ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 13 (1965)

UWAGI O MAŁYM DODATKOWYM RUCHU W PRZESTRZENNYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W poprzedniej pracy [1], poświęconej zagadnieniom nałożenia małego dodatkowego ruchu na ruch podstawowy ośrodka hygrosterycznego oraz zastosowaniom proponowanej metody do badania stateczności ruchu podstawowego, korzystaliśmy z pojęcia konwekcyjnego układu współrzędnych, tj. układu poruszającego się i deformującego się razem z badanym ośrodkiem (por. [2 i 3]). Korzystanie z układu konwekcyjnego pozwala przedstawiać różne zależności kinematyczne w stosunkowo prostej postaci, a w licznych przykładach stanowi jedyną efektywną drogę rozwiązania. Oczywiście możliwe jest przedstawianie odpowiednich wzorów w innych układach odniesienia, jak np. w nieruchomym układzie współrzędnych przestrzennych (por. np. [4]), który pozwala bezpośrednio porównywać wielkości zmienne w czasie, wyznaczać trajektorie ruchu poszczególnych cząstek itp.

W niniejszej pracy podajemy podstawowe zależności dla małego ruchu nałożonego na ruch podstawowy opisany w przestrzennym układzie współrzędnych. Przyjęty system oznaczeń jest zgodny z pracą [1].

Przypominamy, że w szczególności małe litery z łacińskimi indeksami oznaczają składowe tensorów i wektorów, małe litery półgrube oznaczają wektory, wielkości zaś ze znakiem «prim» odnoszą się do odpowiednich przyrostów. Pochodną cząstkową oznaczono przecinkiem u dołu.

2. Podstawowe zależności kinematyczne

Położenie P cząstki w przestrzeni fizycznej w dowolnej chwili czasu t określone jest przez układ współrzędnych przestrzennych x^i z wektorami bazy $\mathbf{g}_i$ i tensorem metrycznym g_{ij}. Jeśli położenie cząstki $\mathring{P}$ w ustalonym czasie t_0 określone jest przez układ współrzędnych materialnych X^A, to równania w postaci

$$x^i = x^i (X^A, t), \qquad X^A = X^A (x^i, t), \tag{2.1}$$

opisują ruch cząstki materialnej w przestrzeni fizycznej reprezentowanej przez układ x^i oraz pozwalają traktować każdą funkcję cząstki materialnej i czasu jako funkcję zmiennych x^i, t.

Nakładając na ruch podstawowy cząstki w położeniu P mały dodatkowy ruch określony przez wektor przemieszczenia $\eta\mathbf{w}$ mamy

$$\mathbf{r}' = \overset{*}{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = \eta\mathbf{w}, \tag{2.2}$$

przy czym η jest parametrem, którego kwadraty i wyższe potęgi pomijamy wobec η (por. [1 i 3]).

W nowym miejscu $\overset{*}{P}$ wektory bazy $\overset{*}{\mathbf{g}}_i(x^k, t)$ i $\overset{*}{\mathbf{g}}{}^i(x^k, t)$ różnią się od odpowiednich wektorów w miejscu P o przyrosty:

$$\mathbf{g}_i' = \mathbf{g}_{i,r}w^r = \mathbf{g}_s\begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix}w^r, \qquad \mathbf{g}'^i = \mathbf{g}^i_{,r}w^r = \mathbf{g}^s\begin{Bmatrix} i \\ sr \end{Bmatrix}w^r. \tag{2.3}$$

Odpowiednie przyrosty tensorów metrycznych i symboli Christoffela przyjmą zatem postać

$$\begin{aligned}
g_{ij}' &= g_{ij,r}w^r = \left(\begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix}g_{sj} + \begin{Bmatrix} s \\ rj \end{Bmatrix}g_{is}\right)w^r = [ir, j]\,w^r + [rj, i]\,w^r,\\
g'^{ij} &= g^{ij}_{,r}w^r = -\left(\begin{Bmatrix} i \\ sr \end{Bmatrix}g^{sj} + \begin{Bmatrix} j \\ sr \end{Bmatrix}g^{is}\right)w^r,\\
[ij, k]' &= \tfrac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})_{,r}\,w^r,\\
\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}' &= \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_{,r}w^r = g^{ks}[ij, s]' + g'^{ks}[ij, s].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Promienie wektory $\overset{*}{\mathbf{r}}$ i $\mathbf{r}$ wyznaczają położenie cząstki materialnej w fizycznej przestrzeni odniesienia, zatem absolutną prędkość cząstki w miejscu $\overset{*}{P}$ określamy z zależności

$$\overset{*}{\mathbf{v}} = \dot{\overset{*}{\mathbf{r}}} = \mathbf{v} + \eta\dot{\mathbf{w}}, \tag{2.5}$$

przy czym $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, kropka zaś oznacza symbol różniczkowania materialnego względem czasu. Składowe prędkości otrzymamy w postaci

$$\begin{aligned}
\overset{*}{v}{}^i &= \overset{*}{\mathbf{v}}\cdot\overset{*}{\mathbf{g}}{}^i = v^i + \eta\left(\dot{w}^i - v^s\begin{Bmatrix} i \\ sr \end{Bmatrix}w^r\right),\\
\overset{*}{v}_i &= \overset{*}{\mathbf{v}}\cdot\overset{*}{\mathbf{g}}_i = v_i + \eta\left(\dot{w}_i + v_s\begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix}w^r\right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Po uwzględnieniu definicji pochodnej materialnej w przestrzennym układzie odniesienia (por. [4 i 1]), mianowicie

$$\dot{\varphi}^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,j\,\cdot\,\cdot} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,j\,\cdot\,\cdot} + v^r\nabla_r\varphi^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,j\,\cdot\,\cdot}, \tag{2.7}$$

mamy np.

$$v'^i = \frac{\partial}{\partial t} w^i + v^r \nabla_r w^i - v^s \begin{Bmatrix} i \\ sr \end{Bmatrix} w^r, \tag{2.8}$$

gdzie symbol $\partial/\partial t$ oznacza pochodną cząstkową względem czasu dla $x^i = \text{const}$.

W myśl definicji przyśpieszenia (por. [4])

$$\overset{*}{\dot{\mathbf{v}}} = \overset{*}{\ddot{\mathbf{r}}} = \dot{\mathbf{v}} + \ddot{\mathbf{w}}; \tag{2.9}$$

postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy

$$\begin{aligned} \overset{*}{\dot{v}}{}^i &= \dot{v}^i + \eta \left(\ddot{w}^i - \dot{v}^s \begin{Bmatrix} i \\ sr \end{Bmatrix} w^r \right), \\ \overset{*}{\dot{v}}_i &= \dot{v}_i + \eta \left(\ddot{w}_i + \dot{v}_s \begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix} w^r \right), \end{aligned} \tag{2.10}$$

a w szczególności

$$\begin{aligned} \dot{v}'^i = \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_r w^i) v^r + \frac{\partial v^r}{\partial t} \nabla_r w^i + v^r \nabla_r \left(\frac{\partial w^i}{\partial t} \right) + v^r v^s \nabla_r \nabla_s w^i + \\ + v^r \nabla_r v^s \nabla_s w^i - \left(\frac{\partial v^s}{\partial t} + v^r \nabla_r v^s \right) \begin{Bmatrix} i \\ sp \end{Bmatrix} w_p. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Obliczenie przyśpieszeń wyższych rzędów nie przedstawia istotnych trudności.

Składowe gradientu prędkości w nowym położeniu $\overset{*}{P}$ określamy z zależności

$$\overset{*}{q}_{ij} = q_{ij} + \eta q'_{ij} = \overset{*}{\mathbf{v}}_{,i} \cdot \overset{*}{\mathbf{g}}_j = \mathbf{v}_{,i} \cdot \mathbf{g}_j + \eta (\mathbf{v}_{,ir} \cdot \mathbf{g}_j w^r + \dot{\mathbf{w}}_{,i} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{v}_{,i} \cdot \mathbf{g}'_j). \tag{2.12}$$

Wykonując odpowiednie operacje oraz uwzględniając (2.3) otrzymamy

$$\overset{*}{q}_{ij} = \nabla_i v_j + \eta \left(\nabla_i \dot{w}_j + \nabla_i v_s \begin{Bmatrix} s \\ jr \end{Bmatrix} w^r + \nabla_s v_j \begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix} w^r + \nabla_r \nabla_i v_j w^r \right). \tag{2.13}$$

Zgodnie z definicjami tensora prędkości odkształcenia i tensora spinu [4 i 5], mianowicie

$$d_{ij} = \tfrac{1}{2} (q_{ij} + q_{ji}) = \nabla_{(i} v_{j)}, \qquad w_{ij} = \tfrac{1}{2} (q_{ij} - q_{ji}) = \nabla_{[i} v_{j]}, \tag{2.14}$$

otrzymamy odpowiednie przyrosty tych wielkości w postaci następującej:

$$d'_{ij} = \nabla_{(i} \dot{w}_{j)} + d_{ij,r} w^r, \qquad \omega'_{ij} = \nabla_{[i} \dot{w}_{j]} + \omega_{ij,r} w^r. \tag{2.15}$$

Przy obliczaniu składowych mieszanych przyrostów d'^i_j i $\omega'^{\;i}_{.j}$ należy pamiętać, że podwyższania indeksów należy dokonywać w miejscu $\overset{*}{P}$ za pomocą tensora $\overset{*}{g}{}^{ij}$, np.

$$\overset{*}{d}{}^i_j = d^i_j + \eta d'^i_j = \overset{*}{d}_{kj} \overset{*}{g}{}^{ik}, \qquad d'^i_j = d'_{kj} g^{ik} + d_{kj} g'^{ik}. \tag{2.16}$$

3. Równania ciągłości i prawa ruchu Cauchy'ego

Podstawiając do równania ciągłości [1 i 5] w postaci

$$(3.1)\qquad \dot{\varrho}+\varrho d^k_k = 0, \qquad d^k_k = \nabla_k v^k = \operatorname{div} \mathbf{v},$$

odpowiednie wielkości w położeniu $\overset{*}{P}$ (przy czym przyrost gęstości ośrodka ϱ wynosi $\eta\varrho'$) otrzymany po uwzględnieniu (2.15) i (2.16) równanie

$$(3.2)\qquad \dot{\varrho}'+\varrho' d^k_k+\varrho d'^k_k = 0, \qquad d'^k_k = \nabla_k \dot{w}^k + \nabla_r w^r d^k_k.$$

Dla ośrodków nieściśliwych ($\varrho = \text{const}$, $\varrho' = 0$, $d^k_k = 0$) równanie (3.2) przyjmie postać następującą:

$$(3.3)\qquad d'^k_k = 0, \qquad \nabla_k \dot{w}^k = 0.$$

Prawa ruchu Cauchy'ego (równania równowagi, por. [4, 2 i 1] piszemy w postaci

$$(3.4)\qquad \nabla_k s^{ik}+\varrho f^i = \varrho \dot{v}^i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

w której s^{ij} oznacza symetryczny tensor naprężenia, a f^i składową siły masowej przypadającej na jednostkę masy ośrodka.

Jeśli w nowym położeniu $\overset{*}{P}$ tensorowi naprężenia odpowiada przyrost $\eta s'^{ij}$, siła masowa zmienia się o $\eta f'^i$, a przyrost przyśpieszenia określony jest przez (2.10), to po uwzględnieniu (2.4) i zależności

$$(3.5)\qquad \overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{s}{}^{ik} = \nabla_k s^{ik}+\eta \left(s^{ik}{}_{,kr} w^r+\nabla_k s'^{ik} + \begin{Bmatrix} i \\ rk \end{Bmatrix}' s^{rk} + \begin{Bmatrix} k \\ rk \end{Bmatrix}' s^{ir} \right),$$

otrzymamy dla przyrostów następujące równania:

$$(3.6)\qquad \nabla_k s'^{ik}+(\nabla_k s^{ik})_{,r} w^r+\varrho f'^i+ \varrho' f^i = \varrho \left(\ddot{w}^i - \dot{v}^s \begin{Bmatrix} i \\ sr \end{Bmatrix} w^r \right) + \varrho' \dot{v}^i.$$

Przy zerowych siłach masowych dla ruchu podstawowego jednostajnego lub jednostajnie przyśpieszonego lewa strona równań (3.6) zawiera tylko przyrosty tensora naprężenia.

Odpowiedni związek między przyrostem powierzchniowego wektora naprężenia a przyrostem tensora naprężenia przyjmie postać

$$(3.7)\qquad s'^i_{(n)} = s'^{ik} n_k+s^{ik} n'_k,$$

gdzie n_k są to składowe jednostkowego wektora normalnego do powierzchni, a n'_k oznacza ich przyrosty w miejscu $\overset{*}{P}$.

4. Związki fizyczne

Związki fizyczne dla przyrostów otrzymujemy podstawiając do równań konstytutywnych odpowiednie wielkości w nowym położeniu $\overset{*}{P}$. Dla materiałów hygrosterycznych[1] równania konstytutywne można napisać w postaci [1 i 5]

$$(4.1)\qquad \hat{t}^i_j = \mathcal{F}^i_j (t^r_s, d^r_s, \varrho), \qquad \hat{t}^i_j \overset{\text{df}}{=} \dot{t}^i_j+t^i_r \omega^r_{\cdot j} - \omega^i_{\cdot r} t^r_j,$$

[1] W myśl definicji W. Nolla z 1955 r. [5].

gdzie $t^i_j = s^i_j + p\delta^i_j$ oznacza ekstra-naprężenie, p ciśnienie hydrostatyczne, $\hat{t}^i_j$ pochodną Zaremby-Jaumanna tensora ekstra-naprężenia, zaś $\mathcal{F}^i_j$ funkcjonał konstytutywny charakteryzujący rozważany ośrodek.

Podstawiając do równań (4.1) wielkości $\overset{*}{t}{}^i_j$, $\overset{*}{d}{}^i_j$, $\overset{*}{\omega}{}^{i}_{.j}$, $\overset{*}{\varrho}$ w położeniu $\overset{*}{P}$ otrzymamy po pominięciu małych wyższych rzędów

$$(\hat{t}^i_j)' = \mathcal{F}'^i_j(t^r_s, d^r_s, \varrho; t'^r_s, d'^r_s\,\varrho'), \tag{4.2}$$

przy czym

$$(\hat{t}^i_j)' = (\overset{*}{t}{}^i_j)' + t'^i_r\,\omega^r_{.j} + t^i_r\,\omega'^r_{.j} - \omega'^i_{.r}\,t^r_j - \omega^i_{.r}\,t'^r_j, \tag{4.3}$$

$$(\overset{*}{t}{}^i_j)' = \frac{\partial t'^i_j}{\partial t} + v^r\,\nabla_r\,t'^i_j + \nabla_r\,t^i_j\left(\dot{w}^r - v^s\begin{Bmatrix} r \\ sn \end{Bmatrix} w^n\right) + (\nabla_r\,t^i_j)_{,s}\,w^s\,v^r. \tag{4.4}$$

W szczególności np. dla nieściśliwych materiałów hiposprężystych stopnia pierwszego [5], których równanie konstytutywne ma postać

$$\hat{t}^i_j = \alpha_0\,t^r_r\,d^i_j + \alpha_1\,d^i_j + \alpha_2\,(t^i_r\,d^r_j + d^i_r\,t^r_j) + \alpha_3\,t^r_s\,d^s_r\,\delta^i_j, \tag{4.5}$$

gdzie α_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ są to stałe materiałowe, w myśl (4.2) otrzymamy

$$(\hat{t}^i_j)' = \alpha_0\,t^r_r\,d'^i_j + \alpha_0\,t'^r_r\,d^i_j + \alpha_1\,d'^i_j + \alpha_2\,(t'^i_r\,d^r_j + d^i_r\,t'^r_j) + \alpha_2\,(t^i_r\,d'^r_j + d'^i_r\,t^r_j) + \alpha_3\,(d'^r_s\,t^s_r + d^r_s\,t'^s_r)\,\delta^i_j. \tag{4.6}$$

Literatura cytowana w tekście

1. S. Zahorski, *Some problems of motion and stability for hygrosteric materials*, Arch. Mech. Stos., 6, **15** (1963), 915-940.

2. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

3. Guo Zhong-heng, *A contribution to the theory of variated states of finite strain*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 4, **10** (1962), 129-133.

4. C. Truesdell, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. Anal., **1** (1952), 125-300.

5. W. Noll, *On the continuity of the solid and fluid states*, J. Rat. Mech. Anal., **4** (1955), 13-81.

Резюме

ПРИМЕЧАНИЯ О МАЛОМ ДОБАВОЧНОМ ДВИЖЕНИИ, ВЫРАЖЕННЫМ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ

Приводится дискуссия, касающаяся некоторых кинематических и физических зависимости для малого движения, наложенного на основное движение, определенное в неподвижной системе отсчета.

Работа является дополнением предыдущей работы [1], в которой рассматривается подобная проблема в конвекционной системе.

Summary

SOME REMARKS ON A SMALL SUPERPOSED MOTION IN A SPATIAL SET OF COORDINATES

Several kinematic and physical relations are discussed for a small motion superposed over a fundamental motion in a fixed spatial reference frame.

The present paper constitutes a complement to the previous work of the same author [1], in which similar problems are treated in a convected set of coordinates.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 sierpnia 1963 r.