

STATECZNOŚĆ PRĘTA OPŁYWANEGO RÓWNOLEGŁYM STRUMIENIEM PŁYNU  
PRZY UWZGLĘDNIENIU OPORU CZOŁOWEGO

ZDZISŁAWA KORDAS (KRAKÓW)

## 1. Wstęp

W ostatnich latach wiele uwagi poświęca się badaniu stateczności elementów (pręty, płyty, powłoki) znajdujących się w strumieniu płynu. Wiąże się to z ważnymi technicznie zastosowaniami wyników tych badań przy projektowaniu rakiet, pocisków, części składowych samolotów, okrętów itp.

W pracy niniejszej zajęto się problemem stateczności pręta (płytki) jednostronnie utwierdzonego, znajdującego się w równoległym strumieniu płynu (rys. 1). Punkt ciężkości pręty spoczywa na analizie samej stateczności pręta poddanego działaniu sił hydrodynamicznych, podczas gdy wielkości tych sił określone zostaną w oparciu o stosowane możliwie proste teorie opływu.

W prostoliniowym położeniu równowagi pręt poddany jest działaniu siły ściskającej, występującej w jego czołowym przekroju (opór czołowy). Przy pewnej prędkości strumienia  $U$  pręt może utracić stateczność prostoliniowego położenia równowagi. Wraz z wychyleniem pręta obok sił czołowych zaczynają się pojawiać obciążenia boczne, będące rezultatem nachylenia elementu pręta do kierunku strumienia. Obciążenia te na równi z oporem czołowym posiadają zasadniczy wpływ na stateczność pręta. Jak dotychczas poszczególni autorzy badali problem stateczności pręta poddanego działaniu jednego tylko rodzaju sił. Zajmowali się oni mianowicie wyłącznym działaniem «ciśnięć bocznych», bądź też wyłącznym działaniem siły czołowej. To jednostronne ujęcie problemu było ściśle związane z pewnymi praktycznymi zastosowaniami uzyskanych rezultatów. W niektórych przypadkach bowiem wobec przeważającego działania jednego rodzaju obciążeń okazało się rzeczą możliwą pominięcie obciążeń pozostałych.

Prace poświęcone wyłącznemu działaniu ciśnień bocznych prowadzone są głównie w Związku Radzieckim i Stanach Zjednoczonych. Wśród prac autorów radzieckich wymienić trzeba przede wszystkim pracę A. A. ILIUSZINA [13], w której sformułował on podstawowe prawo rozkładu ciśnień działających na powierzchnie boczne opływającego elementu (prawo płaskich przekrojów). Sformułowane przez ILIUSZINA prawo opływu było następnie wykorzystywane w pracach MOWCZANA, BOLOTINA i innych [15], [20] i [21].

Wśród autorów amerykańskich zajmujących się zagadnieniami opływu elementów, należy wymienić H. ASHLEYA i C. ZARTARIANA [1], którzy podobnie jak ILIUSZIN sformułowali zlinearyzowane prawo rozkładu ciśnień na powierzchni opływającego

elementu. Prawo to zostało przez nich nazwane «prawem tłokowym». Ze względu na stosunkowo prostą postać teoria tłoka jest szeroko stosowana przy analizie stateczności elementów w strumieniu płynu. Stosują ją J. M. HEDGEPEETH [11], G. SEIFERT [24], H. K. CHENG [7], M. A. BIOT [3] i inni.

Polskie prace dotyczące stateczności elementów opływanych strumieniem płynu prowadzone są głównie w odniesieniu do projektowania raket i pocisków. Prace S. KALISKIEGO, J. KACPRZYŃSKIEGO, A. BOBESZKI i Z. DŻYGADŁY [4] i [14], dotyczą najczęściej stateczności ciała smukłego w opływie naddźwiękowym. Autorzy ci zakładając istnienie potencjału opływu przyjmują rozkład sił aerodynamicznych zgodnie z podaną przez W. H. DORRANCE'A teorią opływu ciał smukłych [9]. Wśród prac analizujących stateczność pręta poddanego wyłącznemu działaniu siły czołowej należy wymienić przede wszystkim prace dotyczące stateczności prętów pod działaniem obciążeń «śledzących», tj. zachowujących (w trakcie wyboczenia pręta) kierunek styczny do odkształconej osi pręta w punkcie przyłożenia [2, 8, 10 i 21]. Przypadek skupionej siły śledzącej ma miejsce — jak pisze DŻANIELIDZE [10] — gdy pręt opływany jest strumieniem płynu doskonałego; wówczas to w przekroju czołowym pręta występuje jedynie składowa normalna całkowitego parcia płynu (składowa styczna wobec braku lepkości płynu nie występuje).

Bardziej ogólny sposób zachowania się siły czołowej w trakcie wyboczenia pręta jest analizowany w pracach [17 i 18].

W pracy niniejszej podjęto próbę rozwiązania problemu stateczności pręta (płytki) jednostronnie utwierdzonego, znajdującego się w równoległym strumieniu płynu przy jednoczesnym uwzględnieniu obu rodzajów obciążeń: ciśnień bocznych i siły czołowej. W szczególności badano, jaki wpływ wywiera występujący opór czołowy na krytyczną wartość prędkości strumienia.

Problem stateczności pręta w strumieniu płynu zalicza się do zagadnień «nie-konserwatywnych» (niezachowawczych), bowiem nie wszystkie siły zewnętrzne działające na rozpatrywany pręt posiadają potencjał. Statyczna metoda badania stateczności jest tu więc metodą na ogół niewystarczającą. Należy stosować metodę ogólniejszą, polegającą na badaniu małych drgań układu. Analiza drgań stanowi «dynamiczną» metodę badania stateczności statycznej oraz prowadzi do ogólniejszej definicji obciążeń krytycznych. Mianowicie obciążeniom krytycznym odpowiada zamiana ustalonych lub zanikających drgań układu na drgania nieustalone. Zamiana ta może następować przy częstości  $\omega = 0$  (co odpowiada kryterium statycznemu) lub przy pokrywaniu się dwóch sąsiednich częstości drgań własnych (mówimy wtedy o kinetycznym kryterium stateczności).

## 2. Założenia i równania podstawowe

W przyjętym do rozważań schemacie jednostronnie utwierdzony pręt znajduje się w strumieniu płynu poruszającym się z prędkością  $U$  w kierunku równoległym do nieodkształconej osi pręta. Początek układu współrzędnych przyjęto w punkcie utwierdzenia (oś biegnie wzdłuż nieodkształconej osi pręta, rys. 1). Wektor prędkości strumienia  $U$  jest dodatni, gdy strumień powoduje ściskanie pręta (działa przeciwnie do zwrotu osi  $\xi$ ).

Przyjmujemy następujące założenia:

a) Przekrój pręta posiada co najmniej jedną oś symetrii; ograniczymy się do badania wyboczenia w płaszczyźnie symetrii oznaczając odpowiednią sztywność zginania przez  $EJ$ .

W zasadzie stosowane prawa aerodynamiczne odnoszą się do przekrojów o kształcie wąskiego prostokąta, jednak można się spodziewać, że dostarczą również orientacyjnych danych i dla innych przekrojów symetrycznych.

b) Założymy dalej, że mamy do czynienia z opływem stacjonarnym. Będziemy przez to rozumieć, że parametry charakteryzujące opływ nie zmieniają się w czasie, jak również fakt, że jednostkowe siły działające na element pręta zależą jedynie od chwilowego położenia tego elementu (i jego pochodnych) w stosunku do przyjętego układu odniesienia (są uzależnione «lokalnie», a nie zależą od odkształcenia całego pręta).

c) Rozkład ciśnień na pobocznicy pręta przyjmujemy zgodnie z ogólnie przyjmowanymi uproszczonymi teoriami opływu.

Podobnie jak BOLOTIN w pracy [6] założymy, że ciśnienie boczne

$$(2.1) \quad p = 2Bb \left( U \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial t} \right),$$

gdzie  $B = p_0 \kappa / c_0$  jest stałą charakteryzującą własności płynu. Gdy chodzi o przypadek gazu, to we wzorach tych  $c_0$  oznacza prędkość dźwięku,  $\kappa$  wykładnik politropy,  $U$  prędkość strumienia,  $w = w(\xi, t)$  równanie linii ugięcia pręta,  $b$  szerokość pręta (płytki). Wzór (2.1) bywa na ogół stosowany w przypadku opływu ciała strumieniem gazu. Może on jednak znaleźć zastosowanie również i przy badaniu opływu ciał strumieniem cieczy, przy czym stałą  $B$ , charakteryzującą własności cieczy, należy wówczas wyznaczyć doświadczalnie.

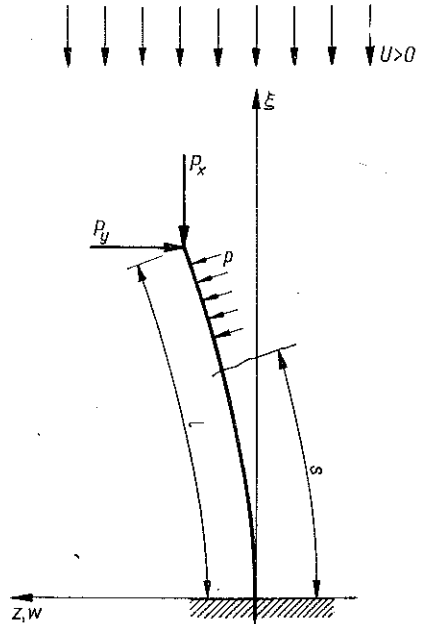
Wzór (2.1) można zinterpretować fizycznie tak, że ciśnienie  $p$  jest proporcjonalne do współrzędnej wektora prędkości względnej  $U_w$  obliczonej względem normalnej  $n$  do ugiętej osi pręta w dowolnym przekroju (rys. 2). Mianowicie,

$$(2.2) \quad p = 2B(U_w)_n,$$

przy czym wektor prędkości względnej  $U_w$  będzie różnicą wektora prędkości bezwzględnej strumienia  $U$  i wektora prędkości unoszenia  $\partial w / \partial t$  (wynikającej z dodatkowego ruchu drgającego pręta w poruszającym się strumieniu). Zatem

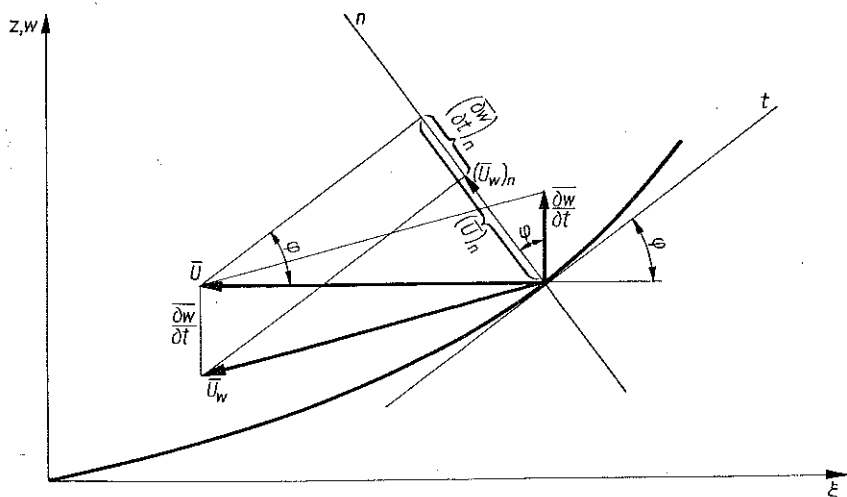
$$(2.3) \quad p = 2Bb \left[ U - \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_n \right] = 2Bb \left( U \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial t} \cos \varphi \right) \approx 2Bb \left( U \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial t} \right).$$

Założono przy tym, że ugięcia pręta są bardzo małe, czyli że  $\sin \varphi \approx \varphi = \partial w / \partial \xi$



Rys. 1

oraz  $\cos \varphi \approx 1$ . Przyjęcie  $\partial w / \partial t = 0$  oznacza pominięcie prędkości unoszenia (elementu pręta względem poruszającego się strumienia) względem samej prędkości strumienia i przyjęcie, że wektor prędkości względnej strumienia  $U_w$  jest równy prędkości bezwzględnej  $U$ .



Rys. 2

Wzór (2.1) podstawimy teraz do równania różniczkowego drgań poprzecznych pręta:

$$(2.4) \quad EJ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - p + e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $EJ$  jest sztywnością przekroju pręta; znajdujemy w ten sposób

$$(2.5) \quad EJ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2BbU \frac{\partial w}{\partial \xi} + e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2bB \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Przyjęto przy tym, że  $P_x = P$  (słuszne dla małych odkształceń). Równanie (2.4) zawiera jedynie składową  $P_x$  działającej siły. Natomiast składowa  $P_y$  nie występuje w równaniu, a jedynie w warunkach brzegowych.

Zauważymy, że równanie (2.5) różni się wyrazem zawierającym opór czołowy  $P$  od analogicznego równania różniczkowego podanego przez A. A. MOWCZANA [20] dla drgającej płytki opływanej strumieniem płynu z pominięciem oporu czołowego.

### 3. Stateczność pręta przy jednoczesnym działaniu oporu czołowego i ciśnienia bocznego.

#### Rozwiązanie ścisłe

Uwzględnienie jednoczesnego działania oporu czołowego i ciśnienia bocznego sprowadza się do rozważenia ogólnego równania różniczkowego czwartego rzędu (2.5), opisującego ruch drgający pręta. Przepiszemy jeszcze raz równanie (2.5) oznaczając kropkami u góry pochodne względem czasu:

$$(3.1) \quad EJw^{IV} + Pw'' - 2BbU w' + e\ddot{w} + 2Bb\dot{w} = 0.$$

Do równania (3.1) dołączymy warunki brzegowe, wynikające z założenia, że opór czołowy pozostaje w trakcie wybożenia pręta styczny do ugiętej osi. Zatem ma charakter siły śledzącej. Warunki te mają więc postać:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0, \\ w'(0, t) = 0, \quad w'''(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Zakładając rozwiązanie równania (3.1) w postaci

$$(3.3) \quad w(\xi, t) = e^{\lambda t} f(\xi),$$

otrzymujemy po podstawieniu (3.3) do (3.1) równanie różniczkowe zwyczajne:

$$(3.4) \quad EJf^{IV} + Pf''' - 2BBUf' + f\lambda(\rho\lambda + 2bB) = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.5) \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(l) = 0, \quad f'''(l) = 0.$$

Przyjmując w równaniu (3.4)  $B = 0$  otrzymujemy równanie (2.3) (praca [17]); już w tym przypadku analiza stateczności w oparciu o kryterium kinetyczne jest stosunkowo żmudna i prowadzi do skomplikowanych równań przestępnych. W rozpatrywanym obecnie przypadku łącznie działających obciążeń zajmiemy się więc tylko kryterium statycznym. Rozważania statyczne dające jak wiadomo rozwiązanie w ograniczonym zakresie zmienności oporu czołowego i ciśnienia bocznego (a tym samym prędkości strumienia) sprowadzają się do założenia częstości  $\omega = \lambda/i = 0$  (odpowiada to statycznemu kryterium stateczności statycznej). Zakresem obowiązywania kryterium kinetycznego zajmiemy się szczegółowo w dalszej części pracy, stosując przybliżoną metodę energetyczną. Jeśli  $\omega = 0$ , to równanie (3.4) będzie równaniem różniczkowym ugiętej osi pręta, mianowicie będzie miało postać:

$$(3.6) \quad EJf^{IV} + Pf''' - 2bBUf' = 0,$$

przy warunkach brzegowych (3.5).

Poszukując rozwiązania tego równania w postaci

$$(3.7) \quad f(\xi) = Ce^{k\xi},$$

otrzymamy równanie charakterystyczne

$$(3.8) \quad k^4 + \frac{P}{EJ}k^2 - \frac{2bBU}{EJ}k = 0.$$

Mamy tu  $k_1 = 0$ , a pozostałe pierwiastki określone będą wzorami Cardana. Ponieważ

$$(3.9) \quad \Delta = \left( -\frac{bBU}{EJ} \right)^2 + \left( \frac{P}{3EJ} \right)^3 > 0,$$

przynajmniej w zakresie ściskających sił  $P$ , zatem

$$k_2 = -2\alpha, \quad k_3 = \alpha + i\beta, \quad k_4 = \alpha - i\beta,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$(3.10) \quad \alpha = -\frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\frac{bBU}{EJ} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{bBU}{EJ} - \sqrt{\Delta}} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left( \sqrt[3]{\frac{bBU}{EJ} + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{\frac{bBU}{EJ} - \sqrt{\Delta}} \right).$$

Całą ogólną równania (3.6) będzie więc (wobec założenia (3.7)) następująca kombinacja funkcji:

$$(3.11) \quad f(\xi) = C_1 + C_2 e^{k_2 \xi} + C_3 e^{\alpha \xi} \sin \beta \xi + C_4 e^{\alpha \xi} \cos \beta \xi.$$

Wykorzystując warunki brzegowe (3.5) otrzymujemy układ równań jednorodnych ze względu na stałe  $C_i$ . Przyrównanie do zera wyznacznika głównego tego układu prowadzi do równania przestępnego, określającego krytyczną wartość oporu czołowego i prędkości strumienia (a tym samym ciśnienia bocznego) w zakresie obowiązywania statycznego kryterium stateczności statycznej. Mianowicie równanie to po przekształceniach ma postać

$$(3.12) \quad k_2 e^{l(k_2 - \alpha)} \{ [ak_2 - (\alpha^2 - \beta^2)] \sin \beta l + \beta (k_2 - 2\alpha) \cos \beta l \} + \beta (\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Aby uzyskać krzywą graniczną w układzie siły  $P$  i prędkości strumienia  $U$  [ $\alpha$  i  $\beta$  wyrażają się przez  $P$  i  $U$ : wzory (3.10) i (3.9)], należałoby znaleźć kilka punktów tej krzywej rozwiązując numerycznie równanie przestępne (3.12), np. regułą fałsi.

Z uwagi na dość skomplikowaną postać równania (3.12) rozwiązanie jego jest bardzo żmudne i dlatego też wspomnianą krzywą graniczną w zakresie stosowalności kryterium statycznego (jak również w zakresie obowiązywania kryterium kinetycznego) znajdziemy w dalszej części pracy przybliżoną metodą energetyczną. Równanie (3.12) wykorzystamy jednak do sprawdzenia dokładności uzyskanych wyników metodą energetyczną.

W przypadku zanikania oporu czołowego otrzymujemy problem stateczności pręta pod działaniem ciśnienia bocznego, rozwiązany przez A. A. MOWCZANĄ w pracy [20], M. A. BIOTA w pracy [3] i W. W. BOŁOTINA [5]. Mianowicie gdy  $P = 0$ , to równanie (3.12) przyjmuje postać

$$(3.13) \quad 2e^{3/2 k_2 l} \cos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 l \right) + 1 = 0.$$

Jest to równanie identyczne z równaniem otrzymanym przez MOWCZANĄ drogą dłuższą i bardziej żmudną.

Rozwiązanie równania (3.13) znajdziemy jeszcze raz regułą fałsi, uzyskując wynik:  $k_2 l = 1,8499$ . Daje to krytyczną wartość prędkości strumienia

$$(3.14) \quad U_{kr} = 3,1651 \frac{EJ}{bB l^3}.$$

Wynik ten jest nieco dokładniejszy od wyników podanych przez A. A. MOWCZANA [20], M. A. BIOTA, [3], i W. W. BOLOTINA, [5]. BOLOTIN rozważając problem stateczności płytki w strumieniu płynu uzyskuje krytyczną wartość prędkości strumienia przybliżoną metodą GALERKINA.

#### 4. Stateczność pręta przy jednoczesnym działaniu oporu czołowego i ciśnienia bocznego.

##### Rozwiązanie metodą energetyczną

4.1. Wprowadzenie. Stosując metodę energetyczną w przypadku braku potencjału należy rozpatrzyć ruch układu i traktować linię ugięcia jako funkcję nie tylko położenia, ale również i czasu. Mianowicie przyjmuje się ją zwykle w postaci przybliżonej:

$$(4.1) \quad w(\xi, t) = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i(t) w_i(\xi),$$

gdzie  $\bar{q}_i(t)$  są funkcjami czasu, a  $w_i(\xi)$  funkcjami położenia, spełniającymi wymagane warunki brzegowe.

Warunek na minimum energii potencjalnej należy zastąpić przez równania Lagrange'a drugiego rodzaju:

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$(4.3) \quad W = E_k - L + A_1$$

jest potencjałem kinetycznym,  $E_k$  energią kinetyczną układu,  $L$  energią potencjalną odkształcenia sprężystego,  $A_1$  pracą sił zewnętrznych posiadających potencjał, natomiast  $Q_i$  będą siłami nie posiadającymi potencjału (pracującymi na przemieszczeniach  $dq_i$ ).

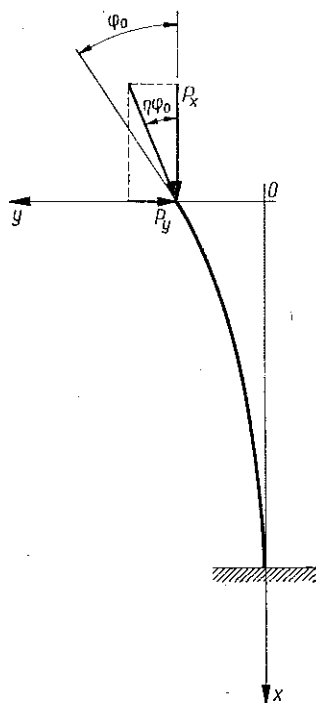
Równania Lagrange'a (4.2) prowadzą do układu równań różniczkowych zwyczajnych, określających w sposób przybliżony ruch układu; analiza stateczności tego ruchu określa stateczność statyczną układu.

Dla wygody rachunku początek układu odniesienia w tej części pracy będziemy przyjmować na swobodnym końcu nie odkształconego pręta, zwroty osi jak na rys. 3 oraz wprowadzimy współrzędne bezwymiarowe

$$(4.4) \quad x = \frac{\xi}{l}, \quad y = \frac{w}{l}.$$

Przyjmijmy do dalszych rozważań dwuparametrowe równanie linii ugięcia w postaci [16],

$$(4.5) \quad y(x, t) = q_1(t) f_1(x) + q_2(t) f_2(x),$$



Rys. 3

gdzie  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  są iloczynami funkcji  $\bar{q}_1(t)$  i  $\bar{q}_2(t)$  i odpowiednich potęg długości pręta  $l$ .

Będziemy zakładać również, że opór czołowy  $P$  śledzi za styczną w końcowym przekroju pręta z pewnym odstawianiem, scharakteryzowanym parametrem  $\eta$ . Jakkolwiek przyjęte równanie linii ugięcia będzie spełniało dokładnie warunki brzegowe jedynie dla  $\eta = 1$  (siła śledząca), to jest warunki:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} w(l, t) = y(1, t) = 0, \quad w'(l, t) = y'(1, t) = 0, \\ w''(0, t) = y''(0, t) = 0, \quad w'''(0, t) = y'''(0, t) = 0, \end{aligned}$$

to jednak uzyskane wyniki przy innych wartościach  $\eta$  zorientują nas o wpływie tego parametru na uzyskiwane krzywe graniczne, a jednocześnie na zakres stosowania kryterium statycznego i kinetycznego.

4.2. Równania Lagrange'a. Przy obliczaniu energii kinetycznej układu posłużymy się wzorem następującym, wyrażonym przez współrzędne bezwymiarowe:

$$(4.7) \quad E_k = \frac{l^3}{2} \int_0^1 [\dot{y}(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \rho l^3 (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2),$$

gdzie przez  $\rho$  oznaczono masę jednostki długości pręta, kropkami u góry oznaczono różniczkowanie względem czasu, a ponadto gdzie

$$(4.8) \quad a_{ij} = \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx.$$

Podobnie obliczymy energię zginania  $L$ :

$$(4.9) \quad L = \frac{EJ}{2l} \int_0^1 [y''(x)]^2 dx = \frac{EJ}{2l} (b_{11} q_1^2 + 2b_{12} q_1 q_2 + b_{22} q_2^2),$$

gdzie

$$(4.10) \quad b_{ij} = \int_0^1 f_i''(x) f_j''(x) dx$$

i oznaczoną przez  $A_1$  pracę składowej pionowej siły  $P_x = P$  (zakładamy przy tym małe ugięcia pręta)

$$(4.11) \quad A_1 = \frac{Pl}{2} \int_0^1 [y'(x)]^2 dx = \frac{Pl}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(4.12) \quad c_{ij} = \int_0^1 f_i'(x) f_j'(x) dx.$$



Zgodnie ze wzorem (4.3) potencjał kinetyczny wyrazi się więc następująco:

$$(4.13) \quad W = \frac{1}{2} ml^3 (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2) - \frac{EJ}{2l} (b_{11} q_1^2 + 2b_{12} q_1 q_2 + b_{22} q_2^2) + \frac{Pl}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2),$$

gdzie współczynniki  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{12}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  i  $c_{12}$ , są określone wzorami (4.8), (4.10) i (4.12).

Elementarna praca składowej  $P_y$  będzie obliczona ze wzoru

$$(4.14) \quad dA_2 = P\eta w'(0) dw(0) = P\eta l y'(0) dy(0) = \\ = P\eta l [(d_{11} q_1 + d_{12} q_2) dq_1 + (d_{22} q_2 + d_{21} q_1) dq_2],$$

gdzie oznaczono

$$(4.15) \quad d_{ij} = f_i(0) f_j'(0).$$

Działające na element długości poboczniczy pręta ciśnienie  $p$  rozłożymy na dwie składowe:

$$p_x = p \sin \varphi, \quad p_y = p \cos \varphi,$$

gdzie przez  $\varphi$  oznaczono kąt, jaki tworzy normalna do elementu  $ds$  z osią poziomą  $y$ . Dalej założymy, że ciśnienie  $p$  rozkłada się zgodnie ze wzorem (2.4). Wzór ten przepiszemy jeszcze raz tak, aby był słuszny dla przyjętego tu układu odniesienia  $x, y$  (rys. 3), mianowicie

$$(4.16) \quad p = 2Bb \left( U \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) = -2Bb \left( U \frac{\partial y}{\partial x} + l \frac{\partial y}{\partial t} \right).$$

Wobec założenia małych ugięć i (4.16) jednostkowe siły  $p_x$  i  $p_y$  wyrażą się wzorami

$$(4.17) \quad p_x \approx p \frac{\partial y}{\partial x} = -2Bb \left[ U \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + l \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right], \\ p_y \approx p = -2Bb \left( U \frac{\partial y}{\partial x} + l \frac{\partial y}{\partial t} \right).$$

Jak widać ze wzorów (4.17) jednostkowe siły  $p_x$  i  $p_y$  nie posiadają potencjału, bowiem ich wartości zależą od kąta obrotu dowolnego przekroju pręta. Zatem ich wpływ uwidoczni się, podobnie jak wpływ składowej  $P_y$  siły  $P$ , po prawej stronie równań Lagrange'a.

Można wykazać, że elementarna praca składowej pionowej  $p_x$  jest mała i wobec wyrażenia (4.14) można ją pominąć. Elementarną pracę składowych poziomych  $p_y$  możemy obliczyć ze wzoru

$$(4.18) \quad dA_4 = \int_0^l p_y \delta w(\xi) d\xi = l^2 \int_0^1 p_y \delta y(x) dx,$$

gdzie  $\delta w(\xi) = l \delta y(x)$  jest przemieszczeniem dowolnego punktu pręta o współrzędnej  $\xi$  lub  $x$  w danej chwili (w pewnym odstępie czasu) w kierunku osi  $w$  lub  $y$ .

Wobec przyjętego równania linii ugięcia w postaci (4.5)

$$(4.19) \quad \delta y(x) = f_1(x) dq_1 + f_2(x) dq_2$$

oraz

$$(4.20) \quad p_y = -2bB \{U[q_1 f_1'(x) + q_2 f_2'(x)] + l[\dot{q}_1 f_1(x) + \dot{q}_2 f_2(x)]\}.$$

Podstawiając (4.19) i (4.20) do wyrażenia (4.18) otrzymujemy po uporządkowaniu ogólne wyrażenie na  $dA_4$  w postaci:

$$(4.21) \quad dA_4 = -2Bl^2 b \{ [U(q_1 e_{11} + q_2 e_{12}) + l(\dot{q}_1 a_{11} + \dot{q}_2 a_{12})] dq_1 + \\ + U[(q_2 e_{22} + q_1 e_{21}) + l(\dot{q}_2 a_{22} + \dot{q}_1 a_{12})] dq_2 \},$$

gdzie  $a_{11}, a_{12}$  zostały zdefiniowane wzorami (4.8), natomiast

$$(4.22) \quad e_{ij} = \int_0^1 f_i(x) f_j'(x) dx.$$

Siły uogólnione zatem dla łącznego przypadku działania oporu czołowego i ciśnienia bocznego będą miały postać

$$(4.23) \quad Q_1 = P\eta l(d_{11} q_1 + d_{12} q_2) - 2Bl^2 b [U(e_{11} q_1 + e_{12} q_2) + l(a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2)], \\ Q_2 = P\eta l(d_{22} q_2 + d_{21} q_1) - 2Bl^2 b [U(e_{22} q_2 + e_{21} q_1) + l(a_{22} \dot{q}_2 + a_{12} \dot{q}_1)].$$

Podstawienie wyrażen (4.13) i (4.23) do (4.2) pozwala zapisać równania Lagrange'a w następujący sposób:

$$(4.24) \quad A_1 \ddot{q}_1 + B_1 \ddot{q}_2 + C_1 \dot{q}_1 + D \dot{q}_2 + E_1 q_1 + F_1 q_2 = 0, \\ A_2 \ddot{q}_2 + B_1 \ddot{q}_1 + C_2 \dot{q}_2 + D \dot{q}_1 + E_2 q_2 + F_2 q_1 = 0,$$

gdzie

$$(4.25) \quad \begin{array}{l} A_1 = \rho l^4 a_{11}, \\ B_1 = \rho l^4 a_{12}, \\ C_1 = 2bBl^4 a_{11}, \\ D = 2bBl^4 a_{12}, \\ E_1 = E J b_{11} - Pl^2 c_{11} - Pl^2 d_{11} + \\ \quad \quad \quad + 2bBl^3 U e_{11}, \\ F_1 = E J b_{12} - Pl^2 c_{12} - Pl^2 d_{12} + \\ \quad \quad \quad + 2bBl^3 U e_{12}, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} A_2 = \rho l^4 a_{22}, \\ B_1 = \rho l^4 a_{12}, \\ C_2 = 2bBl^4 a_{22}, \\ D = 2bBl^4 a_{12}, \\ E_2 = E J b_{22} - Pl^2 c_{22} - Pl^2 d_{22} + \\ \quad \quad \quad + 2bBl^3 U e_{22}, \\ F_2 = E J b_{12} - Pl^2 c_{12} - Pl^2 d_{21} + \\ \quad \quad \quad + 2bBl^3 U e_{21}. \end{array} \right.$$

Układ równań różniczkowych zwyczajnych (4.24) opisuje w sposób przybliżony ruch drgający rozpatrywanego pręta; analiza stateczności tego ruchu określa stateczność statyczną pręta.

4.3. Kryteria stateczności. Zajmiemy się poniżej badaniem stateczności układu równań (4.24). Założymy, że współrzędne uogólnione  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  są następującymi funkcjami czasu:

$$(4.26) \quad q_1(t) = a_1 e^{kt}, \quad q_2(t) = a_2 e^{kt},$$

gdzie  $a_1$  i  $a_2$  są nieokreślonymi stałymi. Podstawiając funkcje (4.26) i odpowiednie pochodne względem czasu funkcji  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$ , do układu równań (4.24) otrzymujemy układ równań jednorodnych ze względu na stałe  $a_1$  i  $a_2$ , a mianowicie:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} (A_1 k^2 + C_1 k + E_1) a_1 + (B_1 k^2 + Dk + F_1) a_2 &= 0, \\ (B_1 k^2 + Dk + F_2) a_1 + (A_2 k^2 + C_2 k + E_2) a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Przyrównanie do zera wyznacznika głównego tego układu prowadzi do równania czwartego stopnia ze względu na  $k$ . Jest to równanie charakterystyczne odpowiedniego równania różniczkowego czwartego rzędu, do którego można sprowadzić układ (4.24):

$$(4.28) \quad Lk^4 + Mk^3 + Nk^2 + Sk + R = 0,$$

gdzie

$$(4.29) \quad \begin{aligned} L &= A_1 A_2 - B_1^2, & M &= A_1 C_2 + C_1 A_2 - 2B_1 D, & R &= E_1 E_2 - F_1 F_2, \\ N &= A_1 E_2 + E_1 A_2 + C_1 C_2 - B_1 F_2 - B_1 F_1 - D^2, \\ S &= C_1 E_2 + E_1 C_2 - DF_1 - DF_2. \end{aligned}$$

Ruch typu  $q = ae^{kt}$  jest stateczny, jeśli wykładnik  $k$  nie ma dodatniej części rzeczywistej. Warunkiem koniecznym stateczności jest

$$(4.30) \quad LS^2 - MNS + M^2 R < 0.$$

Jest to kryterium stateczności ruchu Routha-Hurwitza [15]. Jeśli dodatkowo wszystkie współczynniki równania (4.28) są dodatnie, to jest to warunek wystarczający. Przyjęcie  $R = 0$  odpowiada statycznemu kryterium stateczności. Współczynniki  $L$  i  $M$  są zawsze dodatnie. Współczynniki  $N$  i  $S$  mogą być dodatnie lub ujemne, jednak można wykazać, że jeżeli zachodzi (4.30), to są one dodatnie.

Układ będzie się znajdował na granicy stateczności, jeśli

$$(4.31) \quad LS^2 - MNS + M^2 R = 0.$$

Jest to kinetyczne kryterium stateczności statycznej układów drgających opisanych równaniem czwartego rzędu. Kryterium tym będziemy się niżej posługiwać dla wyprowadzenia równania krzywej granicznej (rozgraniczającej obszar stateczności od obszaru niestateczności) w układzie — siła  $P$  i prędkość strumienia płynu  $U$ . Kryterium stateczne natomiast uzyskamy przy założeniu, że częstość drgań  $k = \frac{\omega}{i} = 0$  (pręt znajduje się w równowadze). Prowadzi to do równania

$$(4.32) \quad R = E_1 E_2 - F_1 F_2 = 0.$$

Zwróćmy uwagę, że w przypadku pominięcia prędkości unoszenia strumienia (p. 2. takie założenie czyni W. W. BOLOTIN [5]), ciśnienie  $p$  wyrazi się za pomocą wzoru

$$(4.33) \quad p = 2 BbU \frac{\partial w}{\partial \xi} = 2 BUb \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Jest to równoznaczne z przyjęciem w układzie równań (4.24)  $C_1 = C_2 = D = 0$  (pominięcie wyrazów z pierwszą pochodną względem czasu współrzędnych uogólnionych  $q_1$  i  $q_2$ ). Układ (4.24) sprowadza się wtedy do jednego równania różniczkowego czwartego rzędu w postaci:

$$(4.34) \quad L \ddot{q}_1 + N \ddot{q}_1 + R q_1 = 0,$$

którego równaniem charakterystycznym będzie równanie o postaci

$$(4.35) \quad Lk^4 + Nk^2 + R = 0.$$

Pierwiastkami tego równania będą

$$(4.36) \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-N + \sqrt{\Delta}}{2L}} = \pm \sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 - 4RL}}{2L}},$$

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-N - \sqrt{\Delta}}{2L}} = \pm \sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 - 4RL}}{2L}}.$$

Jak długo wszystkie pierwiastki (4.36) są różne i posiadają wartość urojona, ruch układu jest stateczny. Ruch przestaje być stateczny w przypadku, gdy  $R = 0$  (kryterium statyczne) lub gdy

$$(4.37) \quad N^2 - 4RL = 0.$$

Jest to kryterium kinetyczne dla równania (4.34).

Poszukując krzywej granicznej w układzie siła  $P$  i prędkość strumienia  $U$  będziemy się posługiwali zarówno kryterium statycznym, jak i kinetycznym. Okaze się, że krzywa ta częściowo będzie odpowiadała statycznemu, a częściowo kinetycznemu kryterium stateczności statycznej [wzory (4.32) i (4.34) lub (3.37)].

**4.4. Wyprowadzenie równań krzywej granicznej dla założonej postaci linii ugięcia.** Przejdziemy teraz do szczegółowych obliczeń. Jako równanie linii ugięcia będziemy przyjmować wielomiany podobnie jak w pracy [16], bowiem są to funkcje na ogół prowadzące do wyników wystarczająco dokładnych, a jednocześnie do stosunkowo najmniej żmudnych operacji rachunkowych. Założymy tu równanie linii ugięcia w postaci wielomianów możliwie najniższych stopni spełniających jednorodny warunki brzegowe (4.6), zatem nie spełniających warunku na siłę poprzeczną dla dowolnej wartości  $\eta$ , który ma postać:  $w'''(l, t) = (\eta - 1) P/EJ w'(l, t)$ . Jak wykazano w pracy [16] niespełnienie warunku na siłę poprzeczną w zakresie sił podśledzających w stosunkowo małym stopniu decyduje o dokładności wyników. Zatem przyjmijmy funkcje

$$(4.38) \quad f_1(x) = x^4 - 4x + 3, \quad f_2(x) = x^5 - 5x + 4.$$

Funkcje (4.38) wykorzystamy następnie do obliczenia odpowiednich współczynników [wykorzystując związki (4.8), (4.10) i (4.12)], figurujących w wyrażeniu na potencjał kinetyczny (4.13). Mianowicie po obliczeniu odpowiednich całek otrzymujemy następujące wartości:

$$(4.39) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{104}{45}, & b_{11} &= \frac{144}{5}, & c_{11} &= \frac{72}{7}, \\ a_{22} &= \frac{1000}{231}, & b_{22} &= \frac{400}{7}, & c_{22} &= \frac{160}{9}, \\ a_{12} &= \frac{664}{210}, & b_{12} &= 40, & c_{12} &= \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Dalej wykorzystując związki (4.15) i (4.25) obliczymy wartości odpowiednich współczynników figurujących w wyrażeniach na siły uogólnione. Mianowicie

$$(4.40) \quad \begin{aligned} d_{11} &= -12, & d_{22} &= -20, & d_{12} &= -15, & d_{21} &= -16, \\ e_{11} &= -9/2, & e_{22} &= -8, & e_{12} &= -52/9, & e_{21} &= -56/9. \end{aligned}$$

Jeżeli wykorzystamy związki (4.25) i (4.29), a następnie napiszemy w formie wyraźnej kryterium kinetyczne (4.31), to otrzymamy równanie poszukiwanej krzywej granicznej w postaci równania drugiego stopnia ze względu na siłę  $P$  i prędkość strumienia  $U$ :

$$(4.41) \quad \begin{aligned} &13,026319 E^2 J^2 + 0,04110345 P^2 I^4 + 0,02286945 P^2 \eta^2 I^4 - \\ &- 0,05745925 P^2 \eta I^4 - 0,002843954 B^2 b^2 I^6 U^2 - 1,2653824 E J P I^2 + \\ &+ 0,5226024 E J P \eta I^2 + 0,0304164 E J B I^3 U + 0,00930556 P I^5 B b U - \\ &- 0,003317385 P I^5 \eta b B U + 0,2171378 \frac{B^2 b^2 I^4}{e} E J - 0,013871642 \times \\ &\times \frac{B^2 b^2 I^4}{e} P I^2 + 0,008672272 \frac{B^2 b^2 I^4}{e} P \eta I^2 - 0,003045226 \frac{B^2 b^2 I^4}{e} B b I^3 U = 0. \end{aligned}$$

Kryterium statyczne natomiast (4.32) prowadzi do równania

$$(4.42) \quad \begin{aligned} &45,71428 E^2 J^2 + 0,6071428 P^2 I^4 + 0,1975308 b^2 B^2 I^6 U^2 - 19,75510 E J P I^2 + \\ &+ 21,71428 E J \eta P I^2 - 15,08571 E J b B I^3 U - 0,5476191 P^2 \eta I^4 + \\ &+ 0,5714286 P I^2 b B I^3 U - 0,4444444 P \eta I^2 B I^3 U b = 0. \end{aligned}$$

**4.5. Analiza równań krzywej granicznej.** Przyjęcie w równaniu (4.41) i (4.42)  $\eta = 1$  i  $U = 0$  daje przypadek siły śledzącej analizowany w pracy Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKIEGO [16] przy wykorzystaniu tego samego równania linii ugięcia. Okazuje się, że kryterium statyczne (4.42) nie daje w tym przypadku rozwiązania, bowiem prowadzi do równania nie posiadającego rzeczywistych pierwiastków  $P$ .

Kryterium kinetyczne natomiast (4.41) daje równanie kwadratowe na  $P$ , z którego wynika przybliżona wartość śledzącej siły krytycznej

$$(4.43) \quad P_k = 21,647 \frac{EJ}{l^2}.$$

W przypadku  $P = 0$ , kryterium statyczne (4.42) daje rozwiązanie, mianowicie prowadzi do równania kwadratowego ze względu na prędkość strumienia  $U$  (kryterium kinetyczne daje następną prędkość krytyczną odpowiadającą utracie stateczności «typu flutter»). Równanie to ma postać

$$(4.44) \quad U^2 - 76,37142 \frac{EJ}{bBl^3} U + 231,4285 \frac{E^2 J^2}{b^2 B^2 l^6} = 0,$$

skąd wynika krytyczna wartość prędkości strumienia:

$$(4.45) \quad U_k = 3,16115 \frac{EJ}{bBl^3}.$$

Wyniki (4.43) i (4.45) niewiele odbiegają od wartości ścisłych podanych odpowiednimi wzorami w pracy [17] i w niniejszej pracy w p. 3, wzór (3.14). Podstawiamy dalej

$$(4.46) \quad P = 21,647 \frac{EJ}{l^2} s, \quad U = 3,16115 \frac{EJ}{bBl^3} v,$$

gdzie  $s$  jest bezwymiarowym oporem czołowym,  $v$  bezwymiarową prędkością strumienia oraz oznaczmy dodatkowo

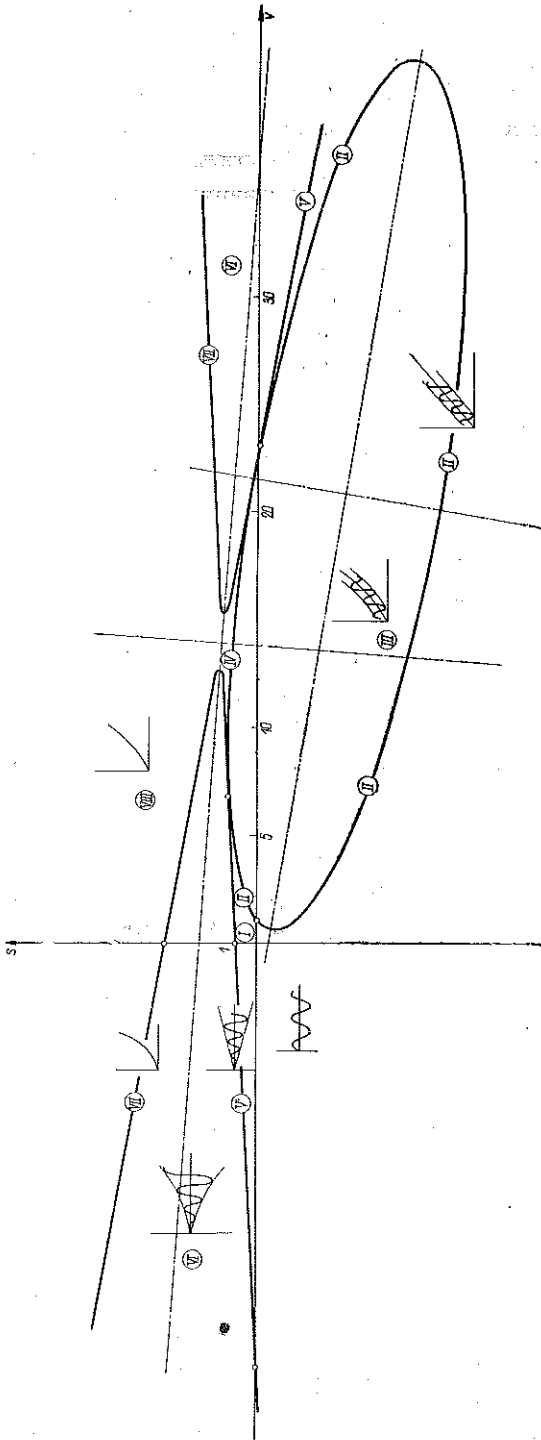
$$(4.47) \quad \theta = \frac{B^2 b^2 l^4}{\rho EJ} = \frac{\rho_0^2 \kappa^2 l^4}{\rho EJ c_0^2},$$

przy czym  $\theta$  będzie parametrem charakteryzującym wpływ prędkości unoszenia strumienia na postać krzywej granicznej. Mianowicie przypadkowi  $\theta = 0$  odpowiada równanie (4.35) i kryterium kinetyczne w postaci (4.37). Po wprowadzeniu związków (4.46) i (4.47) do równań (4.41) i (4.42) otrzymujemy odpowiednio równania krzywej granicznej. Mianowicie równanie odpowiadające kinetycznemu kryterium stateczności będzie miało postać

$$(4.48) \quad v^2 - (22,4064 - 7,98778 \eta) vs - (677,736 - 947,420 \eta + 377,084 \eta^2) s^2 - \\ - (3,38330 - 0,338729 \theta) v + (963,843 - 398,067 \eta + 10,5661 \theta - 6,60569 \theta \eta) s - \\ - (458,362 + 7,64052 \theta) = 0,$$

a równanie odpowiadające statycznemu kryterium postać

$$(4.49) \quad v^2 + (19,8097 - 15,4076 \eta) vs + (144,132 - 130,001 \eta) s^2 - \\ - 24,1593 v - (216,646 - 238,132 \eta) s + 23,1593 = 0.$$



Rys. 4

a) Przypadek  $\eta = 1$  (opór czołowy daje siłę śledzącą). Poniżej przeprowadzimy szczegółową analizę uzyskanych krzywych granicznych w układzie  $s, v$  w przypadku, gdy opór czołowy daje siłę śledzącą ( $\eta = 1$ ). Znajdziemy obszary, w których można stosować statyczne i kinetyczne kryterium stateczności. Zajmiemy się również badaniem wpływu parametru  $\theta$  na postacię krzywych granicznych. Podstawiając w równaniach (4.48) i (4.49)  $\eta = 1$  otrzymamy odpowiednio równania:

$$(4.50) \quad v^2 - 14,4186 vs - 10,7401 s^2 - 3,38329 v + 0,338729 \theta v + \\ + 565,777 s + 3,96037 \theta s - 458,362 - 7,64051 \theta = 0,$$

$$(4.51) \quad v^2 + 4,4021 vs + 14,1300 s^2 - 24,159 v + 21,485 s + 23,159 = 0.$$

Równanie (4.50) odpowiada kinetycznemu, a równanie (4.51) statycznemu kryterium stateczności. Okazuje się, że dla ustalonej wartości  $\theta$  wykresem funkcji (4.50) jest hiperbola, natomiast funkcji (4.51) jest elipsa.

Rysunek 4 podaje omawiane krzywe graniczne dla  $\theta = 0$ . Uzyskana elipsa dwukrotnie przecina oś  $v$ , mianowicie w punktach  $v = 1$  i  $v = 23,159$ . Odpowiada to utracie stateczności pręta pod wyłączonym działaniem ciśnień bocznych ( $s = 0$ ); taka utrata stateczności, odpowiadająca kryterium statycznemu, bywa nazywana w aerodynamice utratą stateczności «typu diwergencji». Obie gałęzie hiperboli natomiast przecinają oś  $v$  w punktach:  $v = 23,168$  oraz  $v = -19,784$  (utrata stateczności «typu flutter»).

W przypadku  $v = 0$  kryterium statyczne nie daje żadnego rozwiązania (elipsa nie przecina osi  $s$ ), natomiast kryterium kinetyczne (lewa gałąź hiperboli) przecina oś  $s$  w punktach  $s = 1$  i  $s = 4,268$ . Wartość  $s = 1$  odpowiada przybliżonej krytycznej wartości śledzącego oporu czołowego, natomiast  $s = 4,268$  drugiej wartości siły krytycznej. Okazuje się dalej, że uzyskane krzywe (elipsa i hiperbola) są do siebie styczne. Warunek styczności sformułujemy w sposób następujący: poszukujemy punktu, który jednocześnie spełnia kryterium kinetyczne, czyli warunek (4.52)  $\Delta = N^2 - 4RM = 0$  oraz kryterium statyczne  $R = 0$ . Oba warunki mogą być jednocześnie spełnione tylko wtedy, gdy

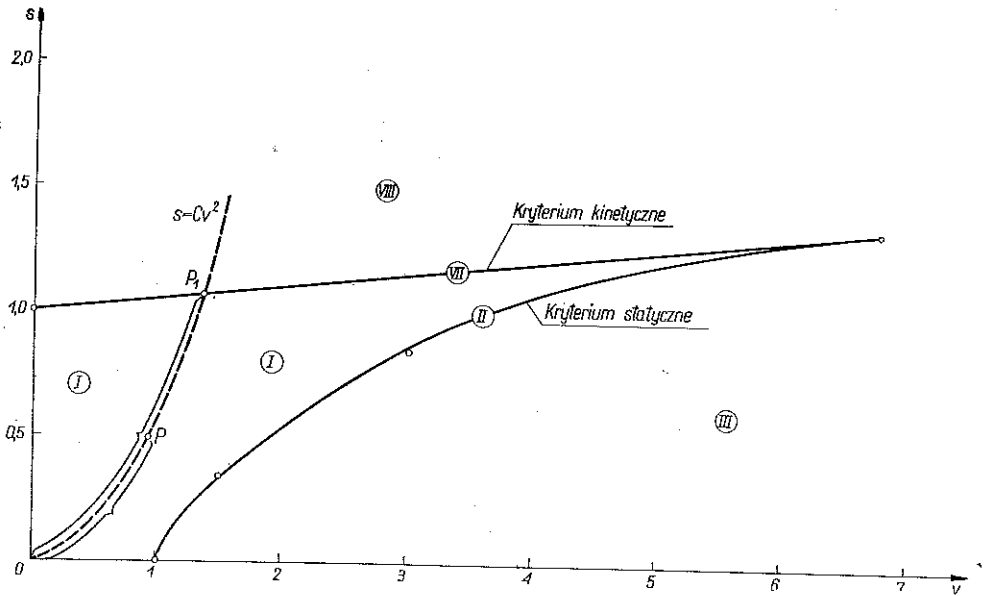
$$(4.52) \quad N = 0.$$

Poszukiwanie punktu styczności sprowadza się więc do znalezienia współrzędnych punktu spełniających warunek (4.52) i jedno z równań krzywej granicznej (4.50) lub (4.51).

W omawianym przypadku  $\theta = 0$  otrzymujemy następujące punkty styczności: ( $v = 6,806, s = 1,347$ ) oraz ( $v = 23,691, s = -0,097$ ). Punkty te oznaczone są na rys. 4. Na rysunku 4 ponadto numerami od I do VIII oznaczono obszary i granice obszarów, na które podzielona jest cała płaszczyzna  $s, v$ , uzyskanymi krzywymi granicznymi. W każdym z tych obszarów (ewentualnie na granicy odpowiednich obszarów) równanie charakterystyczne (4.35) odpowiedniego równania różniczkowego, opisującego ruch drgający pręta, posiada różnej wartości pierwiastki, a zatem ogólne rozwiązanie ma różną postać bądź stateczną, bądź niestateczną.



Obszarem stateczności jest jedynie obszar I. Interesują nas szczególnie dodatnie wartości oporu  $P$  i prędkości strumienia  $U$ , zatem pierwsza ćwiartka płaszczyzny  $s, v$ . Rysunek 5 podaje w większej skali obszar stateczności właśnie w zakresie dodatnich wartości  $s$  i  $v$ . Jak widać z rys. 5 obszar stateczności wcina się ostrym klinem w płaszczyznę  $s, v$ . Oznacza to, że nawet przy stosunkowo dużych prędkościach strumienia  $v$  ruch pręta może być stateczny, byleby przy tym był dostatecznie duży śledzący opór czołowy, który działa stabilizująco.



Rys. 5

W p. 3 wyprowadziliśmy ściśle równanie krzywej granicznej w zakresie obowiązywania statycznego kryterium stateczności. Było to równanie (3.12). Wykorzystamy je teraz do sprawdzenia dokładności metody energetycznej. Znajdziemy mianowicie kilka punktów rozwiązujących równanie przestępne (3.12) stosując do rozwiązania regułę fałsi. Okazuje się, że równanie (3.12) spełniają między innymi następujące pary pierwiastków:

$$s = 0, \quad v = 1,0012; \quad s = 0,3375, \quad v = 1,5; \quad s = 0,8551, \quad v = 3.$$

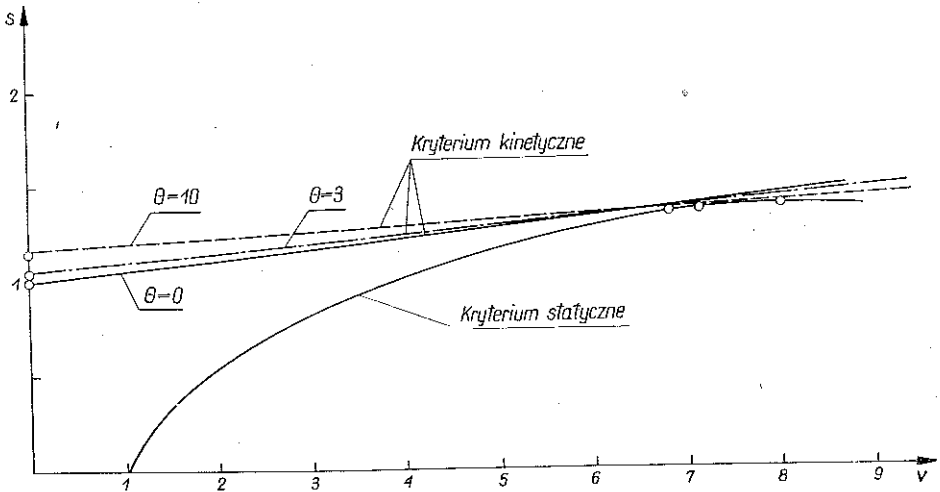
Punkty te zostały naniesione na rys. 5.

Współrzędne odpowiednich punktów uzyskane metodą energetyczną mają wartości:

$$s = 0, \quad v = 1; \quad s = 0,3306, \quad v = 1,5; \quad s = 0,8605, \quad v = 3.$$

Jak widać, krzywa graniczna uzyskana metodą energetyczną przebiega bardzo blisko ściśle znalezionych punktów. Zatem można stąd wyciągnąć wniosek, że metoda energetyczna daje tu wystarczająco dokładne wyniki.

Na rysunku 6 pokazano krzywe graniczne dla różnych wartości  $\theta$ . Mianowicie przykładowo wybrano  $\theta = 3$  i  $\theta = 10$ . Krzywa graniczna uzyskana z kryterium statycznego (elipsa) nie zmienia swego charakteru ani położenia (bowiem w równaniu (4.51) nie figuruje parameter  $\theta$ ). Kryterium kinetyczne natomiast daje inne hiperbole, jak widać z rys. 6 są one bardzo bliskie hiperboli uzyskanej dla  $\theta = 0$  i pozostają w dalszym ciągu styczne do elipsy. Przyjęcie  $\theta = 0$ , odpowiadające pominięciu prędkości unoszenia strumienia jest praktycznie uzasadnione, bowiem w najczęściej stosowanych prętach  $\theta$  nie osiąga nawet wartości 1.



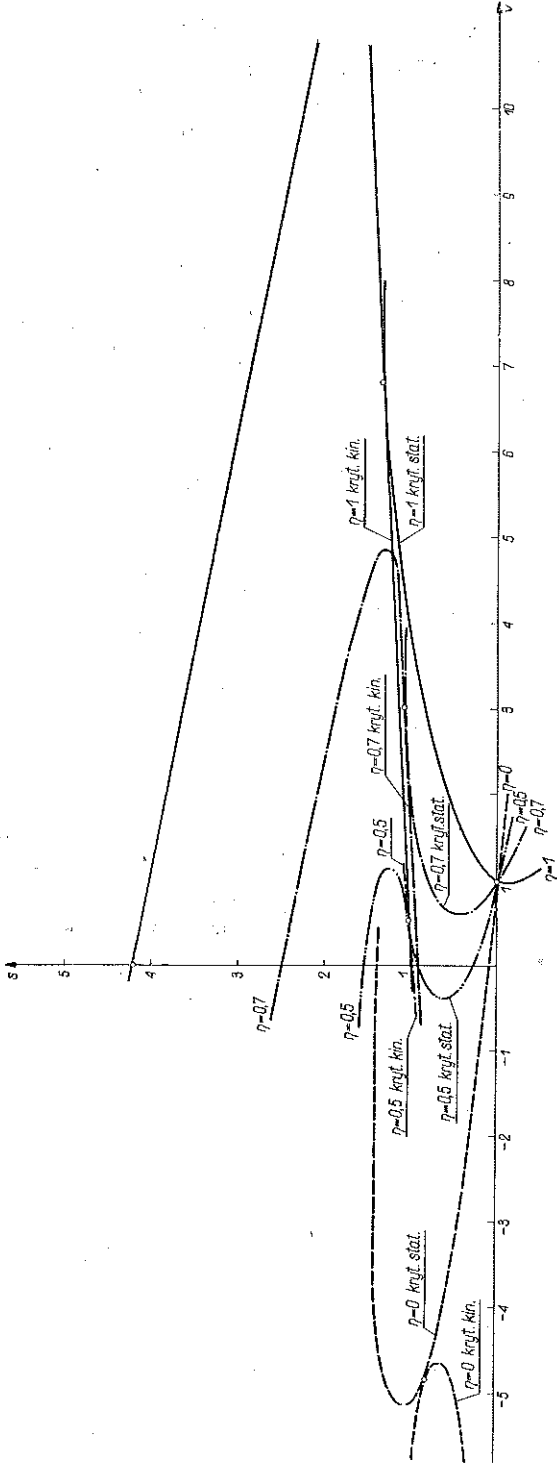
Rys. 6

Na przykład dla następujących danych: pręt o długości  $l = 1$  [m], przekrój pręta kwadratowy o boku  $a = 1$  [cm], moduł Younga dla stali  $E = 2,1 \cdot 10^6$  [kG/cm<sup>2</sup>], masa jednostki długości pręta  $\rho = 0,008/981$  [kG sek<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup>], ciśnienie hydrostatyczne powietrza  $p_0 = 1$  [kG/cm<sup>2</sup>], prędkość dźwięku w powietrzu  $c_0 = 331$  [m/sek], wykładnik politropy powietrza  $\kappa = 1,5$ ;  $\theta$  przyjmuje wartość  $\approx 0,2$ .

b) Wpływ parametru  $\eta$  na postać krzywej granicznej przy ustalonej wartości  $\theta = 0$ . W przypadku  $\theta = 0$  kryterium kinetyczne (4.48) przyjmuje postać:

$$(4.53) \quad v^2 - (22,4064 - 7,98778 \eta) vs - (677,736 - 947,420 \eta + 377,084 \eta^2) s^2 - \\ - 3,38330 v + (963,843 - 398,067 \eta) s - 458,362 = 0,$$

natomiast kryterium statyczne daje uzyskane równanie (4.49). Dla ustalonej wartości  $\eta$  krzywą graniczną odpowiadającą kryterium statycznemu (4.49) jest elipsa, natomiast krzywą graniczną odpowiadającą kryterium kinetycznemu (4.53) jest hiperbola styczna do elipsy o tej samej wartości parametru  $\eta$ . Aby ocenić wpływ współczynnika śledzenia  $\eta$  na przebieg krzywych granicznych, sporządzimy wykresy funkcji (4.49) i (4.53) dla ustalonych wartości  $\eta = 0$ ;  $\eta = 0,5$ ;  $\eta = 0,7$ .



Rys. 7

Rysunek 7 podaje wykresy uzyskanych krzywych; na rysunku tym linią cieką wkreślono również uzyskaną wcześniej krzywą graniczną dla  $\eta = 1$ . Poniżej zajmujemy się analizą uzyskanych krzywych. Okazuje się, że kryterium statyczne dla każdej wartości daje elipsę przecinającą oś  $v$  w punktach  $v = 1$  i  $v = 23,1593$  (odpowiada to przypadkowi zanikania jednostkowego oporu czołowego). Wartość  $v = 1$  odpowiada krytycznej wartości prędkości strumienia przy pominięciu oporu czołowego [wzór (4.45)]. Natomiast uzyskane elipsy dla małych wartości  $\eta$  przecinają oś  $s$  w dwóch punktach, następnie dla rosnących  $\eta$  przesuwają się w prawo (w kierunku dodatnich wartości  $v$ ); dla pewnej wartości  $\eta = 0,572$ , elipsa jest styczna do osi  $s$ , natomiast dla wartości  $\eta > 0,572$  elipsa nie przecina już osi  $s$ . Oznacza to, że w przypadku wyłącznego działania oporu czołowego ( $v = 0$ ), kryterium statyczne daje rozwiązanie (daje krytyczną wartość oporu czołowego) jedynie dla  $\eta \leq 0,572$ .

Należy zwrócić uwagę, że jest to wartość przybliżona, jak bowiem wiemy z rozważań ścisłych, kryterium statyczne daje rozwiązanie jedynie dla  $\eta \leq 0,5$ . W szczególności dla  $\eta = 0$  elipsa przecina oś  $s$  w punktach  $s = 0,1158$  i  $s = 1,3873$ . Wartość  $s = 0,1158$  odpowiada przybliżonej wartości pierwszej siły krytycznej przy ustalonym pionowym kierunku działania. Wynosi ona wobec wzoru (4.46):  $P_k = 2,5067 EJ/l^2$ , zamiast wartości ścisłej

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}.$$

Wszystkie hiperbole uzyskane z kinetycznego kryterium statyczności (4.53) jak należało się spodziewać, przecinają oś  $v$  w tych samych punktach  $v = 23,1675$  oraz  $v = -19,7845$ ; odpowiada to przypadkowi zanikania oporu czołowego. Znaczenie praktyczne posiada jednak w tym przypadku wynik uzyskany z kryterium statycznego, mianowicie  $v = 1$ . Jak widać z rys. 6 odpowiednie pary krzywych granicznych (elipsa i hiperbola dla ustalonej wartości  $\eta$ ) są do siebie styczne; warunek (4.52).

Zastosowane tutaj prawo tłokowe bywa w zasadzie stosowane dla ponaddzwiękowych prędkości przepływu, jakkolwiek na przykład H. ASHLEY i C. ZARTARIAN [1] wspominają również o możliwości zastosowania dla pewnych przepływów poddźwiękowych. Jednakże nawet ograniczenie się do przepływów naddźwiękowych prawie nie zmniejsza ważności uzyskanych wyników. Tak na przykład przy prędkości strumienia  $U$  równej prędkości dźwięku w powietrzu  $c_0$  ( $U = c_0 = 331$  [m/sek]), wykładniku politropy powietrza  $\kappa = 1,5$ , module Younga dla stali  $E = 2 \cdot 10^6$  [kG/cm<sup>2</sup>], wymiarach pręta  $l = 10$  [cm],  $a = 1$  [cm] oraz  $b = 3$  [cm] otrzymujemy bezwymiarową prędkość dźwięku  $v = 0,03$ . Tak więc tylko odcinki krzywych  $0 < v < 0,03$  mogłyby ulec zmianie. W zastosowanych przez nas współrzędnych bezwymiarowych nie można jednak ustalić jednolitej granicy stosowalności prawa tłokowego, ponieważ zależy ona również na przykład od wymiarów pręta.

Wydaje się, że dalszy postęp w rozwiązywaniu postawionego zagadnienia powinien iść w kierunku zwiększenia dokładności i uogólnienia stosowanych praw opływu.

## Literatura cytowana w tekście

1. H. ASHLEY, C. ZARTARIAN, *Piston theory — a new aerodynamics tool for the aeroelastician*, J. Aeronaut. Sci., 12, 23 (1956), 1109-1118.
2. M. BECK, *Die Knicklast des eingeitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, Z. angew. Math. Physik, 3, 3 (1952), 225.
3. M. A. ВЮТ, *The divergence of supersonic wings including chord wise bending*, Report Nr 67, Cornell Aeronautical Laboratory, 1954.
4. A. BOBESZKO, J. KACPRZYŃSKI, S. KALISKI, *Vibration and stability of slender bodies in linearized supersonic flow*, Proc. Vibr. Probl., 4 (1959).
5. В. В. БОЛОТИН, *К вопросу об устойчивости пластинки в потоке сжимаемого газа*, Вопросы прочности материалов и конструкций, Изд. АН СССР, Москва 1959, 194-204.
6. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории устойчивости*, Физматгиз, Москва 1961.
7. H. K. CHENG, *A variational method for the differential system arising from aeroelastic problems*, dysertacja, Cornell University, 1950.
8. К. С. ДЕЙНЕКО, М. Я. ЛЕОНОВ, *Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня*, Прикл. Мат. Мех., 6, 19 (1955), 738-744.
9. W. H. DORRANCE, *Nonsteady supersonic flow about pointed bodies of revolution*, J.A.S., 8, 18 (1951), 505-511.
10. Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, *Об устойчивости стержня при действии следящей силы*, Труды Ленингр. Института № 192 (1958), 21-27.
11. J. M. HEDGERETH, *On the flutter of panels at high mach number*, J.A.S., 6, 23 (1956), 609-610.
12. J. M. HEDGERETH, *Flutter of rectangular simply supported panels at high supersonics speeds*, J.A.S., 8, 24 (1957), 563-573.
13. А. А. ИЛЬЮШИН, *Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей*, Прикл. Мат. Мех., 6, 20 (1956).
14. J. KACPRZYŃSKI, S. KALISKI, *Flutter odkształcalnej rakiety w opływie naddźwiękowym*, Biul. Wojsk. Akad. Techn. im. J. Dąbrowskiego, 8, 97 (1960), 3-19.
15. T. KÁRMÁN, M. А. ВЮТ, *Metody matematyczne w technice*, PWN, Warszawa 1958.
16. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czasop. Techn., 9, 65 (1959), 1-8.
17. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1963), 7-31.
18. Z. KORDAS, *Stateczność sprężyste utwierdzonego pręta w ogólnym przypadku zachowania się obciążenia*, Rozpr. Inż., 3, 11 (1963), 435-448.
19. J. W. MILES, *On the aerodynamic instability of thin panels*, J.A.S., 23 (1956).
20. А. А. МОВЧАН, *О колебаниях пластинки, движущейся в газе*, Прикл. Мат. Мех., 2, 20 (1956), 211-222.
21. А. А. МОВЧАН, *Об устойчивости панели, движущейся в газе*, Прикл. Мат. Мех., 2, 21 (1957), 231-243.
22. A. PFLÜGER, *Zur Stabilität des tangential gedrückten Stabes*, Z. Angew. Math. Mech., 5, 35 (1955), 191.
23. A. PFLÜGER, *Stabilitäts Probleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, 1950.
24. G. SEIFERT, *A third-order boundary value problem arising in aeroelastic wing theory*, Appl. Math., 2, 9 (1951).
25. H. ZIEGLER, *Ein nichtkonservatives Stabilitätsproblem*, Z. angew. Math. Mech., 8/9, 31 (1951), 265.
26. S. D. PONOMARIEW i inni, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, PWN, Warszawa 1957.

## Резюме

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ, ОБТЕКАЕМОГО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ, ПРИ УЧЕТЕ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Анализируется вопрос устойчивости односторонне защемленного стержня пластиночки, находящегося в параллельном потоке жидкости. В этом случае стержень загружен лобовой силой, а также боковыми силами, появляющимися после потери устойчивости прямолинейного положения равновесия.

Во введении работы дается краткий обзор литературы, касающейся анализа устойчивости элементов в потоке жидкости, констатируя, что этот вопрос рассматривался до сих пор довольно односторонне, рассматривая исключительно воздействие лобовое сопротивления, или исключительно воздействие боковых давлений.

Настоящая работа составляет попытку анализа проблемы устойчивости стержня при одновременном действии обеих нагрузок. Сущность работы состоит в анализе самой устойчивости стержня, тогда как величины гидродинамических сил определяются на основании теории плоских сечений [формула (2.1)].

В разделе втором приводятся принятые предположения и фундаментальное уравнение бесконечно малых поперечных колебаний обсуждаемого стержня [уравнение (2.5)].

В разделе третьем дается точный анализ полученного уравнения только лишь в области статического критерия.

В разделе четвертом рассматривается область, в которой обязывают кинетические критерии, применяя приближенный энергетический метод. В этом разделе для предположенной формы линии прогиба выводится уравнение предельной кривой в области, в которой обязывают статические и кинетические критерии устойчивости.

Затем проводится подробный анализ полученных уравнений, приводя форму предельных кривых в системе: безразмерная скорость потока  $v$  и безразмерное лобовое сопротивление  $s$  (рис. 8 и 9). На рис. 11 показана форма предельных кривых для различных значений параметра  $\eta$ , а на рис. 10 — для различных значений параметра  $\theta$ , характеризующего влияние скорости потока жидкости.

## Summary

## STABILITY OF BAR IN PARALLEL FLUID FLOW TAKING INTO CONSIDERATION THE FRONT DRAG

The above problem concerns a bar (plate) clamped at one end. The load is composed of a front drag and lateral load acting after the stability loss.

The introduction contains a brief survey of the literature concerning the stability analysis of elements in a fluid flow. It is found that this problem has hitherto been treated in an incomplete manner the front load or the lateral load being the only considered.

The present paper presents a tentative analysis of the stability problem of a bar under the combined load. The main stress is laid on the stability analysis, the magnitude of the hydraulic forces being determined on the grounds of the theory of plane sections (Eq. 2.1).

Sec. 2 contains the assumptions and the derivation of the fundamental equation small lateral vibration of the bar (Eq. 2.5). Sec. 3 is concerned with accurate stability analysis of the equation obtained in cases where the static criterion is sufficient. The range where the kinetic criterion is necessary is considered in Sec. 4. where the energy method is used. In this section the equation of the limit curve is obtained for an assumed form of the deflection line in the applicability range of the static and kinetic stability criterion.

Next, the equations obtained are analysed in detail by describing the form of the limit curves using as coordinates the dimensionless flow velocity  $\vartheta$  and the dimensionless front drag  $s$  (Figs. 8, 9). Fig. 11 shows the form of the limit curves for various values of the "follow-up" parameter  $\eta$  and Fig. 10 — for various values of the parameter  $\theta$ , characterizing the influence of the convection velocity of flow.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 grudnia 1963 r.*