — minimalne (rys. 1). Stosownie do tego cykl $(2k, 2k+1)$ oznacza obciążenie, cykl $(2k-1, 2k)$ odciążenie. Wskaźnik 0 oznacza punkt wyjściowy, przy czym przyjmujemy $\sigma_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$; cykl «zerowy», tj. gałąź (0, 1) oznacza pierwotną krzywą obciążenia. Znaki naprężeń przyjmujemy w ten sposób, aby naprężenia w cyklu zerowym były dodatnie, co pozwala zachować powyższą konwencję wskaźników parzystych i nieparzystych.

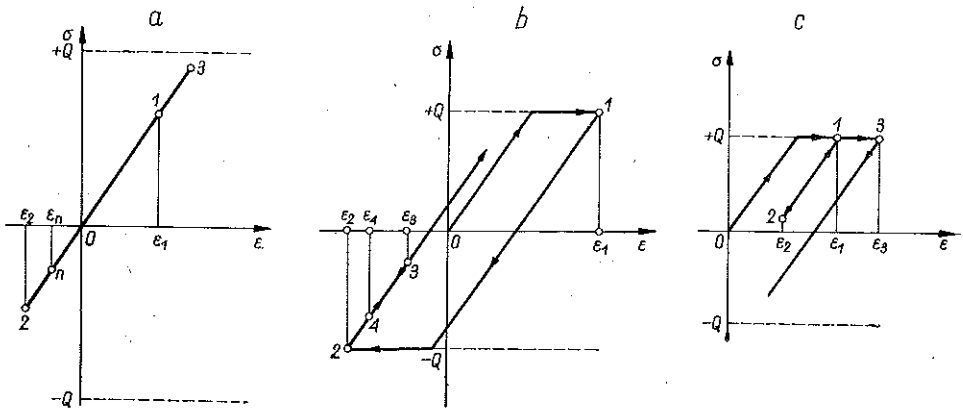
Napiszmy najpierw równanie gałęzi zerowej. Uwzględniając że $\sigma = E\varepsilon$ dopóki $E\varepsilon < Q$ oraz, że $\sigma = Q$, gdy $E\varepsilon \geqslant Q$, otrzymujemy

$$(2.1)\quad \sigma = \sigma(\varepsilon) = \int\limits_{E\varepsilon<Q} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{E\varepsilon>Q} Q\varphi(Q)\,dQ = E\varepsilon\,[1 - \Phi(E\varepsilon)] + \eta(E\varepsilon)$$

gdzie $\eta(Q)$ oznacza moment (pierwszego stopnia) pola zakreskowanego na rys. 2 względem początku układu (iloczyn pola przez ramię jego środka ciężkości). W powyższym równaniu pierwsza całka z prawej strony określa część naprężenia przenoszoną przez elementy, które nie osiągnęły jeszcze granicy plastyczności, druga — przez elementy, które ją już osiągnęły. Całki te można interpretować jako odnoszące się odpowiednio do części przekroju pozostającego w stanie sprężystym i w stanie plastycznym przy danym obciążeniu.

Rozważmy obecnie ogólnie n-tą gałąź krzywej $\sigma(\varepsilon)$ o odkształceniu «początkowym» ε_n. Aby określić naprężenie przenoszone przez poszczególny element, musimy znać położenie prostej odkształcenia sprężystego, po której posuwamy się w cyklu n, zależne od lokalnej wartości Q. Możliwe są tu trzy przypadki: (a) wszystkie poprzednie ekstremalne odkształcenia mieściły się w obszarze sprężystym $|\varepsilon_i| < Q$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (rys. 3a); (b) odkształcenie ε_k, gdzie k jest liczbą *parzystą*, mieściło się w obszarze plastycznym, tj. odpowiadało naprężeniu $-Q$, podczas gdy wszystkie

odkształcenia dalsze, $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n$ w obszarze sprężystym [2] $(\varepsilon_k, \varepsilon_k + 2Q/E)$; innymi słowy, położenie prostej «sprężystej» jest określone przez punkt «dolny» $(\varepsilon_k, -Q)$ (rys. 3b); (c) odkształcenie ε_k, gdzie k jest liczbą *nieparzystą*, mieściło się w obszarze plastycznym, a więc odpowiadało naprężeniu $+Q$, natomiast odkształcenia $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n$ w obszarze sprężystym $(\varepsilon_k, \varepsilon_k - 2Q/E)$; położenie prostej określa punkt «górny» (ε_k, Q) (rys. 3c).



Rys. 3

Jeśli n-ta gałąź była np. gałęzią obciążenia (n parzyste), to naprężenia w rozważanym elemencie podczas tego cyklu wyniosą: w przypadku (a) $\sigma = E\varepsilon$ dla $E\varepsilon < Q$, $\sigma = Q$ dla $E\varepsilon > Q$; w przypadku (b) $\sigma = -Q + E(\varepsilon - \varepsilon_k)$ dla $\varepsilon < \varepsilon_k + 2Q/E$, $(E(\varepsilon - \varepsilon_k)/2 < Q)$, $\sigma = Q$ dla $\varepsilon > \varepsilon_k + 2Q/E$; w przypadku (c) $\sigma = Q - E(\varepsilon_k - \varepsilon)$ dla $\varepsilon < \varepsilon_k$, $\sigma = Q$ dla $\varepsilon > \varepsilon_k$. Przypadek o ε_k w obszarze plastycznym, $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n$ w sprężystych oznaczymy ogólnie przez (k, n).

Powyższe naprężenia cząstkowe należy całkować według wartości Q możliwych dla danego przypadku, a następnie sumować dla kolejnych przypadków. Przy ustalonych wartościach $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ rozmieszczenie odkształceń ε_i w obszarach sprężystych bądź plastycznych jest określone całkowicie wartością Q, wobec czego danemu przypadkowi (k, n) muszą odpowiadać wartości Q zawarte w określonych granicach

$$q_k^n < Q < Q_k^n, \tag{2.2}$$

gdzie q_k^n i Q_k^n oznaczają odpowiednio minimalną i maksymalną dla tegoż przypadku wartość Q [oczywiście wartość «początkowa» q_k^n dla przypadku (k, n) jest jednocześnie wartością «końcową» Q_r^n dla pewnego innego przypadku (r, n)]. Przy odkształceniach wyłącznie sprężystych [przypadek (a)] oznaczymy wartość dolną przez q_0^n, co oznacza, że odkształcenia występują w różnicach typu $\varepsilon - \varepsilon_0$ i napręże-

[2] Nawiasy okrągłe używane są w dalszym ciągu na oznaczenie obszaru odkształceń bądź współrzędnych punktu (ε, σ), bądź wreszcie przypadku odkształcenia (por. niżej), co w odnośnym kontekście nie budzi nieporozumień.

nia zaczynają rosnąć począwszy od ε_0; mamy tutaj $q_0^n = \max |\varepsilon_i|$ oraz $Q_0^n = \infty$. Dla pewnego przypadku (r, n) mamy oczywiście $q_r^n = 0$.

Zgodnie z nierównością (2.2) prawdopodobieństwo pojawienia się przypadku (k, n) wynosi

$$p_k^n = \Phi(Q_k^n) - \Phi(q_k^n). \tag{2.3}$$

Rozważmy przypadek (k, n), gdzie k i n są parzyste (gałąź obciążenia), scharakteryzowany nierównością (2.2). Jeśli $q_k^n < E(\varepsilon - \varepsilon_k)/2 < Q_k^n$ (dla $k \neq 0$), to granice całek po Q będą określone wartościami $E(\varepsilon - \varepsilon_k)/2$ oraz q_k^n bądź Q_k^n, jeśli zaś $E(\varepsilon - \varepsilon_k)/2 < q_k^n$ lub $E(\varepsilon - \varepsilon_k)/2 > Q_k^n$ — wartościami q_k^n i Q_k^n. Równanie gałęzi n będzie więc miało w ogólności różne postacie na kolejnych odcinkach oddzielonych «dolnymi» i «górnymi» wartościami[3] ε:

$${}^d\varepsilon_k^n = \varepsilon_k + 2q_k^n/E, \qquad {}^g\varepsilon_k^n = \varepsilon_k + 2Q_k^n/E,$$

co odzwierciedla wpływ zmian nieodwracalnych wprowadzonych w poprzednich cyklach. Analogiczne wartości dla k nieparzystego i gałęzi odciążenia wyniosą

$${}^d\varepsilon_k^n = \varepsilon_k - 2Q_k^n/E, \qquad {}^g\varepsilon_k^n = \varepsilon_k - 2q_k^n/E.$$

Stosując zapis w formie ogólnej, aby uniknąć wypisywania równań dla poszczególnych odcinków, otrzymamy:

dla gałęzi obciążenia (n parzyste)

$$\begin{aligned}\sigma = \sigma(\varepsilon; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = &\left[\int\limits_{\substack{E\varepsilon<Q\\ q_0^n<Q}} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{\substack{E\varepsilon>Q\\ q_0^n<Q}} Q\varphi(Q)\,dQ\right] + \\ &+ \sum_{k=2,4,\ldots}^{n}\left\{\int\limits_{\substack{E(\varepsilon-\varepsilon_k)/2<Q\\ q_k^n<Q<Q_k^n}} [-Q + E(\varepsilon - \varepsilon_k)]\,\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{\substack{E(\varepsilon-\varepsilon_k)/2>Q\\ q_k^n<Q<Q_k^n}} Q\varphi(Q)\,dQ\right\} + \\ &+ \sum_{k=1,3,\ldots}^{n-1}\left\{\int\limits_{\substack{q_k^n<Q<Q_k^n\\ \varepsilon<\varepsilon_k}} [Q - E(\varepsilon_k - \varepsilon)]\,\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{\substack{q_k^n<Q<Q_k^n\\ \varepsilon>\varepsilon_k}} Q\varphi(Q)\,dQ\right\};\end{aligned} \tag{2.4}$$

dla gałęzi odciążenia (n nieparzyste)

$$\begin{aligned}\sigma = &\left[\int\limits_{\substack{E\varepsilon>-Q\\ q_0^n<Q}} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ - \int\limits_{\substack{E\varepsilon<-Q\\ q_0^n<Q}} Q\varphi(Q)\,dQ\right] + \\ &+ \sum_{k=1,3,\ldots}^{n-1}\left\{\int\limits_{\substack{E(\varepsilon_k-\varepsilon)/2<Q\\ q_k^n<Q<Q_k^n}} [Q - E(\varepsilon_k - \varepsilon)]\,\varphi(Q)\,dQ - \int\limits_{\substack{E(\varepsilon_k-\varepsilon)/2>Q\\ q_k^n<Q<Q_k^n}} Q\varphi(Q)\,dQ\right\} + \\ &+ \sum_{k=2,4,\ldots}^{n}\left\{\int\limits_{\substack{q_k^n<Q<Q_k^n\\ \varepsilon>\varepsilon_k}} [-Q + E(\varepsilon - \varepsilon_k)]\,\varphi(Q)\,dQ - \int\limits_{\substack{q_k^n<Q<Q_k^n\\ \varepsilon<\varepsilon_k}} Q\varphi(Q)\,dQ\right\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

[3] W przypadku $k = 0$ nie należy mnożyć przez 2 drugiego składnika.

W powyższych wzorach sumować należy tylko po tych wskaźnikach k, które są możliwe w danym przypadku, tj. przy określonym układzie wartości ε_i (por. niżej p. 3). Nierówności określające granice całkowania muszą być spełnione łącznie. Wynika stąd, że np. dla gałęzi obciążenia należy odciąć wszelkie ε_k dla k nieparzystych oraz ${}^d\varepsilon_k^n$, ${}^g\varepsilon_k^n$ dla k parzystych; te odcięte oddzielają poszczególne odcinki krzywej o odmiennej postaci równań. Całki typu

$$\int_{q_k^n}^{Q_k^n} \varphi(Q)\, dQ = \Phi(Q_k^n) - \Phi(q_k^n) = p_k^n,$$

$$\int_{q_k^n}^{Q_k^n} Q\varphi(Q)\, dQ = \eta(Q_k^n) - \eta(q_k^n)$$

są oczywiście stałymi. Natomiast całki typu np.

$$\int_{E(\varepsilon_k-\varepsilon)/2}^{Q_k^n} E(\varepsilon_k - \varepsilon)\, \varphi(Q)\, dQ = E(\varepsilon_k - \varepsilon)\, [\Phi(Q_k^n) - \Phi(E(\varepsilon_k - \varepsilon)/2)]$$

są funkcjami ε, tj. wywierają istotny wpływ na przebieg krzywej.

3. Do pełnego rozwiązania zagadnienia w przypadku ogólnym (dowolnych ε_i) potrzebne jest ustalenie dogodnej metody określania wartości q_k^n i Q_k^n. Otóż jeśli pewne odkształcenie znajduje się w obszarze «plastycznym», to o tym, które następne z kolei znajdzie się w tymże obszarze, decyduje to, czy określona (maksymalna) różnica $\varepsilon_i - \varepsilon_r$, gdzie i jest pewną liczbą nieparzystą, r parzystą, jest mniejsza lub większa od wartości $2Q/E$ (przy $r \neq 0$). Jeśli $r = 0$, to należy brać $2(\varepsilon_i - \varepsilon_0)$; nie mogą także, jak widać, decydować różnice o wartości ujemnej.

Utwórzmy wszelkie możliwe różnice i uporządkujmy je według rosnących wartości (dodatnich). Np. dla $n = 5$ korzystamy z poniższego schematu

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 3 & & 5 & & \\ 0 & & & 2 & & 4 & & & \end{array}$$

Różnice te tworzymy dla takich ε, ażeby jeden wskaźnik był parzysty, drugi nieparzysty, przy czym 0 uważamy za parzyste bądź nieparzyste. Np. w powyższy schemacie, jeśli pominiemy różnice o wartości ujemnej, otrzymamy

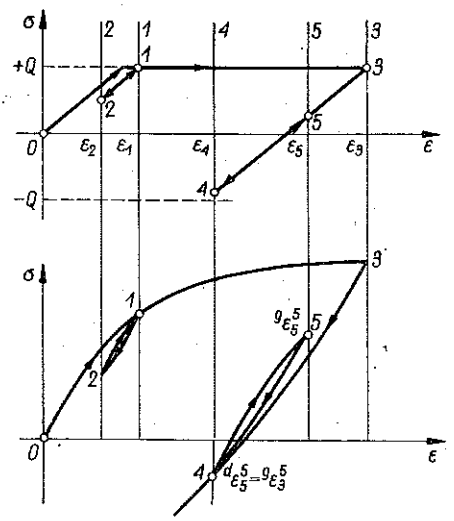
$$2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) = 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_3, 2\varepsilon_5, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_5 - \varepsilon_2, \varepsilon_5 - \varepsilon_4.$$

Po uporządkowaniu i oznaczeniu $\varepsilon_i - \varepsilon_r = [i, r]$, $2(\varepsilon_i - \varepsilon_0) = [i, 0]$ (na pierwszym miejscu występuje zawsze wskaźnik nieparzysty, na drugim parzysty) będzie np. (rys. 4):

przypadek (k, n):	(5,5)	(5,5)⊤(4,5)⊤(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)⊤(0,5)	
różnica $[i, r]$:		[1,2]	[5,4]	[3,4]	[1,0]	[5,2]	[3,2]	[5,0]	[3,0]

Wartość $2Q/E$ może leżeć w każdym z przedziałów utworzonych przez sąsiednie różnice, co oznaczymy kreską pionową, np. $[3,4] < 2Q/E < [1,0]$.

W celu określenia możliwych przypadków (k, n) posuwamy się po kolejnych wskaźnikach, począwszy od zera, przyjmując kolejne możliwe położenia $2Q/E$ i określamy k, tj. wskaźnik «ostatniego» odkształcenia w obszarze plastycznym. Aby ustalić, czy pewne ε_m leży w obszarze plastycznym («dolnym» dla m parzystego, «górnym» dla nieparzystego) rozważamy kolejno odkształcenia ε_{m-1}, $\varepsilon_{m-2}, \ldots$ i bierzemy pod uwagę pierwsze z kolei, które leży w obszarze plastycznym, np. ε_i lub ε_r, przyczym uważamy ε_0 zawsze za «plastyczne» (gdyż posługujemy się podwójną różnicą) i stosujemy następujące dwie reguły:



Rys. 4

1) Niech m i odnośny wskaźnik i lub r nie będą równocześnie parzyste lub nieparzyste; wówczas gdy różnica $[m, r]$ (dla m nieparzystego) bądź $[i, m]$ (dla m parzystego) leży powyżej (tj. na prawo od) przyjętej wartości $2Q/E$, to ε_m jest «plastyczne», jeśli zaś poniżej — «sprężyste»,

2) Niech m oraz i lub r będą równocześnie parzyste lub nieparzyste; wówczas jeśli $\varepsilon_m > \varepsilon_i$ (dla m nieparzystego) bądź $\varepsilon_m < \varepsilon_r$ (dla m parzystego), to ε_m jest «plastyczne», w przeciwnym razie — «sprężyste».

Oznaczmy krótko przez p położenie w obszarze plastycznym przez s w sprężystym. Stosując te reguły mamy więc w powyższym schemacie (dla przyjętej wielkości $2Q/E$ leżącej między [3,4] a [1,0]), $\varepsilon_1\, p$ (bo [1,0] jest na prawo od kreski), $\varepsilon_2\, s$ (bo [1,2] na lewo od kreski), $\varepsilon_3\, p$, $\varepsilon_4\, s$, ε_5, s, czyli przypadek $(k, n) = (3,5)$. Gdyby kreska była między [1,0] a [5,2], mielibyśmy $\varepsilon_1\, s$, $\varepsilon_2\, s$ (ponieważ różnica [0,2] jako ujemna jest zawsze na lewo od kreski, gdyż Q musi być dodatnie), $\varepsilon_3\, p$, $\varepsilon_4\, s$, $\varepsilon_5\, s$, a więc znowu przypadek (3,5). Dla kreski między [3,2] a [5,0] byłoby $\varepsilon_1\, s$, $\varepsilon_2\, s$, $\varepsilon_3\, p$ (bo [3,0] jest «pierwszym» odkształceniem na prawo od kreski), $\varepsilon_4\, s$, $\varepsilon_5\, s$, tj. przypadek (3,5) itd. Wypisując między różnicami numery przypadków widzimy, że są możliwe cztery: (0,5), tj. sprężysty, (3,5), (4,5), (5,5). Granice przypadków oraz granice odkształceń oddzielających odcinki krzywej są następujące:

$$Q_0^5 = \infty, \qquad {}^d\varepsilon_0^5 = \varepsilon_0 - \infty = -\infty,$$
$$q_0^5 = Q_3^5 = E\,[3,0]/2 = E\varepsilon_3, \qquad {}^g\varepsilon_0^5 = \varepsilon_0 - \varepsilon_3 = -\varepsilon_3,$$
$$q_3^5 = Q_4^5 = E\,(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2, \qquad {}^d\varepsilon_3^5 = \varepsilon_3 - 2\varepsilon_3 = -\varepsilon_3,$$
$$q_4^5 = Q_5^5 = E\,(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)/2, \qquad {}^g\varepsilon_5^5 = \varepsilon_3 - (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \varepsilon_4,$$
$$q_5^5 = 0, \qquad {}^d\varepsilon_5^5 = \varepsilon_5 - (\varepsilon_5 - \varepsilon_4) = \varepsilon_4,$$
$${}^g\varepsilon_5^5 = \varepsilon_5 - 0 = \varepsilon_5.$$

Ponieważ chodzi o gałąź odciążenia, należy uwzględnić tylko ${}^{d}\varepsilon_k^n$, ${}^{g}\varepsilon_k^n$ dla k nieparzystych. Granice te można od razu odczytać z zestawienia różnic uporządkowanych według wielkości, np. dla (3,5) i różnicy [3,4] widać, że pozostaje ε_4 itd. Podział krzywej (gałęzi 5) na poszczególne odcinki (z uwzględnieniem w myśl równania (2,5) odkształceń parzystych ε_2, ε_4) pokazany jest na rys. 4b. Np. na odcinku $\varepsilon_4 < \varepsilon < \varepsilon_5$ równanie krzywej ma postać [wzór (2.5)]

$$\sigma = \int_{E\varepsilon_5}^{\infty} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ + \int_{E(\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2}^{E\varepsilon_3} [Q - E(\varepsilon_3 - \varepsilon)]\,\varphi(Q)\,dQ - \int_{0}^{E(\varepsilon_5-\varepsilon)/2} Q\varphi(Q)\,dQ +$$

$$+ \int_{E(\varepsilon_5-\varepsilon)/2}^{E(\varepsilon_5-\varepsilon_4)/2} [Q - E(\varepsilon_5 - \varepsilon)]\varphi(Q)\,dQ + \int_{E(\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2}^{E(\varepsilon_3-\varepsilon_4)/2} [-Q + E(\varepsilon - \varepsilon_4)]\,\varphi(Q)\,dQ =$$

$$= [1 - \Phi(E\varepsilon_3)]\,E\varepsilon - [\Phi(E\varepsilon_3) - \Phi(E(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2)]\,E(\varepsilon_3 - \varepsilon) + \eta(E\varepsilon_3) -$$

$$- \eta(E(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2) + \eta(E(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)/2) - 2\eta(E(\varepsilon_5 - \varepsilon)/2) -$$

$$- [\Phi(E(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)/2) - \Phi(E(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)/2)]\,E(\varepsilon_5 - \varepsilon) + [\Phi(E(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2) -$$

$$- \Phi(E(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)/2)]\,E(\varepsilon - \varepsilon_4) - \eta(E(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2) + \eta(E(\varepsilon_5 - \varepsilon_4)/2);$$

wyrażenie to można uprościć, co tutaj pomijamy.

4. W zastosowaniach praktycznych wzory upraszczają się znacznie, a opisana procedura prowadzi z reguły szybko do celu. Przede wszystkim zauważmy, że cykle obciążenia i odciążenia tworzą pętle zamknięte, tj. po przekroczeniu ekstremalnego odkształcenia powracamy do krzywej wyjściowej (por. np. pętle 1-2 i 4-5 na rys. 4b). Widać to od razu z równań (2.4) i (2.5), gdyż np. dla gałęzi obciążenia dla $E\varepsilon > q_0^n = \max \varepsilon_i$ mamy

$$\sigma = \int_{\substack{E\varepsilon<Q \\ q_0^n<Q}} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ + \int_{\substack{E\varepsilon>Q \\ q_0^n<Q}} Q\varphi(Q)\,dQ + \sum_{k=2,4,\ldots}^{n} \int_{q_k^n<Q<Q_k^n} Q\varphi(Q)\,dQ +$$

$$+ \sum_{k=1,3,\ldots}^{n-1} \int_{q_k^n<Q<Q_k^n} Q\varphi(Q)\,dQ = \int_{E\varepsilon}^{\infty} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ + \int_{0}^{E\varepsilon} Q\varphi(Q)\,dQ$$

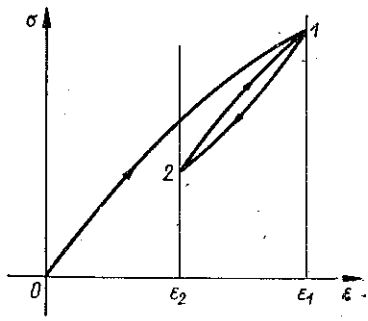
ponieważ całki pod znakami sum wyczerpują przedział całkowania od 0 do q_0^n, otrzymaliśmy więc równanie gałęzi zerowej. Widać to również bezpośrednio z rysunków w rodzaju rys. 3, gdyż przy osiągnięciu odkształcenia max ε_i mamy zawsze te same naprężenia w poszczególnych elementach, tj. ten sam stan wyjściowy bez względu na przebieg poprzednich odkształceń poniżej tej wartości. Zgodnie z tym możliwe są tylko przypadki odnoszące się do gałęzi wyjściowej [np. w powyższym przykładzie (0,5) i (3,5) dla gałęzi 3] oraz odkształceń dalszych [(4,5) i (5,5)], nie zaś np. (2,5) (rys. 4b).

Zanalizujmy bliżej cykl zamknięty, tj. przebiegający między stałymi odkształceniami i naprężeniami skrajnymi; gdy są one ustalone, wszystkie dalsze gałęzie

odpowiednio obciążenia i odciążenia są identyczne. Jak widać, bez zmniejszenia ogólności wyników, wystarczy rozważyć cykl 1-2-1, dla którego mamy np. (rys. 5):

gałąź 1 (odciążenie) $^{(1,1)}_{[1,0]}{}^{(0,1)}$

gałąź 2 (obciążenie) $^{(2,2)}_{[1,2]}{}^{(1,2)}_{[1,0]}{}^{(0,2)}$



Rys. 5

W myśl (2.4) i (2.5) otrzymujemy następujące równania:

dla gałęzi 1 (odciążenie)

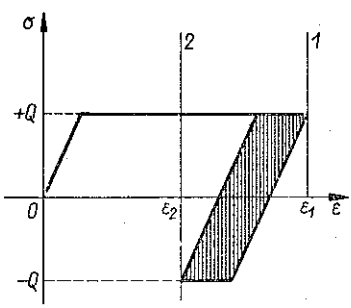
$$(4.1)\qquad \sigma = \int\limits_{E\varepsilon_1}^{\infty} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{E(\varepsilon_1-\varepsilon)/2}^{E\varepsilon_1} [Q - E(\varepsilon_1 - \varepsilon)]\,\varphi(Q)\,dQ - \int\limits_{0}^{E(\varepsilon_1-\varepsilon)/2} Q\varphi(Q)\,dQ,$$

dla gałęzi 2 (obciążenie)

$$(4.2)\qquad \sigma = \int\limits_{E\varepsilon_1}^{\infty} E\varepsilon\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{E(\varepsilon-\varepsilon_2)/2}^{E(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2} [-Q + E(\varepsilon - \varepsilon_2)]\,\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{0}^{E(\varepsilon-\varepsilon_2)/2} Q\varphi(Q)\,dQ + \int\limits_{E(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2}^{E\varepsilon_1} [Q - E(\varepsilon_1 - \varepsilon)]\,\varphi(Q)\,dQ.$$

Podstawiając odpowiednio $\varepsilon = \varepsilon_1$ i $\varepsilon = \varepsilon_2$ do granic całkowania i funkcji podcałkowych sprawdzamy, że punkty skrajne obu gałęzi pokrywają się. Wstawiając te wartości kolejno do (4.1) i odejmując stronami otrzymamy

$$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = 2\eta(E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2) + E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,[1 - \Phi(E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2)];$$



Rys. 6

oznaczając $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ otrzymamy wzór na średni moduł odkształcenia w cyklu zamkniętym

$$(4.3)\qquad E' = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{2\eta(E\Delta\varepsilon/2)}{\Delta\varepsilon} + E\,[1 - \Phi(E\Delta\varepsilon/2)].$$

Jak widać, moduł E' maleje wraz z amplitudą.

Pracę zużytą w cyklu na pokonanie sił tarcia wewnętrznego, równą polu zawartemu między gałęziami 1-2 oraz 2-1, obliczymy sumując prace cząstkowe tych elementów, które dają cykle zamknięte, tj. o $Q < E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$ (rys. 6):

$$(4.4)\qquad L = \int\limits_{0}^{E(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2} 2Q\,[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - 2Q/E]\,\varphi(Q)\,dQ = 2\Delta\varepsilon\eta(E\Delta\varepsilon/2) - \frac{4}{E}\gamma(E\Delta\varepsilon/2),$$

gdzie $\gamma(Q) = \int_0^Q Q^2 \varphi(Q)\, dQ$ oznacza moment drugiego stopnia odpowiedniego pola na wykresie $\varphi(Q)$. Stąd współczynnik strat energii, równy w przybliżeniu (przy niewielkich stratach) podwójnemu dekrementowi logarytmicznemu tłumienia drgań, wynosi

$$\psi = \frac{L}{\frac{1}{2}E'(\Delta\varepsilon)^2} = \frac{4E\Delta\varepsilon\eta(E\Delta\varepsilon/2) - 8\gamma(E\Delta\varepsilon/2)}{2E\Delta\varepsilon\eta(E\Delta\varepsilon/2) + E^2(\Delta\varepsilon)^2[1 - \Phi(E\Delta\varepsilon/2)]}. \tag{4.5}$$

Jest to formula przybliżona, którą można stosować przy niezbyt wielkim tłumieniu. Na plan pierwszy wysuwa się wielokrotnie doświadczalnie sprawdzona zależność tłumienia od amplitudy $\Delta\varepsilon$. Jeśli jednak wkraczają w sposób istotny nowe mechanizmy zjawisk, związane z tworzeniem się mikrorys, to może nastąpić zmniejszanie się, a potem ponowny wzrost tłumienia (innymi słowy, występuje pewne minimum tłumienia). Taki przebieg zjawisk potwierdzają badania doświadczalne R. KOWALCZYKA [4].

5. Znajomość równań krzywych obciążenia i odciążenia jest konieczna w wielu zagadnieniach, jak np. drgań tłumionych, samonaprężeń, teorii przegubów plastycznych, odkształceń przy wielokrotnych obciążeniach itd. Na tym miejscu nie będziemy analizowali poszczególnych problemów, natomiast podamy pewne ogólne zalecenia dla obliczeń liczbowych.

Otóż jako funkcję $\varphi(Q)$ dogodnie jest przyjąć rozkład gamma, spełniający postulat asymetryczności, określony tylko dla $Q > 0$:

$$\varphi(Q) = \frac{\beta^m}{\Gamma(m)} e^{-\beta Q} Q^{m-1}, \tag{5.1}$$

gdzie β i m są stałymi parametrami, przy czym ograniczymy się do m naturalnych, co nie stanowi istotnego zawężenia możliwości w zastosowaniach praktycznych, a znacznie upraszcza obliczenia. Mamy, jak wiadomo, (por. np. [2]),

$$\Phi(Q) = 1 - e^{-\beta\bar{Q}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\beta Q)^k}{k!} \tag{5.2}$$

oraz

$$\eta(Q) = \frac{(m, \beta Q)!}{\beta(m-1)!} = \frac{m}{\beta}\left[1 - e^{-\beta Q} \sum_{k=0}^{m} \frac{(\beta Q)^k}{k}\right], \tag{5.3}$$

ponieważ

$$(m, t)! = \int_0^t e^{-x} x^m\, dx = m!\left(1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!}\right).$$

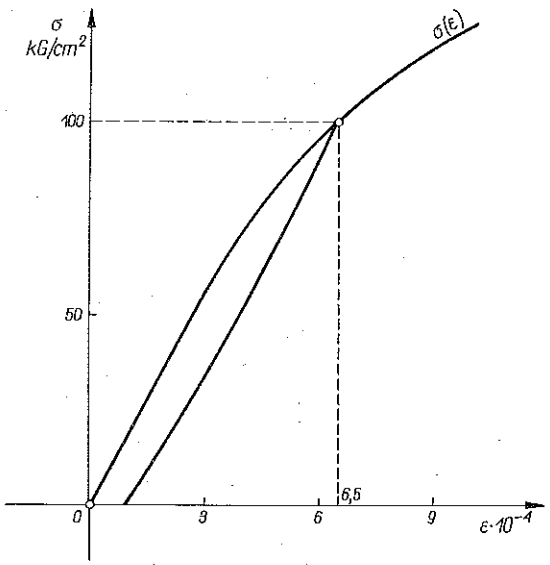
Wartość przeciętna Q dla rozkładu gamma wynosi

$$\bar{Q} = \frac{m}{\beta}, \tag{5.4}$$

a odchylenie standardowe, charakteryzujące dyspersję Q,

$$\mu_Q = \frac{\sqrt{m}}{\beta} = \frac{\overline{Q}}{\sqrt{m}}. \tag{5.5}$$

Jak widać, dla materiałów o ostro zarysowanej granicy plastyczności (np. dla stali miękkiej, oczywiście bez uwzględnienia zjawisk wzmocnienia) należy przyjmować wysokie wartości m, natomiast dla takich materiałów jak beton, gdzie odkształcenia plastyczne rozpoczynają się niemal od początku obciążenia, wystarczą wartości



Rys. 7

niskie, np. $m = 2$ lub $m = 3$. Na rysunku 7 podaliśmy wykresy gałęzi pierwszego obciążenia i pierwszego odciążenia obliczone dla $m = 2$. Równanie gałęzi obciążenia pierwotnego ma w tym przypadku, zgodnie z (2.1), postać następującą:

$$\sigma = E\varepsilon\, e^{-\beta E\varepsilon}(1 + \beta E\varepsilon) + \frac{2}{\beta}\left[1 - e^{-\beta E\varepsilon}\left(1 + \beta E\varepsilon + \frac{1}{2}(\beta E\varepsilon)^2\right)\right] =$$

$$= E\varepsilon e^{-\theta}(1+\theta) + \overline{Q}\left[1 - e^{-\theta}\left(1 + \theta + \frac{1}{2}\theta^2\right)\right],$$

gdzie oznaczono

$$\theta = 2\frac{E\varepsilon}{\overline{Q}} = 2E\varepsilon\frac{\beta}{m} = \beta E\varepsilon.$$

Analogicznie otrzymujemy dla gałęzi odciążenia [wzór (4.1)].

$$\sigma = E\varepsilon\,[1 - \Phi(E\varepsilon_1)] + \eta(E\varepsilon_1) - 2\eta(E(\varepsilon_1 - \varepsilon)/2) - E(\varepsilon_1 - \varepsilon)\,[\Phi(E\varepsilon_1) -$$

$$- \Phi(E(\varepsilon_1 - \varepsilon)/2)] = E\varepsilon e^{-\theta_1}(1 + \theta_1) + \overline{Q}\,[1 - e^{-\theta_1}(1 + \theta_1 + \tfrac{1}{2}\theta_1^2)] -$$

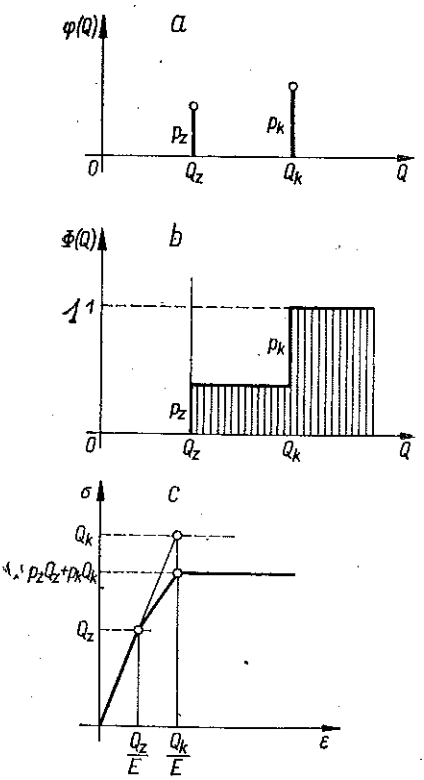
$$- 2\overline{Q}[1 - e^{-\vartheta}(1 + \vartheta + \tfrac{1}{2}\vartheta^2)] - \vartheta\overline{Q}\,[e^{-\vartheta}(1 + \vartheta) - e^{-\theta_1}(1 + \theta_1)],$$

gdzie

$$\vartheta = \frac{E(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{Q} = \frac{\beta E(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{2}, \qquad \theta_1 = \beta E \varepsilon_1,$$

zaś σ_1 jest naprężeniem odpowiadającym ε_1 (tj. punktowi «zwrotnemu» na wykresie) na gałęzi obciążenia. Na rysunku 7 przyjęto dla betonu średniej jakości $Q = 150$ kG/cm², $E = 200\,000$ kG/cm², $\sigma_1 = 100$ kG/cm². Przykład dotyczy oczywiście betonu ściskanego, przy którym w pierwszym przybliżeniu można ograniczyć się do modelu sprężysto-plastycznego z pominięciem zjawisk wywołanych mikrorysami.

6. Wspomnimy na koniec o możliwości bardzo prostej aproksymacji krzywych $\sigma(\varepsilon)$ liniami łamanymi, co odpowiada zastąpieniu rozkładów rzeczywistych $\varphi(Q)$ rozkładami kilkopunktowymi. Jest to równoważne przyjęciu jako modelu układu prętów (równoległych) o tych samych własnościach sprężystych a różnych granicach plastyczności. Krzywe obciążenia dla takich modeli były rozważane w literaturze [7]; rozwiązanie, zwłaszcza w przypadku rozkładu dwupunktowego, jest bardzo proste.



Rys. 8

Niech np. w przypadku betonu średnia granica plastyczności kruszywa wynosi Q_k, zaprawy Q_z, natomiast przeciętne stosunki części pola przekroju zajętych odpowiednio przez kruszywo i przez zaprawę do pola całkowitego wynoszą p_k i p_z, gdzie $p_k + p_z = 1$. Możemy tu zastosować rozkład dwupunktowy o wartościach zmiennej niezależnej Q_k i Q_z i odpowiednich prawdopodobieństwach p_k i p_z. Krzywa np. obciążenia pierwotnego będzie posiadała dwa punkty załamania (rys. 8). Na odcinku $0 < \varepsilon < Q_z/E$ równanie krzywej zgodnie z (2.1) przyjmie postać

$$\sigma = E\varepsilon;$$

na odcinku $Q_z/E < \varepsilon < Q_k/E$,

$$\sigma = E\varepsilon(1 - p_z) + Q_z p_z = p_k E\varepsilon + p_z Q_z;$$

na odcinku $\varepsilon > Q_k/E$

$$\sigma = p_z Q_z + p_k Q_k = \text{const}.$$

Wartość ε w drugim punkcie załamania obliczymy podstawiając $\sigma = p_z Q_z + p_k Q_k$ do drugiego z wymienionych równań.

Jak wiadomo, w praktycznych obliczeniach belek zbrojonych wykres naprężeń w strefie ściskanej [jednokładny do wykresu $\sigma(\varepsilon)$] aproksymujemy wykresem

trójkątnym, prostokątnym lub trapezowym. Wykres na rys. 8c stanowi lepszą aproksymację od powyższych wykresów, poprzez uzależnienie od proporcji i własności zaprawy i kruszywa. Teoria daje możność dowolnego poprawienia aproksymacji przez zastosowanie wykresu łamanego o odpowiedniej liczbie odcinków, przy tym dla dowolnej gałęzi obciążenia lub odciążenia.

Literatura cytowana w tekście

1. R. Becker, Zeitschrift für Physik, **33** (1925), 113.
2. C. Eimer, *Reologiczna teoria wytrzymałości i jej zastosowanie do betonu*, Rozpr. Inżyn., 4, **11** (1963).
3. T. T. C. Hsu, F. O. Slate, G. M. Sturman, G. Winter, *Microcracking of plain concrete and the shape of the stress-strain curve*, J. Amer. Concr. Inst., 2, **60** (1963).
4. R. Kowalczyk, A. Rösli, *Dynamische Versuche an der Glattbrücke in Opfikon*, Schweizer Archiv, 2 (1963).
5. J. Murzewski, *Elastic-plastic stochastically non-homogeneous bodies*, Symp. IUTAM Proc. 1958 (Warszawa), Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press 1959.
6. Г. С. Писаренко, *Рассеяние энергии при механических колебаниях*, Киев 1962.
7. W. Prager, P. G. Hodge, *Theory of perfectly plastic solids*, N. York 1951.
8. Э. С. Сорокин, *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем*, Москва 1960.
9. Wartenberg, Verh. Deutsch. Phys. Gesellschaft, **20** (1918), 113.

Р е з ю м е

ИЗ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНЫХ УПРУГ.-ОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ, СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ (БЕТОНА)

В работе развивается теория кривых нагрузки и разгрузки, при произвольном процессе нагрузок и разгрузок, предполагая при этом одновременное существование упругих и пластических деформаций. Теория основывается на статистической модели, состоящей из идеально упруго-пластических элементов, с переменным, согласно заданному распределению вероятностей, пределом пластичности Q. Даются уравнения произвольной ветви нагрузки и разгрузки, форма которой зависит от распределения Q и может быть применена к произвольной форме экспериментальной диаграммы. Приводится формула для относительных потерь энергии в цикле, вызванных внутренним трением (пропорционально, в приближении, к логарифмическому декременту затухания колебаний) и доказывается, что они зависят от величины амплитуды, как это многократно подтверждают эксперименты. Выводятся конкретные формулы, принимая распределения гамма и точечные; в этом последнем случае форму кривой можно просто связать с пластическими свойствами элементов среды (напр. цементного раствора и заполнителя в бетоне).

S u m m a r y

A THEORY OF MULTIPLE ELASTIC-PLASTIC STRAIN OF A STOCHASTICALLY NON-HOMOGENEOUS BODY (CONCRETE)

This paper contains a description of a theory of load curves for any loading or unloading process and simultaneous occurrence of elastic and plastic strain. The theory is based on a statistical model composed of perfect elastic-plastic elements, the yield limit Q being variable according to

a prescribed probability distribution. Equations are obtained for any loading or unloading branch the form of which depends on the distribution of Q and can be adapted for any experimental diagram. An equation is given for the relative energy loss in a cycle due to internal friction (and approximately proportional to the logarithmic decrement of vibration), it being shown that it depends on the amplitude of vibration. Particular equations are obtained by assuming gamma or multipoint distribution. In the latter case the form of the curve can easily be related with the plastic properties of the medium (e. g. mortar and cement paste).

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1964 r.