

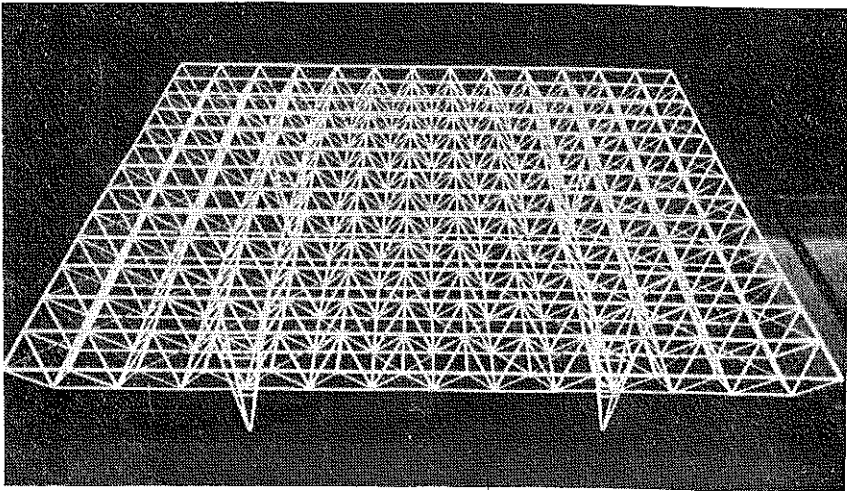
PLYTY KRATOWE Z ELEMENTÓW POWTARZALNYCH

WITOLD GUTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W ostatnich latach zarysowała się w budownictwie wyraźna tendencja stosowania prefabrykatów możliwie powtarzalnych, dających się łatwo zarówno transportować jak i montować. Są to wymagania bezwzględnie konieczne przy szybkiej i taniej budowie.

Jednym z takich układów jest konstrukcja prętowa zaproponowana przez C. A. ATWOODA i opisana wraz z licznymi danymi doświadczalnymi w pracy [4] (rys. 1 i 2).

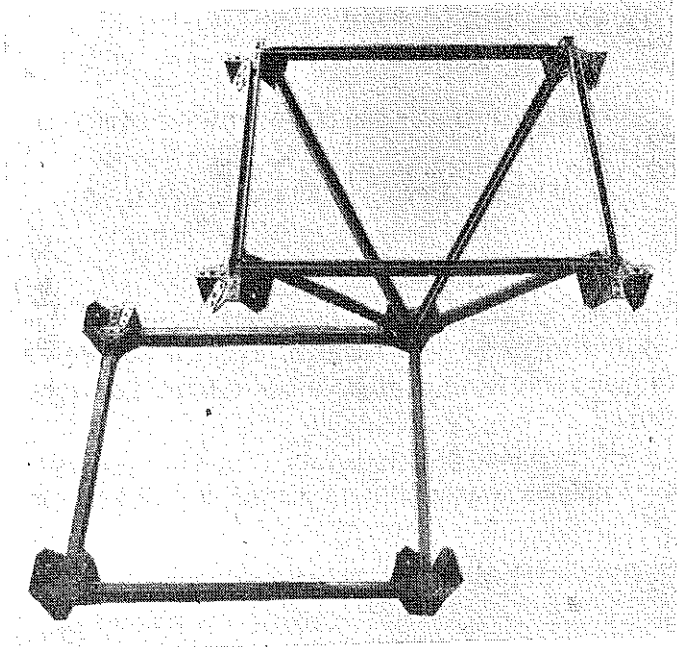


Rys. 1

Konstrukcja ta składa się z jednakowych prętów, jednakowych blaszek węzłowych i jednakowych śrub. Wszystkie te elementy mogą być wytworzone w zautomatyzowanej produkcji. Ponadto są one bardzo wygodne w transporcie i w montażu ze względu na niezwykle proste i powtarzalne kształty.

Pomimo wielu wymienionych zalet wykorzystanie takich konstrukcji jest ograniczone w praktyce z powodu braku ścisłych i dogodnych metod obliczeń statycznych. W pracy [4] podane są jedynie wyniki doświadczeń dla kilku wybranych

modeli konstrukcji. Intencją autora niniejszej pracy jest podanie w pewnym zakresie ścisłej i względnie łatwej metody obliczeniowej takich układów.



Rys. 2

W celu uwzględnienia dużej liczby stopni swobody omawianej płyty kratowej przyjęto sposób postępowania podobny do stosowanego w klasycznej teorii płyt. Niemniej jednak zachowano rzeczywisty charakter konstrukcji nie wprowadzając żadnych założeń upraszczających. Z tych samych względów jak i ze względu na skończone i jednakowe odległości między węzłami zastosowano wyłącznie rachunek różnicowy.

2. Oznaczenia i założenia

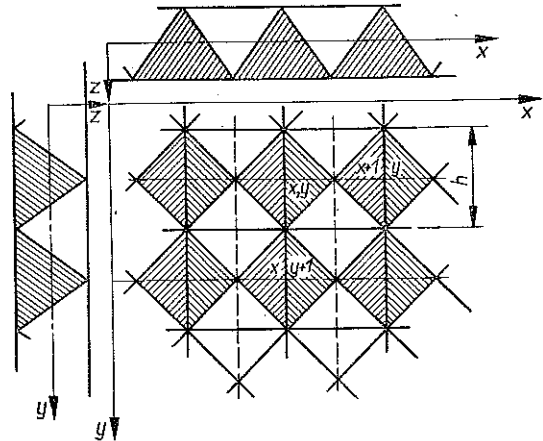
Jedną z podstawowych trudności w rozpatrywanym zadaniu napotykamy przy takim dobraniu zespołowego elementu powtarzalnego, aby zawierał on w sobie wszystkie jednostkowe elementy powtarzalne (pręty i węzły). Nie trudno się przekonać, że takim zespołowym elementem nie może być bez dodatkowych założeń żaden węzeł z przylegającymi doń prętami, leżący w górnej lub dolnej płaszczyźnie omawianej kratownicy.

Biorąc pod uwagę powyższe najkorzystniej jest potraktować omawianą płytę jako układ regularnych, sztywnych czworościanów prętowych (rys. 3) połączonych wierzchołkami i powiązanych dodatkowo poziomymi prętami, leżącymi w górnej i dolnej płaszczyźnie kratownicy (rys. 3). Odnośnie samych prętów zakładamy, że przenoszą one jedynie siły osiowe. Ewentualna mimoosiowość przyłożenia siły

może być uwzględniona przy badaniu wytrzymałości lokalnej. Są to ogólnie przyjęte uproszczenia w teorii kratownic, w których wymiary poprzeczne prętów są małe w stosunku do ich długości.

Wprowadźmy prawoskrętny układ współrzędnych x, y, z w taki sposób, aby płaszczyzna $z = 0$ przechodziła przez środki geometryczne omawianych czworokątów, a więc w połowie wysokości płyty. Oś z skierowana jest w dół. Środek dowolnego czworokąta ma więc współrzędne $(x, y, 0)$, a jego wierzchołki:

$$\begin{aligned} & \left(x, y - \frac{1}{2}, -h \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \\ & \left(x, y + \frac{1}{2}, -h \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \\ & \left(x - \frac{1}{2}, y, +h \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \\ & \left(x + \frac{1}{2}, y, +h \frac{\sqrt{2}}{4}\right). \end{aligned}$$



Rys. 3

Oznaczmy podobnie jak w klasycznej teorii płyt przemieszczenia zgodnie z dodatnimi kierunkami osi x, y, z , przez u, v, w .

Jak już wspomniano, wszystkie równania, a więc równania równowagi, przemieszczeń oraz warunki brzegowe zapisujemy w symbolach różnicowych, przy czym wprowadziliśmy następujące oznaczenia wzięte z pracy [2]:

$$\begin{aligned} \Delta_x w_{x,y} &= w_{x+\frac{1}{2},y} - w_{x-\frac{1}{2},y}, \\ \Delta_x (\Delta_x w_{x,y}) &= \Delta_x^2 w_{x,y} = w_{x+1,y} - 2w_{x,y} + w_{x-1,y}, \\ \nabla_x w_{x,y} &= w_{x+\frac{1}{2},y} + w_{x-\frac{1}{2},y}, \\ \nabla_x (\nabla_x w_{x,y}) &= \nabla_x^2 w_{x,y} = w_{x+1,y} + 2w_{x,y} + w_{x-1,y}. \end{aligned}$$

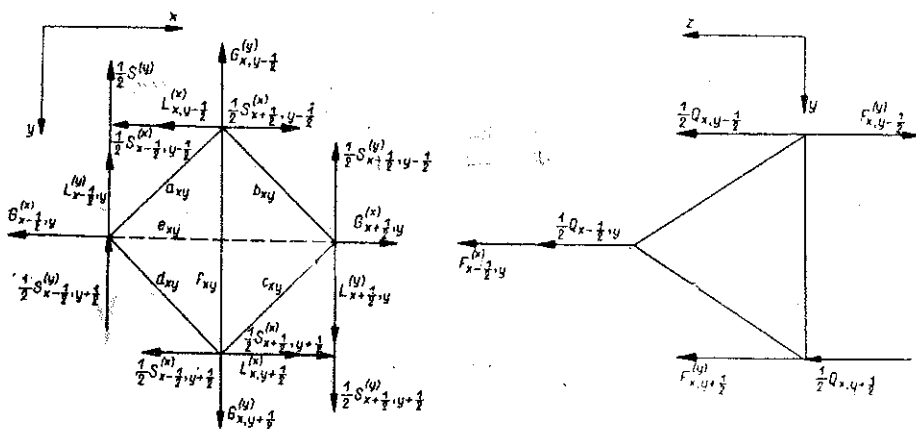
Pozostałe oznaczenia są następujące: h oznacza długość pręta, E moduł Younga oraz A pole powierzchni przekroju poprzecznego.

3. Równania równowagi i przemieszczeń

Wydzielmy z całości konstrukcji jeden czworokąt x, y i przyłożmy w jego wierzchołkach działające nań siły zewnętrzne Q_{xy} jak i wewnętrzne $F_{xy}^{(y)}, F_{xy}^{(x)}, S_{xy}^{(y)}, S_{xy}^{(x)}, L_{xy}^{(x)}, L_{xy}^{(y)}, G_{xy}^{(x)}$ i $G_{xy}^{(y)}$ według następującego schematu (rys. 4). Siły F, L i G są siłami, z jakimi oddziałują na siebie dwa sąsiednie czworokąty (przegub kulisty). Siła S jako przedstawiająca oddziaływanie poziomego pręta na węzeł może być rozłożona na dwa sąsiednie czworokąty w dowolnym stosunku. Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy, że w każdym połączeniu działa połowa odpowiedniej siły S

na jeden czworościan, a połowa na sąsiedni. W rezultacie otrzymamy układ sił działających na badany czworościan podany w rzutach na rys. 4. Sześć jego równań równowagi ma postać następującą:

$$\begin{aligned}
 \Delta_y L_{xy}^{(x)} + \Delta_x G_{xy}^{(x)} + \frac{1}{2} \nabla_y \Delta_x S_{xy}^{(x)} &= 0, \\
 \Delta_y G_{xy}^{(y)} + \Delta_x L_{xy}^{(y)} + \frac{1}{2} \nabla_x \Delta_y S_{xy}^{(y)} &= 0, \\
 \Delta_x F_{xy}^{(x)} + \Delta_y F_{xy}^{(y)} + \frac{1}{2} (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy} &= 0, \\
 \nabla_y F_{xy}^{(y)} + \sqrt{2} \Delta_y G_{xy}^{(y)} + \frac{1}{2} \Delta_y Q_{xy} &= 0, \\
 -\nabla_x F_{xy}^{(x)} + \sqrt{2} \Delta_x G_{xy}^{(x)} - \frac{1}{2} \Delta_x Q_{xy} &= 0, \\
 -\nabla_y L_{xy}^{(y)} + \nabla_x L_{xy}^{(y)} - \frac{1}{2} \Delta_y \Delta_x S_{xy}^{(x)} + \frac{1}{2} \Delta_x \Delta_y S_{xy}^{(y)} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$



Rys. 4

Związki między siłami a przemieszczeniami można łatwo wyznaczyć z zależności dla sił w prętach czworościanu. Oznaczmy więc siły w jego sześciu prętach kolejno przez a_{xy} , b_{xy} , c_{xy} , d_{xy} , e_{xy} i f_{xy} i znajdziemy przykładowo związek siły $F_{xy}^{(x)}$ z przemieszczeniami u , v , w . W tym celu rozpatrzmy równowagę węzła $x+1/2$, y w kierunku osi z , należącego do elementu x , y jak również do $x+1$, y . Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
 F_{x+\frac{1}{2}, y}^{(x)} + \frac{1}{2} Q_{x+\frac{1}{2}, y} - b_{xy} \frac{\sqrt{2}}{2} - c_{xy} \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0, \\
 -F_{x+\frac{1}{2}, y}^{(x)} + \frac{1}{2} Q_{x+\frac{1}{2}, y} - a_{x+1, y} \frac{\sqrt{2}}{2} - d_{x+1, y} \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0.
 \end{aligned}$$

Kombinacja liniowa tych równań daje

$$F_{x+\frac{1}{2}, y}^{(x)} = \frac{\sqrt{2}}{4} (-a_{x+1, y} + b_{xy} + c_{xy} - d_{x+1, y}).$$

Z zależności geometrycznych zaś nie trudno wyznaczyć wydłużenie pręta z siłą b_{xy} :

$$b_{xy} = \frac{EA}{2h} [(u_{x+\frac{1}{2},y} - u_{x,y-\frac{1}{2}}) + (v_{x+\frac{1}{2},y} - v_{x,y-\frac{1}{2}}) + \sqrt{2} (w_{x+\frac{1}{2},y} - w_{x,y-\frac{1}{2}})];$$

podobnie można wyznaczyć siły a , c i d . W rezultacie przekształceń otrzymamy poszukiwane związki sił i przemieszczeń:

$$\begin{aligned} L_{xy}^{(x)} &= \frac{1}{8} \frac{EA}{h} (-\nabla_x \Delta_y u_{xy} - \Delta_x \nabla_y v_{xy} + \sqrt{2} \Delta_x \Delta_y w_{xy}), \\ (3.2) \quad F_{xy}^{(y)} &= \frac{1}{8} \frac{EA}{h} [\Delta_x \Delta_y u_{xy} + (\nabla_x \nabla_y - 4) v_{xy} + \sqrt{2} \nabla_x \Delta_y w_{xy}], \\ S_{xy}^{(x)} &= \frac{EA}{h} \Delta_x u_{xy}, \quad S_{xy}^{(y)} = \frac{EA}{h} \Delta_y v_{xy}. \end{aligned}$$

Po uproszczeniach sześciu równań równowagi i wyrażeniu pozostałych sił przez przemieszczenia otrzymamy trzy równania odkształceń u , v , w , opisujące deformację płyty:

$$\begin{aligned} &\Delta_x \Delta_y (\nabla_y + \sqrt{2} \nabla_x) u_{xy} + [\sqrt{2} \nabla_y \Delta_x^2 + 4 (\nabla_x - \nabla_y) - \nabla_x \Delta_y^2 (4\sqrt{2} - 1)] v_{xy} + \\ &\quad + \sqrt{2} \Delta_y (\nabla_y \nabla_x - \sqrt{2} \Delta_x^2) w_{xy} + 8 \Delta_y Q_{xy} \frac{h}{EA} = 0, \\ (3.3) \quad &-\Delta_y (\nabla_x \nabla_y + 5\Delta_x^2 + 4) u_{xy} + \Delta_x (3\Delta_y^2 - 4 - \nabla_x \nabla_y) v_{xy} + \sqrt{2} \Delta_x \Delta_y (\nabla_x - \\ &\quad - \nabla_y) w_{xy} = 0, \\ &\Delta_x [-\nabla_x \nabla_y^2 (\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2} \nabla_y \Delta_x^2] u_{xy} + \{\Delta_y \nabla_y [4 - (\sqrt{2} - 1) \Delta_x^2] - \\ &\quad - 4\nabla_x \Delta_y\} v_{xy} + \sqrt{2} \Delta_y^2 [4 - (\sqrt{2} - 1) \Delta_x^2] w_{xy} + 8 [4 + \nabla_x \nabla_y] Q_{xy} \frac{h}{EA} = 0. \end{aligned}$$

W praktyce mamy do czynienia z płytami, w których liczba czworokątów wzdłuż jednego, krótszego boku jest nie mniejsza niż 8-10. W takim przypadku można wprowadzić dodatkowe założenie, które jest powszechnie stosowane w teoriach klasycznych, mianowicie że odcinki proste, prostopadłe do średniej powierzchni przed odkształceniem, pozostają prostopadłe do niej również po odkształceniu. Matematycznie związek ten w naszym zadaniu wyrazimy w sposób następujący:

$$u_{xy} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Delta_x w_{xy}, \quad v_{xy} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Delta_y w_{xy}.$$

Oznacza to, że przyjmujemy powierzchnię środkową w połowie wysokości płyty, a więc że wszystkie pręty poziome, równoległe czy to w górnej, czy w dolnej płaszczyźnie kratownicy mają takie same przekroje poprzeczne, co jest zgodne z założeniami wyjściowymi.

Można więc teraz sprowadzić sześć równań równowagi do jednego, następującego:

$$(3.4) \quad \sqrt{2} (\Delta_x^2 S_{xy}^{(x)} - \Delta_y^2 S_{xy}^{(y)}) = (\nabla_y + \nabla_x) Q_{xy}.$$

Po wyrażeniu sił S przez przemieszczenia,

$$(3.5) \quad S_{xy}^{(x)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{h} \Delta_x^2 w_{xy}, \quad S_{xy}^{(y)} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{h} \Delta_y^2 w_{xy},$$

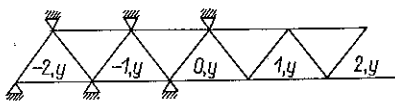
otrzymamy jedno równanie różnicowe, cząstkowe czwartego rzędu określające przemieszczenia w_{xy}

$$(3.6) \quad (\Delta_x^4 + \Delta_y^4) w_{xy} = \frac{2h}{EA} (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy}$$

Jak widać, równanie to jest zbliżone do równania klasycznej płyty, a różnica polega na braku mieszanego przyrostu, odpowiadającego mieszanej pochodnej $\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2$. W dalszych rozważaniach zajmiemy się wyłącznie powyższym równaniem uproszczonym.

4. Warunki brzegowe

Przy wyznaczaniu warunków brzegowych odstępimy od zwykle przyjętych, przybliżonych zależności (por [1] i [5]), kiedy to warunki te w pewnym zakresie z góry narzucają linię ugięcia. W rzeczywistości powyższe równanie opisujące ugięcie płyty kratowej, jako różnicowe, cząstkowe, czwartego rzędu, odnosi się tylko do obszaru $1 < x < n - 1$ oraz $1 < y < m - 1$, jeżeli przyjąć, że x zmienia się w zakresie od 0 do n , a y w zakresie od 0 do m . Wynika to stąd, że ugięcie w punkcie (x, y) określone jest wspólnie z ugięciem w punktach sąsiednich o współrzędnych $(x - 2, y)$, $(x - 1, y)$, $(x + 1, y)$, $(x + 2, y)$, $(x, y - 1)$, $(x, y - 2)$, $(x, y + 1)$ i $(x, y + 2)$. Natomiast nasze równanie dla czworościanów skrajnych o współrzędnych



Rys. 5

np. $(0, y)$ lub $(1, y)$ traci sens, gdyż punktów $x - 1, y$ i $x - 2, y$ w rzeczywistości nie ma, jak i nie istnieją odpowiadające im siły wewnętrzne. Tracą więc sens również i równania równowagi dla dwóch skrajnych elementów.

Jedynie tylko w przypadku płyty utwierdzonej na brzegu możemy przyjąć, że jest ona rozszerzona poza brzeg $x = 0$ i rozbudowana na następne dwa czworościany $-1, y$ i $-2, y$ (rys. 5), przy czym jednak muszą być spełnione warunki

$$w_{-1, y} = w_{-2, y} = w_{0, y} = 0.$$

Tak więc równanie przemieszczeń dla czworościanu $0, y$ będzie miało postać

$$-4 w_{1, y} + w_{2, y} + \Delta_y^4 w_{0, y} = D (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy}$$

lub ogólnie

$$\left[\frac{1}{2} \Delta_x^4 + \frac{1}{2} \Delta_{2x} (\Delta_x^2 + 1) - 3 \right] w_{xy} + \Delta_y^4 w_{xy} = D (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy};$$

podobnie dla segmentu 1, y

$$6 w_{1,y} - 4 w_{2,y} + w_{3,y} + \Delta_y^4 w_{0,y} = D (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy}$$

lub ogólnie

$$\left[\frac{1}{2} \Delta_x^4 + \frac{1}{2} \Delta_{2x} (\Delta_x^2 + 1) + 3 \right] w_{xy} + \Delta_y^4 w_{xy} = D (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy}.$$

W celu wyznaczenia warunków brzegowych dla brzegu swobodnego i swobodnie podpartego należy w myśl poprzednich rozważań powrócić do równań równowagi. Rozpatrzmy w pierwszej kolejności brzeg swobodny, np $x = 0$. W tym celu w odpowiednim równaniu równowagi

$$\sqrt{2} (\Delta_x^2 S_{xy}^{(x)} - \Delta_y^2 S_{xy}^{(y)}) = (\nabla_y + \nabla_x) Q_{xy}$$

wielkości $S_{-1,y}^x$ i $S_{0,y}^x$ należy zastąpić zerem, co daje

$$(4.1) \quad \sqrt{2} (S_{1,y}^{(x)} - \Delta_y^2 S_{0,y}^{(y)}) = \left[\nabla_y + \frac{1}{2} (\nabla_x + \Delta_x) \right] Q_{xy},$$

a po wyrażeniu sił przez przemieszczenia

$$(4.2) \quad (\Delta_x^2 w_{1,y} + \Delta_y^4 w_{0,y}) = D \left[\nabla_y + \frac{1}{2} (\nabla_x + \Delta_x) \right] Q_{xy}$$

lub ogólnie

$$\left[\frac{1}{2} (\nabla_{2x} + \Delta_{2x}) + \Delta_y^4 \right] w_{x,y} = \left[\nabla_y + \frac{1}{2} (\nabla_x + \Delta_x) \right] Q_{xy}.$$

Podobnie dla punktu (1, y) odpowiednie warunki brzegowe mają postać

$$\sqrt{2} (-2S_{1,y}^{(x)} + S_{2,y}^{(x)} - \Delta_y^2 S_{0,y}^{(y)}) = (\nabla_y + \nabla_x) Q_{xy},$$

a w przemieszczeniach

$$\left[\frac{1}{2} \Delta_x^4 - \Delta_x^2 + \frac{1}{2} \Delta_{2x} (\Delta_x^2) + \Delta_y^4 \right] w_{xy} = D (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy}.$$

W przypadku brzegu swobodnie podpartego równania równowagi (4.1) pozostają w mocy. Wyznaczając siły przez przemieszczenia podstawimy $w_{0,y} = 0$, co daje

$$\left[\frac{1}{2} \Delta_x^4 + 2 + \frac{1}{2} \Delta_{2x} (\Delta_x^2 - 2\Delta_{2x}) + \Delta_y^4 \right] w_{1,y} = D (\nabla_y + \nabla_x) Q_{xy}.$$

5. Rozwiązanie równania uproszczonego

Rozwiązanie równania

$$(\Delta_x^4 + \Delta_y^4) w_{xy} = D (\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy}$$

można uzyskać przy pomocy funkcji własnych, podobnie jak w przypadku rusztów o siatce regularnej opisanych w książce W. NOWACKIEGO [5].

Oznaczmy $(\nabla_x + \nabla_y) Q_{xy} = V_{xy}$ i przedstawmy rozwiązanie równania pomocniczego

$$(\Delta_x^4 + \Delta_y^4) \bar{w}_{xy} = \lambda \bar{w}_{xy}$$

w postaci

$$\bar{w}_{xy} = X_x Y_y, \quad x = 2, 3, \dots, n-2, \quad y = 2, 3, \dots, m-2,$$

gdzie X_x zależy jedynie od x , a Y_y jedynie od y . Po wstawieniu powyższego rozwiązania otrzymamy

$$\frac{\Delta_x^4 X_x}{X_x} + \frac{\Delta_y^4 Y_y}{Y_y} = \lambda.$$

Ponieważ każda ze składowych sumy zależy tylko od jednej zmiennej, przeto możemy napisać

$$\Delta_x^4 X_x = \lambda' X_x \quad \text{i} \quad \Delta_y^4 Y_y = \lambda'' Y_y.$$

Podobnie możemy postąpić z równaniami określającymi warunki brzegowe. I tak np. dla swobodnego brzegu $x=0$ otrzymamy dwa równania:

$$\frac{\frac{1}{2}(\nabla_{2x} + \Delta_{2x}) X_x}{X_x} + \frac{\Delta_y^4 Y_y}{Y_y} = \lambda,$$

$$\frac{[\frac{1}{2} \Delta_x^4 - \Delta_x^2 + \frac{1}{2} \Delta_{2x} (\Delta_x^2)] X_x}{X_x} + \frac{\Delta_y^4 Y_y}{Y_y} = \lambda.$$

Przy założeniu, że $X_x^{(i)}$ i $Y_y^{(k)}$ są znormowane, ugięcie $w_{x,y}$ można przedstawić w postaci

$$w_{xy} = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=m} a_{ik} X_x^{(i)} Y_y^{(k)},$$

a obciążenie $V_{x,y}$ w postaci

$$V_{xy} = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=m} b_{ik} X_x^{(i)} Y_y^{(k)},$$

gdzie

$$b_{ik} = \sum_{x=0}^{x=n} \sum_{y=0}^{y=m} V_{xy} X_x^{(i)} Y_y^{(k)}, \quad a_{ik} = D \frac{b_{ik}}{\lambda_i' + \lambda_k''}.$$

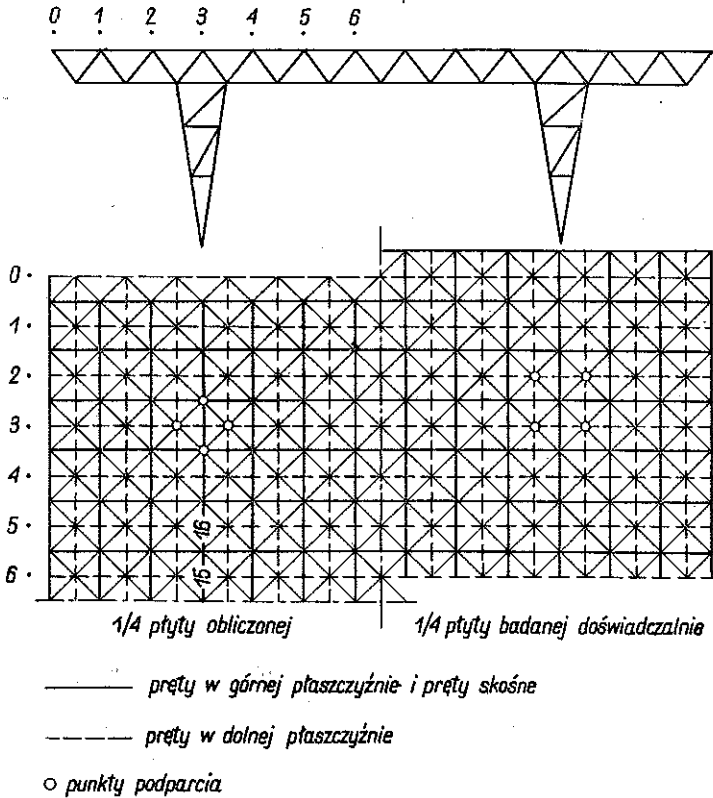
6. Przykład

Rozpatrzmy płytę kwadratową podpartą w czterech, symetrycznie rozstawionych punktach, niemal identyczną z badaną we wspomnianej pracy amerykańskiej [4] (rys. 6). Płyta w naszym przykładzie będzie miała w stosunku do niej niewielką zmianę polegającą na przesunięciu jej siatki w kierunku osi y o pół podziałki (rys. 6). Zmiana ta wynika z przyjętych przez nas uprzednio założeń co do podziału płyty na czworokąty. Kratownica nasza ma 13 odcinków zarówno w kierunku osi x

jak i y i jest obciążona ciągłym, równomiernym obciążeniem pionowym (płaskie naczynie z wodą).

Pręty płyty mają następujące dane (w nawiasach jednostki angielskie):

$$\begin{aligned}
 h &= 124 \text{ cm (4'11'')}, \\
 E &= 2,11 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2 \text{ (30,125} \cdot 10^6 \text{ psi)}, \\
 A &= 3,69 \text{ cm}^2 \text{ (0,563 sq.in.)}.
 \end{aligned}$$



Rys. 6

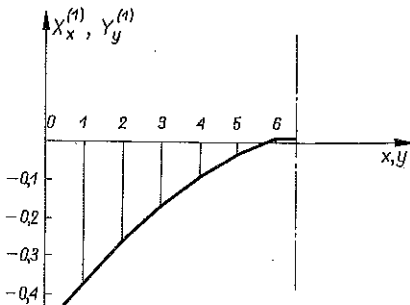
Ze względu na symetrię rozpatrzmy tylko czwartą część płyty, przy czym równania dla X_x i Y_y będą takie same. Po uwzględnieniu warunków brzegowych dla brzegu swobodnego otrzymamy dla X_x układ równań

$$\begin{aligned}
 X_0 - 2X_1 + X_2 &= \lambda' X_0, \\
 -2X_0 + 5X_1 - 4X_2 + X_3 &= \lambda' X_1, \\
 X_0 - 4X_1 + 6X_2 - 4X_3 + X_4 &= \lambda' X_2, \\
 X_1 - 4X_2 + 6X_3 - 4X_4 + X_5 &= \lambda' X_3, \\
 X_2 - 4X_3 + 6X_4 - 4X_5 + X_6 &= \lambda' X_4, \\
 X_3 - 4X_4 + 6X_5 - 3X_6 &= \lambda' X_5, \\
 X_4 - 3X_5 + 2X_6 &= \lambda' X_6,
 \end{aligned}$$

lub zapisując w uproszczeniu za W. N. FADDIEJEWĄ [3]

$$(A - \lambda'_i E) X_i = 0.$$

Układ taki ma jak wiadomo siedem wartości własnych i siedem postaci własnych. Ograniczmy się do wyznaczenia dwóch najmniejszych wartości i postaci im odpowiadającym. Wielkość λ'_1 znajdziemy iterując macierz odwrotną macierzy A . Proces jest dość szybko zbieżny i już szósta iteracja przy wektorze początkowym $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ daje $\lambda'_1 = 0,005381$. Znormowane wielkości $X_x^{(1)}$ zestawione na rys. 7:



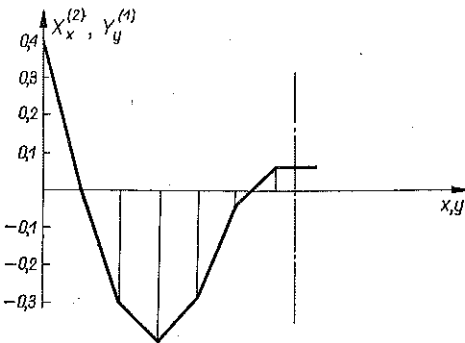
$$\begin{aligned} X_0^{(1)} &= -0,4887, & X_3^{(1)} &= -0,1770, \\ X_1^{(1)} &= -0,3806, & X_4^{(1)} &= -0,0923, \\ X_2^{(1)} &= -0,2751, & X_5^{(1)} &= -0,0282, \end{aligned}$$

$$X_6^{(1)} = 0,0039.$$

Wielkość λ'_2 znajdziemy metodą wyczerpywania znajdując uprzednio macierz A_1^{-1} według zależności

$$A_1^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\lambda'_1} X_1 X_1.$$

W tym przypadku siódma iteracja daje $\lambda'_2 = 0,2608$ oraz znormowane składowe wektora $X_x^{(2)}$ (rys. 7)



$$\begin{aligned} X_0^{(2)} &= 0,3855, & X_3^{(2)} &= -0,4052, \\ X_1^{(2)} &= -0,0098, & X_4^{(2)} &= -0,2889, \\ X_2^{(2)} &= -0,3065, & X_5^{(2)} &= -0,0450, \\ & & X_6^{(2)} &= 0,0770. \end{aligned}$$

Według zależności podanych w p. 5 otrzymamy

$$\frac{b_{11}}{2\lambda'_1} = 4,03 \cdot 10^3 \text{ kG}, \quad \frac{b_{12}}{\lambda'_1 + \lambda'_2} = -3,45 \cdot 10^3 \text{ kG}, \quad \frac{b_{22}}{2\lambda'_2} = -5,15 \cdot 10^3 \text{ kG}$$

przy obciążeniu $P = 100$ kG przypadającym na jeden czworościan. W tablicy 1 zestawiono ugięcia ogólne punktów płyty przy powyższym obciążeniu, a na rys. 7 przedstawiono to samo wykreślenie dla czwartej części płyty.

Wyników naszych nie można jednak porównać z amerykańskimi danymi doświadczalnymi, gdyż te ostatnie uzyskano za pomocą pomiarów z ziemi. W rezultacie otrzymali oni ugięcia płyty łącznie z odkształceniami podpór i osadzeniem tych ostatnich w ziemi. W konsekwencji tego wykresy ugięć są nieliniowe.

Wobec tego podjęto próbę porównania wielkości sił w niektórych prętach. Siły obliczono według wzorów na $S_{x,y}^{(x)}$ i $S_{x,y}^{(y)}$ zamieszczonych w p. 3. Poniżej zestawiono siły w trzech prętach ponumerowanych tak samo w pracy amerykańskiej (rys. 6):

Pręt nr	Siła obliczona	Siła zmierzona
12	1820 kG	2110 kG
15	1120 kG	1655 kG
16	1115 kG	925 kG

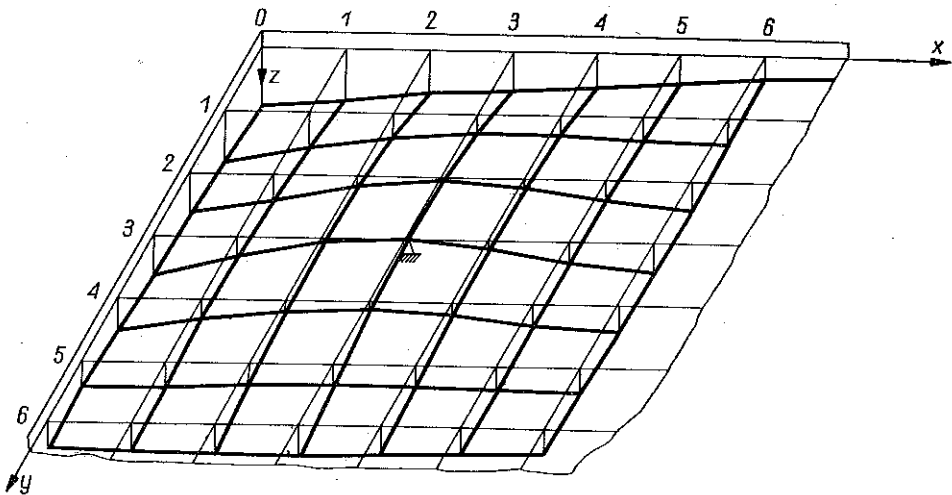
Jak widać w pomiarach tych uzyskano duży skok przy przejściu z pręta 16 na 15. Ponieważ jeden z nich jest przedłużeniem drugiego, a w danym miejscu nie ma skutecznego obciążenia, można to wytłumaczyć dwójako:

Tablica 1. Ugięcia $w_{x,y} \frac{EA}{h}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	2,7168	2,4764	1,9031	1,9252	1,6096	1,3246	1,1803
1		1,7752	1,2112	0,9309	0,9613	1,1978	1,3160
2			0,4514	0,2003	0,4899	1,1067	1,4114
3				0,0000	0,3729	1,0763	1,4277
4					0,6370	1,1182	1,3589
5						1,2014	1,2420
6							1,1846

$w_{x,y} = w_{y,x}$

1) albo w połączeniach istniały początkowe luzy, albo 2) powstały błędy pomiarowe. O ile miały miejsca luzy w połączeniach, to możemy porównać, w pewnym przybliżeniu, średnie z sił w obu prętach. Przedstawiają się one następująco: średnia



Rys. 8

z obliczeń wynosi 1117 kG; średnia z pomiarów 1287 kG; różnica między nimi jest niewielka.

Należy jeszcze dodać, że w doświadczeniu autorzy uzyskali wiele nieliniowych wykresów sił jako funkcji obciążenia co, jak już wspomniano, budzi zastrzeżenia.

Porównując wyniki należy jeszcze wziąć pod uwagę nierównomierne obciążenie (najbardziej obciążona podpora przenosiła 8% więcej niż najmniej obciążona), jak i mimośrodowe przecinanie się osi prętów w jednym węźle. Różnica w siłach nad podporami wynika głównie z tego, iż w obliczeniach wzięto tylko dwa wyrazy szeregu. Jak wiadomo, na dokładność pochodnych linii ugięcia mają wpływ również dalsze wyrazy, szczególnie w punktach z dużymi skupionymi siłami.

Literatura cytowana w tekście

1. Ф. Блейх, Е. Мелан *Уравнения в конечных разностях статике сооружений*, Харьков 1936.
2. В. А. Бовин, *Разностно-вариационные методы строительной механики*, Киев 1963.
3. W. N. FADDIEJEW, *Metody numeryczne algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1955.
4. G. GEIZENDORFER, L. LEGATSKI, *Unitstruts space-frame system*, The University of Michigan Press, 1955.
5. W. NOWACKI, *Mechanika Budowli*, PWN, Warszawa 1960.

Резюме

РЕШЕТЧАТЫЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приводится уравнение перемещений (3.6) для правильной пространственной стержневой системы (рис. 1) известной под названием „Юнистрат“.

Задача представлена исключительно при использовании разностного исчисления сохраняя до конца рассуждений сегментный характер системы. В заключение дается пример опертой в частных точках квадратной пластинки под влиянием непрерывной нагрузки. Результаты сравниваются с экспериментами описанными в работе [4].

Summary

UNIT STRUT PLATES

The displacement equation (3.6) is given for a regular three-dimensional bar system known under the name of unitstrut system. The problem is given a uniform treatment by means of the difference calculus, the segmental character of the system being preserved throughout the entire argument. In conclusion an example is given of a square plate loaded in a continuous manner and supported at four points. The results are confronted with those of the experiments described in [4].

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1964 r.