

METODA OBSZARÓW CZĘŚCIOWYCH DLA ZAGADNIENI
PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

ZYGMUNT THRUN (GDAŃSK)

1. Opis metody

Przybliżone rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego

$$(1.1) \quad \gamma c \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{r=x,y,z} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) = A(r, t)$$

w danym obszarze Ω przy warunkach brzegowych

$$\partial T / \partial r + hr (T - Tr) = 0$$

oraz warunku początkowym

$$(1.2) \quad T = f(x, y, z) \quad \text{dla} \quad t = 0$$

możemy przyjąć w postaci

$$(1.3) \quad T^* = \varphi_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(x, y, z).$$

Powyżej przyjęto następujące oznaczenia: $T(x, y, z, t)$ oznacza temperaturę w punkcie (\perp) x, y, z ciała w chwili t , γ ciężar właściwy ośrodka, c ciepło właściwe, K współczynnik przewodzenia ciepła oraz A ciepło wytwarzane przez jednostkę objętości ośrodka.

W przyjętym rozwiązaniu przybliżonym (1.3) funkcje $a_i(t)$ uważamy za niewiadome, zaś funkcje φ_i obieramy w ten sposób, ażeby spełniały, każda z osobna, jednorodne warunki brzegowe zagadnienia. Warunki niejednorodne natomiast będą spełnione przez odpowiednio dobraną funkcję φ_0 . Gdyby T^* było rozwiązaniem ścisłym zagadnienia, to jak wiadomo byłaby spełniona zależność ortogonalności

$$(1.4) \quad \iiint_{\Omega} \left[\gamma c \frac{\partial T^*}{\partial t} - \sum_{r=x,y,z} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) - A \right] \Phi_k dx dy dz = 0$$

dla dowolnie obranej funkcji Φ_k oraz w dowolnej części ośrodka, w którym rozpatrywane jest zagadnienie (1.1). Jeżeli natomiast T^* jest przybliżonym rozwiązaniem (1.3), to zależność nie będzie spełniona dla dowolnej funkcji Φ_k ; jednakże przybliżenie będzie tym lepsze, im większa będzie liczba ($k = 1, 2, \dots, n$) funkcji Φ_k , dla których całki (1.4) znikają. Jako funkcje Φ_k możemy przyjąć występujące w (1.3)

funkcje przybliżeń φ_k , przy czym obszarem całkowania w (1.4) jest cały obszar Ω zajęty przez ośrodek rozpatrywany w zagadnieniu.

Można też postąpić inaczej. Przyjmąc $\Phi_k = 1$, a obszar ogólny Ω podzielić na ($k = 1, 2, \dots, n$) podobszarów:

$$(1.5) \quad \Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_n.$$

Zamiast (1.4) otrzymamy stąd układ n równań

$$(1.6) \quad \int \int \int_{\Omega_k} \left[\gamma c \frac{\partial T^*}{\partial t} - \sum_{r=x,y,z} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) - A \right] dx dy dz = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

z którego możemy wyznaczyć n niewiadomych funkcji czasu $a_i(t)$. Układ równań (1.6) możemy też otrzymać na innej drodze. Zakładając mianowicie, że przyjęte w (1.3) funkcje przybliżeń φ_0 i φ_i spełniają dane warunki brzegowe zagadnienia, możemy T^* uważać za rozkład temperatur w danym ośrodku spowodowany rozkładem źródeł ciepła A^* innym niż A . Zamiast żądać spełnienia $A = A^*$ w wybranych, dyskretnych punktach obszaru Ω zagadnienia, lepiej zażądać, ażeby w częściach Ω_k obszaru było

$$\int \int \int_{\Omega_k} A^* dx dy dz = \int \int \int_{\Omega_k} A dx dy dz,$$

czyli

$$(1.7) \quad \int \int \int_{\Omega_k} \left[\gamma c \frac{\partial T^*}{\partial t} - \sum_{r=x,y,z} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) \right] dx dy dz = \int \int \int_{\Omega_k} A dx dy dz.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób znowu układ n równań (1.6). Wynika stąd oczywiście, że aproksymacja musi się polepszać wraz z ilością ($k = 1, 2, \dots, n$) podobszarów Ω_k , na które podzielono obszar całkowity Ω , czyli wraz ze wzrostem liczby funkcji przybliżeń φ_i . Jest to rozszerzenie na zagadnienia początkowo-brzegowe tzw. «metody odwrócenia problemu», podanej dla zagadnień czysto brzegowych przez BIEZENO i KOCHA [5]. Należy jeszcze umożliwić spełnienie warunku początkowego (1.2) przez przybliżone rozwiązanie zagadnienia. Z powyższych rozważań wynika, że sposób ten nadaje się także do rozwiązań przybliżonych zagadnień przewodnictwa ciepła w ośrodkach o nieciągłych własnościach termicznych materiału.

Korzystnie wtedy będzie przyjmować podobszary podziału zgodnie z liniami nieciągłości. Po wstawieniu obranego rozwiązania (1.3) do układu równań (1.6) otrzymamy:

$$(1.8) \quad \sum_{r=x,y,z} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{w całym obszarze } \Omega$$

oraz

$$(1.9) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{da_i}{dt} A_{ik} + a_i (B_{ik} + C_{ik} + D_{ik}) \right\} = Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

w każdym podobszarze Ω_k z osobna.

Funkcja φ_0 , jak założono uprzednio, ma spełniać niejednorodne warunki brzegowe zagadnienia, zaś φ_i spełniają warunki jednorodne wzdłuż brzegu obszaru Ω . Współczynniki występujące w układzie równań (1.9) są następujące:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \iiint_{\Omega_k} \gamma c \varphi_i dx dy dz, & B_{ik} &= - \iiint_{\Omega_k} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) dx dy dz, \\ C_{ik} &= - \iiint_{\Omega_k} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) dx dy dz, \\ D_{ik} &= - \iiint_{\Omega_k} \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) dx dy dz, & Z_k &= \iiint_{\Omega_k} A dx dy dz. \end{aligned}$$

Jeżeli współczynniki powyższe dla n -tego przybliżenia, czyli przy podziale obszaru Ω na części ($k = 1, 2, \dots, n$), oznaczymy przez $R_{ik}^{(n)}$, zaś dla $(n - 1)$ -go przybliżenia, przez $R^{(n-1)}$, to możemy ułożyć następujące zależności:

$$\sum_{k=1}^n R_{(n-i)k}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-i} R_{(n-i)k}^{(n-i)}$$

gdzie $R = A, B, C, D$ ($i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$; $k = 1, 2, \dots, n$) oraz

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_{nk}^{(n)} &= \iiint_{\Omega} \gamma c \varphi_n dx dy dz, \\ \sum_{k=1}^n R_{nk}^{(n)} &= - \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

gdzie $R = B, C, D$, $r = x, y, z$. Powyższe zależności mogą być pożyteczne do kontroli obliczeń współczynników dla większej ilości przybliżeń (por. przykład 2).

Potrzebne do rozwiązania układu n równań różniczkowych (1.9) warunki początkowe możemy ustalić w formie zależności

$$(1.12) \quad \frac{\partial}{\partial a_k(0)} \iiint_{\Omega} [f(x, y, z) - T^*(x, y, z, 0)]^2 dx dy dz = 0.$$

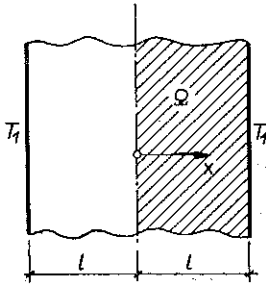
W ten sposób otrzymujemy układ n równań

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(0) \iiint_{\Omega} \varphi_i \varphi_k dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \varphi_k dx dy dz - \iiint_{\Omega} \varphi_0 \varphi_k dx dy dz, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

2. Przykład pierwszy

Drogą kolejnych przybliżeń wyznaczmy niestacjonarny rozkład temperatur dla zagadnienia jednowymiarowego i obszaru przedstawionego na rys. 1. Dane są warunki brzegowe i warunek początkowy w postaci:

$$\text{jeśli } x = \pm l, \text{ to } T = T_1, \quad \text{jeśli } t = 0, \text{ to } T = f(x) = f(-x).$$



Rys. 1

Dla ośrodka o jednorodnych własnościach termicznych otrzymamy z (1.8): $\varphi_0 = T_1$.

Ze względu na symetrię możemy rozpatrywać przy kolejnych przybliżeniach tylko pół obszaru $0 \leq x \leq l$.

a) *Przybliżenie pierwsze.* Dla pierwszego przybliżenia przyjmijmy podział tylko na jeden podobszar $\Delta x = l$, $\Omega_1 = \Omega$. Zakładamy, że funkcje pierwszego przybliżenia mają postać

$$T^{(1)} = T_1 + a_1(t)(l^2 - x^2).$$

Wyznaczmy współczynniki (1.10):

$$A_{11} = \gamma c \int_0^l (l^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} l^3 \gamma c, \quad B_{11} = 2lK.$$

Z (1.9) otrzymujemy w tym przypadku jedno równanie różniczkowe

$$da_1/dt + 3\kappa/l^2 a_1 = 0,$$

którego rozwiązanie ma postać

$$a_1(t) = a_1(0) \exp(-3\kappa t/l^2),$$

gdzie $\kappa = K/\gamma c$.

Stałą $a_1(0)$ wyznaczmy z warunku (1.13):

$$a_1(0) = \frac{-5}{4} \frac{T_1}{l^2} + \frac{15}{8l^5} \int_0^l f(x)(l^2 - x^2) dx.$$

Pierwszym przybliżeniem wobec tego będzie

$$(2.1) \quad T^{(1)} = T_1 + (l^2 - x^2) \left[\frac{-5}{4} \frac{T_1}{l^2} + \frac{15}{8l^5} \int_0^l f(x)(l^2 - x^2) dx \right] \exp(-3\kappa t/l^2).$$

b) *Przybliżenie drugie.* Przyjmujemy podział na dwa podobszary przedstawione na rys. 2: $\Delta x = l/2$.

Przy oznaczeniu $\xi = x/l$, przyjmujemy na drugie przybliżenie funkcję

$$(2.2) \quad T^{(2)} = T_1 + a_1(t) l^2 (1 - \xi^2) + a_2(t) l^4 (\xi^2 - \xi^4).$$

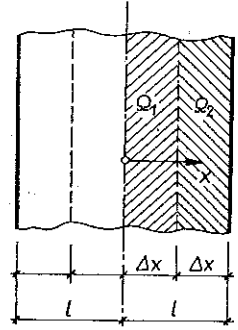
Wyznaczamy współczynniki (1.10). Na podstawie całkowania po pierwszym podobzdarze Ω_1 otrzymamy

$$A_{11} = \frac{11}{24} \gamma c l^3, \quad A_{21} = \frac{17}{480} \gamma c l^5, \quad B_{11} = Kl, \quad B_{21} = \frac{-Kl^3}{2}.$$

Na podstawie całkowania po drugim podobzdarze znajdziemy

$$A_{12} = \frac{5}{24} \gamma c l^3, \quad A_{22} = \frac{47}{480} \gamma c l^5,$$

$$B_{12} = Kl, \quad B_{22} = \frac{5}{2} Kl^3.$$



Rys. 2

Układ równań różniczkowych (1.9) po dokonaniu na nim transformacji Laplace'a

$$\bar{a}_i(p) = \int_0^{\infty} a_i(t) e^{-pt} dt$$

przyjmie postać

$$\bar{a}_1(11p + 24\kappa/l^2) + \bar{a}_2(0,85l^2p - 12\kappa) = 11a_1(0) + 0,85l^2a_2(0),$$

$$\bar{a}_1(p + 4,8\kappa/l^2) + \bar{a}_2(0,47l^2p + 12\kappa) = a_1(0) + 0,47l^2a_2(0).$$

Po rozwiązaniu powyższego układu względem \bar{a}_i i retransformacji otrzymamy

$$a_1(t) = a_1(0) \operatorname{ch}(\sqrt{226,25} \kappa t/l^2) \exp(-17,5\kappa t/l^2) +$$

$$+ (1,0526a_1(0) + 0,24377l^2a_2(0)) \operatorname{sh}(\sqrt{226,25} \kappa t/l^2) \exp(-17,5\kappa t/l^2),$$

(2.3)

$$a_2(t) = a_2(0) \operatorname{ch}(\sqrt{226,25} \kappa t/l^2) \exp(-17,5\kappa t/l^2) -$$

$$(-1,0526a_2(0) + 0,44322a_1(0)/l^2) \operatorname{sh}(\sqrt{226,25} \kappa t/l^2) \exp(-17,5\kappa t/l^2).$$

Stałe $a_1(0)$ i $a_2(0)$ wyznaczmy z układu dwóch równań (1.13):

$$(2.4) \quad a_1(0) = \frac{-7}{8} \frac{T_1}{l^2} + \frac{105}{32l^2} \int_0^1 f(\xi) (1 - 4\xi^2 + 3\xi^4) d\xi,$$

$$a_2(0) = \frac{-21}{8} \frac{T_1}{l^4} - \frac{105}{32l^4} \int_0^1 f(\xi) (3 - 24\xi^2 + 21\xi^4) d\xi.$$

W ten sposób otrzymujemy drugie przybliżenie z (2.2), (2.3) i (2.4) dla temperatury początkowej $f(x)$. Dla porównania wyników kolejnych dwóch przybliżeń z wyni-

kiem ścisłym przyjmijmy następujące dane liczbowe: «czas bezwymiarowy» $\kappa t/l^2 = 0,4$ oraz $f(x) = 0$. Pierwsze przybliżenie (2.1) przyjmie przy tym założeniu postać

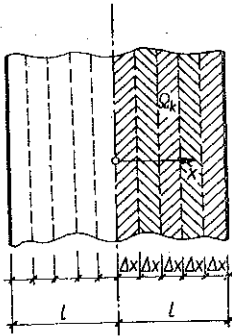
$$(2.5) \quad T^{(1)}/T_1 = 1 - \frac{5}{4} e^{-1,2} (1 - \xi^2) = 1 - 0,3765 (1 - \xi^2).$$

Drugim przybliżeniem zaś będzie

$$(2.6) \quad T^{(2)}/T_1 = 1 - 0,4642 (1 - \xi^2) + 0,09837 (\xi^2 - \xi^4).$$

c) *Rozwiązanie ścisłe.* Przyjmijmy teraz podział obszaru na $2n$ części o szerokościach $\Delta x = l/n$ (rys. 3). N -te przybliżenie przyjmijmy w postaci

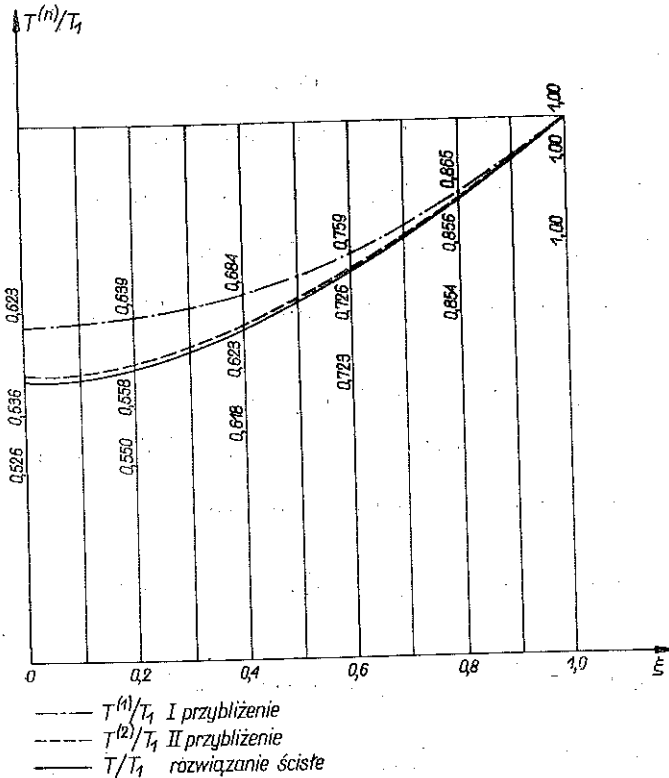
$$T^{(n)} = T_1 + \sum_{i=1}^n a_i(t) \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2l}.$$



Rys. 3

Wyznaczymy współczynniki (1.10):

$$A_{ik} = \gamma c \int_{(k-1)l/n}^{kl/n} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2l} dx, \quad B_{ik} = -K \frac{\pi^2}{4l^2} (2i-1)^2 A_{ik}.$$



Rys. 4

Układ równań (1.9) w tym przypadku sprowadza się do n niezależnych równań:

$$\frac{da_i}{dt} + \kappa \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 (2i-1)^2 a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

których rozwiązaniami są funkcje

$$a_i(t) = a_i(0) \exp \left[- \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 (2i-1)^2 \kappa t \right].$$

Z równań (1.13) wyznaczamy stałe $a_i(0)$, które ze względu na ortogonalność funkcji φ_i w obszarze $-l \leq x \leq l$ przyjmują wartości

$$a_i(0) = -(-1)^i T_1 \frac{4}{\pi(2i-1)}.$$

Stąd n -te przybliżenie ma postać

$$(2.7) \quad T^{(n)} = T_1 - \frac{4}{\pi} T_1 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{(2i-1)} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \exp \left[- \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 (2i-1)^2 \kappa t \right].$$

Jeżeli wraz z ilością obszarów będziemy zdążali do nieskończoności ($n \rightarrow \infty$), to otrzymujemy z (2.7) wynik ścisły ([1], s. 83, wzór 2). Na rysunku 4 przedstawiono dla $\kappa t/l^2 = 0,4$ porównanie obydwóch przybliżeń (2.5) i (2.6) z wykresem ścisłym (2.7).

3. Przykład drugi

Dany jest prostokątny obszar przedstawiony na rys. 5, przy czym niech $c > d$. Załóżmy niejednorodność własności termicznych materiału ośrodka:

$$K(x, y) = K_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2c^2} \right), \quad \gamma c = \text{const.}$$

Niech poza tym w środkowej części obszaru będzie wytwarzane ciepło o intensywności

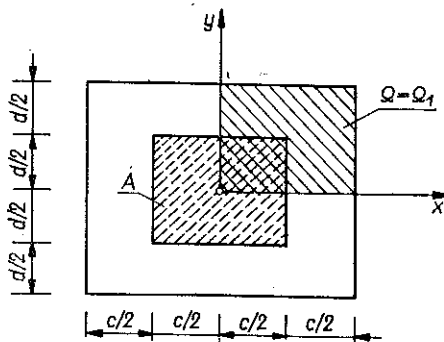
$$A(x, y) = A_0 \left(\frac{c^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right).$$

Jeżeli założymy symetrię względem osi x i y , temperatury początkowej $T_{(0)} = f(x, y)$ oraz symetryczne warunki brzegowe, to możemy rozpatrywać tylko jedną czwartą części obszaru.

Niech wzdłuż krawędzi $c = \pm c$, $y = \pm d$ dane będą jednorodne warunki brzegowe $T = 0$.

a) *Pierwsze przybliżenie.* Przy podziale na jeden podobszar $\Omega_1 = \Omega$ przyjmujemy pierwsze przybliżenie

$$(3.1) \quad T^{(1)} = a_1(t) (c^2 - x^2) (d^2 - y^2).$$



Rys. 5

Współczynniki (1.10) wynoszą

$$A_{11} = \frac{4}{9} \gamma c c^3 d^3, \quad B_{11} = \frac{2}{3} K_0 c^4 \left(\frac{d^3}{c^3} - \frac{d^5}{5c^5} \right),$$

$$C_{11} = \frac{2}{3} K_0 c^4 \left(\frac{9d}{5c} - \frac{d^3}{c^3} \right), \quad Z_1 = -\frac{c^3 d^3}{144} A_0.$$

Biorąc pod uwagę wartość tych współczynników znajdziemy następujące rozwiązanie równania (1.9)

$$(3.2) \quad a_1(t) = a_1(0) e^{-\alpha x_0 t} + \frac{\beta_0}{64 \alpha x_0} (1 - e^{-\alpha x_0 t}),$$

przy czym

$$(3.3) \quad \alpha = 0,3 \frac{c}{d^3} \left(9 \frac{d}{c} - \frac{d^5}{c^5} \right), \quad x_0 = \frac{K_0}{\gamma c}, \quad \beta_0 = \frac{A_0}{\gamma c}.$$

Z zależności (1.13) znajdziemy

$$(3.4) \quad a_1(0) = \frac{225}{64 c^5 d^5} \int_0^c \int_0^d f(x, y) (c^2 - x^2) (d^2 - y^2) dx dy.$$

W ten sposób otrzymaliśmy pierwsze przybliżenie: wzory (3.1), (3.2) i (3.3).

b) *Drugie przybliżenie.* Dzielimy rozpatrywaną ćwiartkę obszaru na dwa podobszary (rys. 6). Dla przeprowadzenia dalszych obliczeń liczbowych dla drugiego i trzeciego przybliżenia założmy $c = d = 1$ oraz $f(x, y) = 0$. Drugie przybliżenie przyjmujemy w postaci

$$(3.5) \quad T^{(2)} = a_1(t) (1 - x^2) (1 - y^2) + a_2(t) (x^2 + y^2) (1 - x^2) (1 - y^2).$$

Współczynniki (1.10) dla obszaru Ω_1 przyjmują następujące wartości:

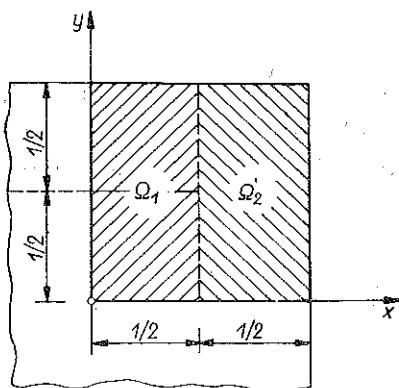
$$A_{11} = \frac{11}{36} \gamma c, \quad A_{21} = \frac{61}{720} \gamma c, \quad B_{11} = \frac{31}{60} K_0, \quad C_{11} = \frac{203}{480} K_0,$$

$$B_{21} = \frac{-143}{840} K_0, \quad C_{21} = \frac{5091}{13440} K_0, \quad Z_1 = -\frac{1}{144} A_0.$$

Dla podobszaru Ω_2 otrzymamy współczynniki:

$$A_{12} = \frac{5}{36} \gamma c, \quad A_{22} = \frac{67}{720} \gamma c, \quad B_{12} = \frac{1}{60} K_0, \quad C_{12} = \frac{53}{480} K_0,$$

$$B_{22} = \frac{131}{168} K_0, \quad C_{22} = \frac{2101}{13440} K_0,$$



Rys. 6

a z rozwiązania układu równań (1.9)

$$(3.6) \quad 10^3 \frac{\kappa_0}{\beta_0} a_1(t) = 770,605 - 658,104 \exp(-3,10555 \kappa_0 t) - 112,5 \exp(-16,3 \kappa_0 t),$$

$$10^3 \frac{\kappa_0}{\beta_0} a_2(t) = -104,618 - 309,417 \exp(-3,10555 \kappa_0 t) + 414,035 \exp(-16,3 \kappa_0 t).$$

c) *Przybliżenie trzecie.* Dzielimy dany obszar na 3 części (rys. 7). Poszukiwać będziemy trzeciego przybliżenia w postaci

$$(3.7) \quad T^{(3)} = a_1(t) (1 - x^2) (1 - y^2) + a_2(t) (x^2 + y^2) (1 - x^2) (1 - y^2) + a_2(t) (x^2 - x^4) (y^2 - y^4).$$

Wyznaczamy współczynniki (1.10) odpowiednich obszarów; są one następujące:

dla podobszaru Ω_1

$$A_{11} = \frac{121}{576} \gamma c, \quad A_{21} = \frac{187}{5760} \gamma c,$$

$$A_{31} = \frac{289}{230400} \gamma c, \quad B_{11} = \frac{23}{60} K_0 = C_{11},$$

$$B_{21} = C_{21} = -\frac{1097}{6720} K_0, \quad B_{31} = C_{31} = -\frac{191}{13440} K_0, \quad Z_1 = -\frac{A_0}{144};$$

dla podobszaru Ω_2

$$A_{12} = \frac{55}{576} \gamma c, \quad A_{22} = \frac{301}{5760} \gamma c, \quad A_{32} = \frac{799}{230400} \gamma c, \quad B_{12} = \frac{2}{15} K_0, \quad C_{12} = \frac{19}{480} K_0,$$

$$B_{22} = \frac{-47}{6720} K_0, \quad C_{22} = \frac{1657}{2688} K_0, \quad B_{32} = \frac{-401}{13440} K_0, \quad C_{32} = \frac{299}{6720} K_0;$$

dla podobszaru Ω_3

$$A_{13} = \frac{5}{36} \gamma c, \quad A_{23} = \frac{67}{720} \gamma c, \quad A_{33} = \frac{47}{3600} \gamma c, \quad B_{13} = \frac{K_0}{60}, \quad C_{13} = \frac{53}{480} K_0,$$

$$B_{23} = \frac{131}{168} K_0, \quad C_{23} = \frac{2101}{6720} K_0, \quad B_{33} = \frac{101}{840} K_0, \quad C_{33} = \frac{617}{13440} K_0.$$

Wykonajmy tu kontrolę (1.11) obliczeń współczynników. Dla trzeciego przybliżenia mamy: $n = 3, k = 1, 2, 3$. Wobec tego otrzymamy:

dla $i = 2$

$$A_{11}^{(3)} + A_{12}^{(3)} + A_{13}^{(3)} = A_{11}^{(1)},$$

$$B_{11}^{(3)} + B_{12}^{(3)} + B_{13}^{(3)} = B_{11}^{(1)},$$

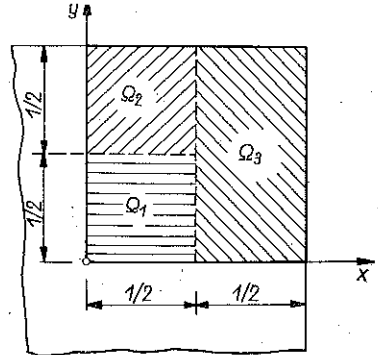
$$C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} + C_{13}^{(3)} = C_{11}^{(1)},$$

dla $i = 1$

$$A_{21}^{(3)} + A_{22}^{(3)} + A_{23}^{(3)} = A_{21}^{(2)} + A_{22}^{(2)},$$

$$B_{21}^{(3)} + B_{22}^{(3)} + B_{23}^{(3)} = B_{21}^{(2)} + B_{22}^{(2)},$$

$$C_{21}^{(3)} + C_{22}^{(3)} + C_{23}^{(3)} = C_{21}^{(2)} + C_{22}^{(2)}.$$



Rys. 7

Mamy także

$$\begin{aligned}
 A_{31}^{(3)} + A_{32}^{(3)} + A_{33}^{(3)} &= \iint_{\Omega} \gamma c \varphi_3 dx dy, \\
 (3.7') \quad B_{31}^{(3)} + B_{32}^{(3)} + B_{33}^{(3)} &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) dx dy, \\
 C_{31}^{(3)} + C_{32}^{(3)} + C_{33}^{(3)} &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że powyższa kontrola dała wyniki pozytywne dla wyżej obliczonych współczynników. Układ równań różniczkowych (1.9) po transformacji Laplace'a przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_1(338,8p + 1236,48\kappa_0) + \bar{a}_2(52,36p - 526,56\kappa_0) + \bar{a}_3(2,023p - 45,84\kappa_0) &= 11,2\beta_0/p, \\
 \bar{a}_1(154p + 278,88\kappa_0) + \bar{a}_2(84,28p + 982,92\kappa_0) + \bar{a}_3(5,593p + 23,64\kappa_0) &= 0, \\
 \bar{a}_1(28p + 25,62\kappa_0) + \bar{a}_2(18,76p + 188,715\kappa_0) + \bar{a}_3(2,632p + 33,495\kappa_0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu i dokonaniu retransformacji otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad 10^5 \frac{\kappa_0}{\beta_0} a_1(t) &= + 827,24 - 707,45 \exp(-3,0031 \kappa_0 t) - \\
 &\quad - 65,56 \exp(-16,384 \kappa_0 t) - 54,24 \exp(-28,321 \kappa_0 t), \\
 10^5 \frac{\kappa_0}{\beta_0} a_2(t) &= -253,9 - 171,11 \exp(-3,0031 \kappa_0 t) + \\
 &\quad + 121,4 \exp(-16,384 \kappa_0 t) + 303,6 \exp(-28,321 \kappa_0 t), \\
 10^5 \frac{\kappa_0}{\beta_0} a_3(t) &= 797,74 - 731,1 \exp(-3,0031 \kappa_0 t) + \\
 &\quad + 1453,6 \exp(-16,384 \kappa_0 t) - 1520,1 \exp(-28,321 \kappa_0 t).
 \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że dla $t = 0$ otrzymamy z powyższych wzorów

$$a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = 0.$$

Wyznamy dla kolejnych trzech przybliżeń wykresy T^* w przekroju $y = 0$, dla następujących danych liczbowych: $\beta_0/\kappa_0 = 10^3$, $c = d = 1$ oraz $f(x, y) = 0$. Dla czasu bezwymiarowego $\kappa_0 t/d^2 = 0,1$ otrzymamy następujące kolejne przybliżenia ze wzorów (3.1), (3.2), (3.5), (3.6), (3.7) i (3.8):

$$\begin{aligned}
 T^{(1)} &= 1,389(1 - x^2), \\
 T^{(2)} &= (2,661 - 2,503 x^2)(1 - x^2), \\
 T^{(3)} &= (2,874 - 3,391 x^2)(1 - x^2).
 \end{aligned}$$

Podobnie dla $\kappa_0 t/d^2 = 0,4$ mamy

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= 4,018 (1 - x^2), \\ T^{(2)} &= (5,804 - 1,934 x^2) (1 - x^2), \\ T^{(3)} &= (6,143 - 3,052 x^2) (1 - x^2), \end{aligned}$$

a dla $\kappa_0 t/d^2 = 1,0$

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= 5,920 (1 - x^2), \\ T^{(2)} &= (7,411 - 1,185 x^2) (1 - x^2), \\ T^{(3)} &= (7,921 - 2,624 x^2) (1 - x^2). \end{aligned}$$

Wykresy kolejnych przybliżeń przedstawiono na rys. 8, 9 i 10.

W powyższym przykładzie dla zilustrowania procesu iteracyjnego przyjęto, że intensywność źródła ciepła A jest funkcją niezależną od czasu. Rozwiązanie dla dowolnego zmiennego źródła nie przedstawia trudności. W wielu zagadnieniach praktycznych A jest skomplikowaną funkcją nie tylko czasu, ale i samej temperatury (np. dla chemicznych reakcji ośrodka). Rozwiązanie ścisłe zagadnienia staje się często niemożliwe ze względu na trudności natury matematycznej. Omówiony powyżej sposób przybliżony może się tu okazać bardzo korzystny.

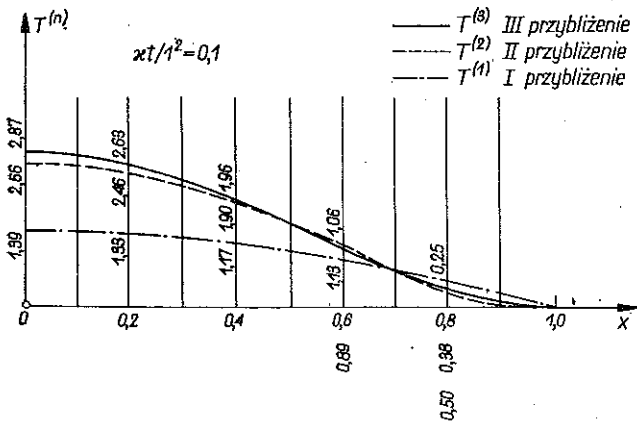
4. Inne zagadnienia

Wróćmy jeszcze do rozważań początkowych. Załóżmy, że omawiany ośrodek Ω przewodzący ciepło jest ograniczony z dwóch stron płaszczyznami prostopadłymi do osi x układu współrzędnych; poza tym niech będzie ograniczony dowolnie. Rozwiązanie przybliżone równania (1.1) można poszukiwać również w postaci

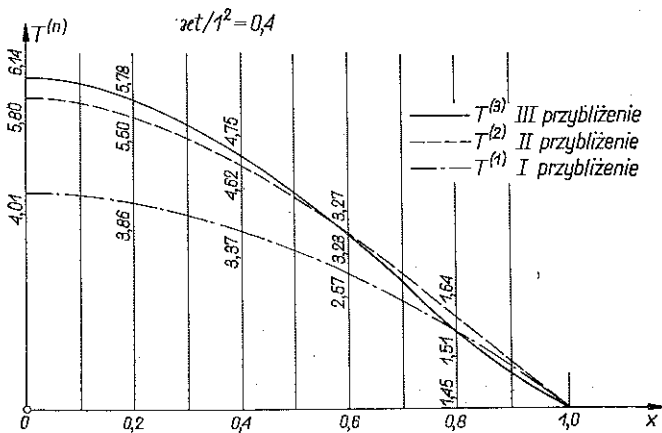
$$(4.1) \quad T^* = \varphi_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \varphi_i(x, y, z).$$

Tutaj funkcja φ_0 znowu jak uprzednio ma spełniać wszystkie niejednorodne warunki brzegowe na powierzchniach granicznych Ω , zaś funkcje przybliżeń φ_i mają spełniać wszystkie jednorodne warunki brzegowe z jednym wyjątkiem: na granicznych płaszczyznach prostopadłych do osi x układu funkcje mogą przyjmować wartości dowolne. Spełnienie przez funkcje $a_i \varphi_i$ warunków jednorodnych na tych płaszczyznach uzyskamy narzucając odpowiednie warunki brzegowe poszukiwanym funkcjom $a_i(x, t)$. Poza tym funkcje a_i muszą dodatkowo zapewnić rozwiązaniu przybliżonemu (4.1) spełnienie warunku początkowego. Ogólny obszar Ω możemy znowu jak w (1.5) podzielić na n podobszarów Ω_k . Zażądamy teraz, aby warunek (1.7) był spełniony nie dla całego podobszaru Ω_k , lecz tylko dla punktów leżących na płaszczyźnie prostopadłej do osi x . Znaczy to, że zamiast całkowania po całej objętości podobszaru Ω_k ograniczamy się do całkowania względem zmiennych y i z , czyli zależności (1.7) przyjmą tu postać:

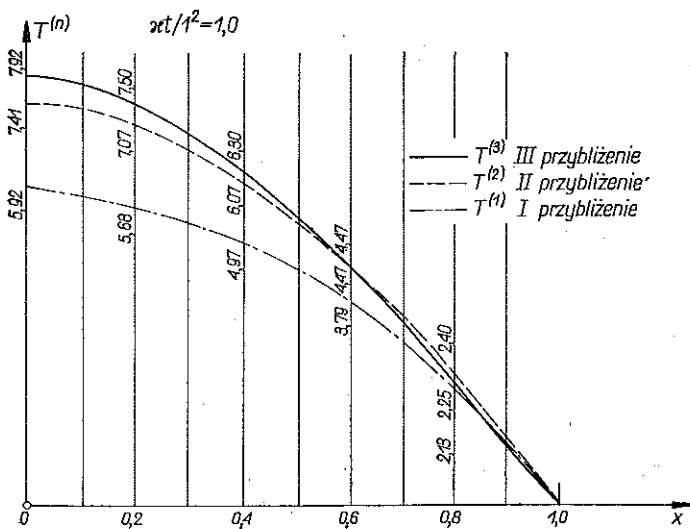
$$(4.2) \quad \iint_{(\Omega_k)} \left[\gamma c \frac{\partial T^*}{\partial t} - \sum_{r=x, y, z} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) - A \right] dx dy = 0.$$



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Wstawiając do powyższego drugą część funkcji (4.1), otrzymamy analogiczny do (1.10) układ n równań cząstkowych:

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial t} A_{ik} + a_i (B_{ik} + C_{ik} + D_{ik}) + \frac{\partial a_i}{\partial x} E_{ik} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} F_{ik} \right\} = Z_k, \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Współczynniki tego układu mają następującą postać:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \iint_{(\Omega_k)} \gamma c \varphi_i dy dz, & B_{ik} &= - \iint_{(\Omega_k)} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) dy dz, \\ C_{ik} &= - \iint_{(\Omega_k)} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) dy dz, & D_{ik} &= - \iint_{(\Omega_k)} \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) dy dz, \\ E_{ik} &= \iint_{(\Omega_k)} \left[- \frac{\partial}{\partial x} (K \varphi_i) - K \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right] dy dz, & F_{ik} &= - \iint_{(\Omega_k)} K \varphi_i dy dz, \\ Z_k &= \iint_{(\Omega_k)} A dy dz. \end{aligned}$$

Drogą podstawienia funkcji

$$a_i(x, t) = b_i(x, t) \exp [-(B_{ik} + C_{ik} + D_{ik})t/A_{ik}]$$

można jeszcze uprościć układ równań (4.3) do postaci

$$(4.5) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial b_i}{\partial t} A_{ik} + \frac{\partial b_i}{\partial x} E_{ik} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x^2} F_{ik} \right\} = Z_k \exp [(B_{ik} + C_{ik} + D_{ik})t/A_{ik}], \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Do powyższego układu równań różniczkowych odnoszą się warunki brzegowe dla funkcji $b_i(x, t)$ w punktach położonych na granicznych płaszczyznach, prostopadłych do osi x układu współrzędnych oraz dane warunki początkowe. Rozwiązanie określonego zagadnienia przewodnictwa cieplnego za pomocą układu równań (4.5) jest może bardziej skomplikowane niż za pomocą układu równań (1.9), lecz posiada w stosunku do niego zaletę polegającą na możliwości dobierania funkcji przybliżeń φ_i ; dzięki temu metoda ta nadaje się do przybliżonego rozwiązywania zagadnień, związanych z obszarem o kształcie bardziej skomplikowanym.

Literatura cytowana w tekście

1. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford 1948.
2. Л. Б. Канторович, Б. Я. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Москва 1962.

3. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960.
4. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, New York-Toronto-London 1951.
5. C. B. BIEZENO, I. I. KOCH, *Over een nieuwe methode ter bereking van vlakke platen*, Ingenieur, Haag 38 (1923).

Резюме

МЕТОД ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Обсуждается некоторый способ приближенного решения нестационарных задач по теплопроводности. Рассматриваемая в задаче область делится на некоторое количество подобластей предполагая затем приближенное решение в виде суммы такого количества произведений функций приближений, на сколько подобластей разделено среду. Этот способ можно применить для решения задач при произвольной начальной температуре и с различными краевыми условиями, а также для сред, обладающих неоднородными термическими условиями.

Summary

AN APPROXIMATE SOLUTION METHOD OF HEAT CONDUCTION PROBLEMS

The method described concerns non-stationary problems. The region under consideration is divided into a number of sub-regions. Solution is sought-for in the form of a sum of products of appropriate approximating functions, the number of products being equal to that of sub-regions. The method is applicable to problems with any initial temperature and any boundary conditions for bodies of arbitrary nonhomogeneous thermal properties.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 marca 1964 r.
