

LEPKOSPREŻYSTY PRĘT KOŁOWY NA PODŁOŻU
O DWUKIERUNKOWEJ CHARAKTERYSTYCE LEPKOSPREŻYSTEJ

BOGDAN SKALMIERSKI, ANDRZEJ TYLIKOWSKI (GLIWICE)

W pracy rozpatrzono problem przemieszczeń kołowego pręta lepkospreżystego, spoczywającego na ortotropowym podłożu lepkospreżystym, pod wpływem zewnętrznego obciążenia stycznego. Zagadnienie rozwiązano stosując analogię sprężysto-lepkospreżystą oraz transformację Laplace'a i skończoną transformację Fouriera. Problem potraktowano zarówno z punktu widzenia quasi-statyki jak i dynamiki. Rozpatrzono dokładnie przypadek mający szerokie zastosowanie techniczne, mianowicie obciążenie w postaci skupionej siły wędrującej. Do obliczeń przyjęto model reologiczny Voigta. Wykonano obliczenia numeryczne dla przypadku quasi-statycznego, na podstawie których sporządzono wykresy ilustrujące ugięcia pręta. Na zakończenie omówiono przypadek obciążenia dowolnego opierając się na zasadzie superpozycji, tzn. rozkładając obciążenie zewnętrzne na składową promieniową i styczną.

1. Rozwiązanie zagadnienia zginania pręta kołowego obciążonego siłami stycznymi

Punktem wyjścia rozważań są równania różniczkowe zginanego pręta [2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{AE}{R^2} \left(\frac{d^2 V(\varphi, t)}{d\varphi^2} + \frac{dW(\varphi, t)}{d\varphi} \right) - \frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^3 W(\varphi, t)}{d\varphi^3} - \frac{d^2 V(\varphi, t)}{d\varphi^2} \right) + p^*(\varphi, t) &= 0, \\ - \frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^4 W(\varphi, t)}{d\varphi^4} - \frac{d^3 V(\varphi, t)}{d\varphi^3} \right) - \frac{AE}{R^2} \left(\frac{dV(\varphi, t)}{d\varphi} + W(\varphi, t) \right) + q^*(\varphi, t) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie E oznacza moduł sprężystości materiału pręta, A pole przekroju poprzecznego, I moment bezwładności przekroju poprzecznego, R promień krzywizny pierwotnej osi pręta, W ugięcie promieniowe mierzone na zewnątrz od osi pierwotnej pręta oraz V odkształcenie podłużne mierzone w kierunku dodatnim.

Traktując problem jako quasi-statyczny obciążenie określamy w następujący sposób:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} q^*(\varphi, t) &= -k_1 W(\varphi, t), \\ p^*(\varphi, t) &= p(\varphi, t) - k_2 V(\varphi, t). \end{aligned}$$

We wzorze powyższym $p(\varphi, t)$ jest zewnętrznym obciążeniem stycznym, a k_1 i k_2

są stałymi sprężystymi podłoża, na którym spoczywa pręt, odpowiednio w kierunku promieniowym i stycznym.

Wstawmy (1.2) do (1.1); po rozwiązaniu tych równań względem funkcji przemieszczenia $W(\varphi, t)$ i $V(\varphi, t)$ otrzymujemy

$$(1.3) \quad \Omega_\varphi W(\varphi, t) = \frac{R^4}{EI} \frac{dp(\varphi, t)}{d\varphi} - \frac{R^2}{AE} \frac{d^3 p(\varphi, t)}{d\varphi^3},$$

$$\Omega_\varphi V(\varphi, t) = -\frac{R^2}{AE} \frac{d^4 p(\varphi, t)}{d\varphi^4} - \frac{R^4}{EI} \left(1 + \frac{k_1 R^2}{AE}\right) p(\varphi, t),$$

gdzie

$$(1.4) \quad \Omega_\varphi = \frac{d^6}{d\varphi^6} + \left(2 - \frac{k_2 R^2}{AE}\right) \frac{d^4}{d\varphi^4} + \\ + \left[1 + \frac{k_1}{E} \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] \frac{d^2}{d\varphi^2} - \frac{k_2 R^4}{EI} \left(1 + \frac{k_1 R^2}{AE}\right).$$

Wykonując transformację Laplace'a oraz korzystając z analogii sprężysto-lepkosprężystej uzyskamy transformowane równania dla pręta lepkosprężystego na podłożu lepkosprężystym:

$$(1.5) \quad \bar{\Omega}_\varphi(s) \bar{W}(\varphi, s) = \frac{R^4}{I\bar{E}(s)} \frac{d\bar{p}(\varphi, s)}{d\varphi} - \frac{R^2}{A\bar{E}(s)} \frac{d^3 \bar{p}(\varphi, s)}{d\varphi^3},$$

$$\bar{\Omega}_\varphi(s) \bar{V}(\varphi, s) = -\frac{R^2}{A\bar{E}(s)} \frac{d^4 \bar{p}(\varphi, s)}{d\varphi^4} - \frac{R^4}{I\bar{E}(s)} \left(1 + \frac{\bar{k}_1(s) R^2}{A\bar{E}(s)}\right) \bar{p}(\varphi, s),$$

gdzie

$$\bar{\Omega}_\varphi(s) = \frac{d^6}{d\varphi^6} + \left(2 - \frac{\bar{k}_2(s) R^2}{A\bar{E}(s)}\right) \frac{d^4}{d\varphi^4} + \\ + \left[1 + \frac{\bar{k}_1(s)}{\bar{E}(s)} \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right)\right] \frac{d^2}{d\varphi^2} - \frac{\bar{k}_2(s) R^4}{I\bar{E}(s)} \left(1 + \frac{\bar{k}_1(s) R^2}{A\bar{E}(s)}\right).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\bar{a}(s) = 2 - \frac{\bar{k}_2(s) R^4}{I\bar{E}(s)}, \quad \bar{b}(s) = 1 + \frac{\bar{k}_1(s)}{\bar{E}(s)} \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A}\right),$$

$$\bar{c}(s) = -\frac{\bar{k}_2(s) R^4}{I\bar{E}(s)} \left(1 + \frac{\bar{k}_1(s) R^2}{A\bar{E}(s)}\right)$$

nadamy operatorowi $\Omega_\varphi(s)$ postać

$$\bar{\Omega}_\varphi(s) = \frac{d^6}{d\varphi^6} + \bar{a}(s) \frac{d^4}{d\varphi^4} + \bar{b}(s) \frac{d^2}{d\varphi^2} + \bar{c}(s).$$

Obecnie wykonamy na równaniach (1.5) skończoną transformację Fouriera [3]. W przypadku gdy końce pręta zamocowane są przegubowo z możliwością jedynie stycznego przesunięcia, wyrazy dodatkowe skończonej transformacji Fouriera zni-

kają, a układ równań różniczkowych sprowadza się do układu równań algebraicznych:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}(s) [-\mu_n^6 + \bar{a}(s)\mu_n^4 - \bar{b}(s)\mu_n^2 + \bar{c}(s)] S[\bar{W}(\varphi, s)] = & - \\
 & - \left(\frac{R^4}{I} \mu_n + \frac{R^2}{A} \mu_n^3 \right) C[\bar{p}(\varphi, s)], \\
 (1.6) \quad \bar{E}(s) [-\mu_n^6 + \bar{a}(s)\mu_n^4 - \bar{b}(s)\mu_n^2 + \bar{c}(s)] C[\bar{V}(\varphi, s)] = & - \\
 & - \left[\frac{R^2}{A} \mu_n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\bar{k}_1(s) R^2}{A\bar{E}(s)} \right) \right] C[\bar{p}(\varphi, s)],
 \end{aligned}$$

gdzie $S[f(\varphi)]$ i $C[f(\varphi)]$ są odpowiednio skończonymi sinusowymi i kosinusowymi transformacjami funkcji $f(\varphi)$, μ_n jest wartością własną rozpatrywanego zagadnienia równą $n\pi/\varphi_0$:

$$\begin{aligned}
 S[\bar{W}(\varphi, s)] = & \frac{\mu_n \left(\frac{R^2}{A} \mu_n^2 + \frac{R^4}{I} \right) C[\bar{p}(\varphi, s)]}{\bar{E}(s) [\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)]}, \\
 (1.7) \quad C[\bar{V}(\varphi, s)] = & \frac{\left[\frac{R^2}{A} \mu_n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\bar{k}_1(s) R^2}{A\bar{E}(s)} \right) \right] C[\bar{p}(\varphi, s)]}{\bar{E}(s) [\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)]}.
 \end{aligned}$$

Wykonując odwrotną transformację Fouriera otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \bar{W}(\varphi, s) = & \frac{2}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{\mu_n \left[\frac{R^2}{A} \mu_n^2 + \frac{R^4}{I} \right] \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} C[\bar{p}(\varphi, s)]}{\bar{E}(s) [\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)]}, \\
 (1.8) \quad \bar{V}(\varphi, s) = & \frac{2}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{\left[\frac{R^2}{A} \mu_n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\bar{k}_1(s) R^2}{A\bar{E}(s)} \right) \right] \cos \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} C[\bar{p}(\varphi, s)]}{\bar{E}(s) [\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)]},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jeśli } n = 0, \\ 1, & \text{jeśli } n > 0. \end{cases}$$

Pozostają teraz do wyznaczenia funkcje $W(\varphi, t)$ i $V(\varphi, t)$. W tym celu wykonujemy na równaniach (1.8) odwrotną transformację Laplace'a wykorzystując twierdzenie o splocie. Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 (1.9) \quad G_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_n \left(\frac{R^2}{A} \mu_n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{\bar{E}(s) [\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)]} \right\}, \\
 H_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{R^2}{A} \mu_n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\bar{k}_1(s) R^2}{A\bar{E}(s)} \right)}{\bar{E}(s) [\mu_n^6 - \bar{a}(s)\mu_n^4 + \bar{b}(s)\mu_n^2 - \bar{c}(s)]} \right\},
 \end{aligned}$$

otrzymujemy następujący wynik po dokonaniu wspomnianej transformaty:

$$(1.10) \quad W(\varphi, t) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \int_0^t G_n(t-\tau) C[p(\varphi, \tau)] d\tau,$$

$$V(\varphi, t) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \int_0^t H_n(t-\tau) C[p(\varphi, \tau)] d\tau,$$

gdzie

$$(1.11) \quad C[p(\varphi, \tau)] = \int_0^{\varphi_0} p(u, \tau) \cos \frac{n\pi u}{\varphi_0} du.$$

Podstawiając (1.11) do (1.10) otrzymujemy

$$(1.12) \quad W(\varphi, t) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \int_0^t G_n(t-\tau) \left[\int_0^{\varphi_0} p(u, \tau) \cos \frac{n\pi u}{\varphi_0} du \right] d\tau,$$

$$V(\varphi, t) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \int_0^t H_n(t-\tau) \left[\int_0^{\varphi_0} p(u, \tau) \cos \frac{n\pi u}{\varphi_0} du \right] d\tau.$$

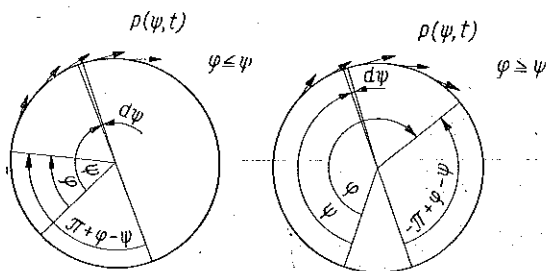
Przyjmując we wzorach (1.12) $\varphi_0 = \pi$ mamy przypadek półpierścienia. Rozwiązanie dla półpierścienia będzie zarazem rozwiązaniem dla całego pierścienia pod warunkiem, że funkcja obciążeń stycznych $p(\varphi, t)$ jest parzystą względem φ . W celu uwolnienia się od tego założenia dla pierścienia zamkniętego obciążamy go siłą $P = 1$ w punkcie $\varphi = \pi$. Obciążenie to przedstawimy za pomocą dystrybucji Diraca

$$(1.13) \quad p(u, \tau) = \frac{1}{2R} \delta(u - \pi) \delta(\tau).$$

Obliczone w ten sposób przemieszczenia oznaczamy $W^{(1)}$ i $V^{(1)}$:

$$(1.14) \quad W^{(1)} = \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-1)^n \sin n\varphi G_n(t),$$

$$V^{(1)} = \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-1)^n \cos n\varphi H_n(t).$$



Rys. 1

Przenosząc punkt przyłożenia siły P z położenia $\varphi = \pi$ do punktu określonego współrzędną ψ (rys. 1) oraz zważywszy że

$$\begin{aligned} \cos n(\pi + \varphi - \psi) &= \\ &= (-1)^n \cos n(\varphi - \psi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin n(\pi + \varphi - \psi) &= \\ &= (-1)^n \sin n(\varphi - \psi), \end{aligned}$$

na podstawie $W^{(1)}$ i $V^{(1)}$ wyznaczamy funkcję wpływu:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} W(\psi, \tau, \varphi, t) &= \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \sin n(\varphi - \psi) G_n(t - \tau), \\ V(\psi, \tau, \varphi, t) &= \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos n(\varphi - \psi) H_n(t - \tau). \end{aligned}$$

Mając wyznaczone funkcje wpływu można określić odkształcenia pręta pod wpływem dowolnego obciążenia zewnętrznego na podstawie następujących formuł całkowych:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} W(\varphi, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) G_n(t - \tau) \sin n(\varphi - \psi) d\psi d\tau, \\ V(\varphi, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) H_n(t - \tau) \cos n(\varphi - \psi) d\psi d\tau. \end{aligned}$$

2. Przypadek $\bar{k}_1(s) = \alpha_1 \bar{E}(s)$, $\bar{k}_2(s) = \alpha_2 \bar{E}(s)$

Przy takich założeniach, na podstawie (1.9) otrzymujemy

$$(2.1) \quad \begin{aligned} G_n(t) &= \frac{n \left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{E_0 \Omega_{1n}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E_0}{\bar{E}(s)} \right\}, \\ H_n(t) &= \frac{\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)}{E_0 \Omega_{1n}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E_0}{\bar{E}(s)} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Omega_{1n} = n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A} \right) n^4 + \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right).$$

Zgodnie z [1] dla modelu Voigta przy uwzględnieniu warunku nieściśliwości mamy

$$\frac{E_0}{\bar{E}(s)} = \frac{1}{1 + \lambda s}.$$

Wykonując odwrotną transformację otrzymamy

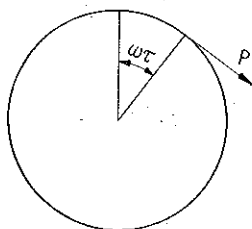
$$(2.2) \quad \begin{aligned} G_n(t) &= \frac{n \left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{E_0 \lambda \Omega_{1n}} e^{-t/\lambda}, \\ H_n(t) &= \frac{\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)}{E_0 \lambda \Omega_{1n}} e^{-t/\lambda}. \end{aligned}$$

Wstawiając (2.2) do (1.16) uzyskujemy ogólne rozwiązanie dla modelu Voigta:

$$(2.3) \quad W(\varphi, t) = \frac{1}{\pi E_0 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{n \left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{\Omega_{1n}} \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \sin n(\varphi - \psi) d\psi d\tau,$$

$$V(\varphi, t) = \frac{1}{\pi E_0 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)}{\Omega_{1n}} \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \times$$

$$\times \cos n(\varphi - \psi) d\psi d\tau.$$



Rys. 2

3. Przypadek wędrującej siły stycznej

Rozpatrzmy przypadek, gdy siła wędruje z prędkością v po obwodzie koła będącego osią pręta (rys. 2). Zagadnienie w tym przypadku sprowadza się do obliczenia całek we wzorach (2.3), gdy

$$(3.1) \quad p(\psi, \tau) = \frac{P_0}{R} \delta(\psi - \omega\tau), \quad \omega = \frac{V}{R}.$$

Wstawiając (3.1) do (2.3) otrzymujemy

$$(3.2) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi R E_0 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n n \left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{\Omega_{1n}} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \sin n(\varphi - \omega\tau) d\tau,$$

$$V(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi R E_0 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \left[\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right) \right]}{\Omega_{1n}} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \cos n(\varphi - \omega\tau) d\tau.$$

Wykonując całkowanie uzyskujemy wynik dla tego szczególnego przypadku obciążenia:

$$(3.3) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi E_0 R} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n n \left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A} \right) n^4 + \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda \omega n + \frac{1}{\lambda \omega n}} \left[\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 V(\varphi, t) = & \frac{p_0}{\pi E_0 R} \times \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \left[\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right) \right]}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A} \right) n^4 + \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)} \times \\
 & \times \frac{1}{\lambda \omega n + \frac{1}{\lambda \omega n}} \left[\frac{1}{\lambda \omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \times \right. \\
 & \left. \times \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right],
 \end{aligned}$$

4. Zagadnienie dynamiczne

Zagadnienie dynamiczne pręta lepkospreżystego można rozwiązać w sposób analogiczny. W równaniach (1.2) należy uwzględnić składniki reprezentujące siły bezwładności

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad q^*(\varphi, t) = & -k_1 W(\varphi, t) - A\varrho \frac{d^2 W(\varphi, t)}{dt^2}, \\
 p^*(\varphi, t) = & p(\varphi, t) - k_2 V(\varphi, t) - A\varrho \frac{d^2 V(\varphi, t)}{dt^2},
 \end{aligned}$$

gdzie ϱ oznacza gęstość materiału pręta.

Będziemy rozpatrywać jedynie wpływ sił bezwładności na drgania promieniowe. Pomijamy zatem wpływ dynamicznych sił podłużnych, tak jak to zresztą czyni się powszechnie w teorii drgań. Błąd popełniany w ten sposób jest znikomy, gdyż energia drgań podłużnych jest mała w stosunku do energii drgań poprzecznych.

Podstawiając (4.1) do (1.1) rozwiązujemy układ ze względu na $W(\varphi, t)$:

$$(4.2) \quad \Omega W(\varphi, t) = \frac{R^4}{IE} \frac{dp(\varphi, t)}{d\varphi} - \frac{R^2}{AE} \frac{d^3 p(\varphi, t)}{d\varphi^3},$$

gdzie

$$\Omega = \Omega_{1\varphi} \frac{A\varrho^2 R^6}{IE^2} \frac{d^4}{dt^4} - \frac{\Omega_{2\varphi}}{E} \frac{d^2}{dt^2}.$$

We wzorze powyższym $\Omega_{1\varphi}$ jest określone równaniem (1.4),

$$\Omega_{2\varphi} = A\varrho \left[\frac{R^2}{A} \frac{d^4}{d\varphi^4} - \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{(k_1 + k_2) R^6}{AIE} + \frac{R^4}{I} \right].$$

Wykonując transformację Laplace'a na równaniu uwzględniającym siły bezwładności w czasie ruchu pręta oraz stosując analogię sprężysto-lepkospreżystą przy założeniu zerowych warunków początkowych

$$W(\varphi, 0) = 0, \quad \dot{W}(\varphi, 0) = 0,$$

znajdziemy

$$(4.3) \quad \bar{\Omega}(s) \bar{W}(\varphi, s) = \frac{R^4}{IE(s)} \frac{d\bar{p}(\varphi, s)}{d\varphi} - \frac{R^2}{AE(s)} \frac{d^3 \bar{p}(\varphi, s)}{d\varphi^3}.$$

Wykonując następnie skończoną transformację Fouriera przy tych samych warunkach brzegowych jak w przypadku równań (1.5) otrzymujemy

$$(4.4) \quad \bar{\Omega}_n(s) S [\bar{W}(\varphi, s)] = C [\bar{p}(\varphi, s)] \left[\frac{R^4}{I} \mu_n + \frac{R^2}{A} \mu_n^3 \right] \frac{1}{\bar{E}(s)},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_n(s) &= \bar{\Omega}_{1n}(s) + \frac{A \rho^2 R^6}{I \bar{E}(s)^2} s^4 + \frac{\bar{\Omega}_{2n}(s)}{\bar{E}(s)} s^2, \\ \bar{\Omega}_{1n}(s) &= \mu_n^6 - \bar{a}(s) \mu_n^4 + \bar{b}(s) \mu_n^2 - \bar{c}(s), \\ \bar{\Omega}_{2n}(s) &= A \rho \left[\frac{R^2}{A} \mu_n^4 + \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \mu_n^2 + \frac{\bar{k}_1(s) + \bar{k}_2(s)}{A I \bar{E}(s)} R^6 + \frac{R^4}{I} \right]. \end{aligned}$$

Po wykonaniu odwrotnej transformacji Fouriera otrzymujemy wzór:

$$(4.5) \quad \bar{W}(\varphi, s) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \left(\frac{R^4}{I} \mu_n + \frac{R^2}{A} \mu_n^3 \right) \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} C [\bar{p}(\varphi, s)]}{\bar{E}(s) \bar{\Omega}_{1n}(s) + \frac{A \rho^2 R^6}{I \bar{E}(s)} s^4 + \bar{\Omega}_{2n}(s) s^2}.$$

Wprowadzając

$$(4.6) \quad R_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{R^4}{I} \mu_n + \frac{R^2}{A} \mu_n^3}{\bar{E}(s) \bar{\Omega}_{1n} + \frac{A \rho^2 R^6}{I \bar{E}(s)} s^4 + \bar{\Omega}_{2n}(s) s^2} \right\}$$

wykonujemy odwrotną transformację Laplace'a

$$(4.7) \quad W(\varphi, t) = \frac{2}{\varphi_0} \lambda_n \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \int_0^t R_n(t-\tau) C [p(\varphi, \tau)] d\tau.$$

Wynik (4.7) pod względem budowy w sensie matematycznym jest identyczny z (1.10) z tą różnicą, że na miejscu $G_n(t-\tau)$ pojawiło się wyrażenie $R_n(t-\tau)$. Za pomocą funkcji $R_n(t)$ został uwzględniony wpływ sił bezwładności na ruch pręta lepkosprężystego. W związku z tym np. dla zamkniętego pręta kołowego można napisać następujące równanie ruchu

$$(4.8) \quad W(\varphi, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) R_n(t-\tau) \sin n(\varphi - \psi) d\tau d\psi.$$

Równanie powyższe podobnie jak w przypadku zagadnienia quasi-statycznego można dostosować do różnych modeli reologicznych podłoża i pręta. Dostosowanie to polega na odpowiednim doborze $\bar{k}_1(s)$, $\bar{k}_2(s)$ i $\bar{E}(s)$ we wzorze (4.6).

Założywszy, że $\bar{k}_1(s) = a_1 \bar{E}(s)$, $\bar{k}_2(s) = a_2 \bar{E}(s)$ oraz przyjmując do obliczeń model Voigta, tzn.

$$\bar{E}(s) = E_0 (1 + \lambda s)$$

wzór (4.6) sprowadzamy do postaci

$$(4.9) \quad R_n(t) = P_n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 + \lambda s}{a_1 s^4 + a_{2n} s^3 + a_{3n} s^2 + a_{4n} s + a_{5n}} \right\},$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{R^4}{I} n + \frac{R^2}{A} n^3, & a_1 &= \frac{A Q^2 R^6}{I E_0}, \\ a_{2n} &= \lambda \Omega_{2n}, & a_{3n} &= \Omega_{2n} + E_0 \lambda^2 \Omega_{1n}, \\ a_{4n} &= 2\lambda E_0 \Omega_{1n}, & a_{5n} &= E_0 \Omega_{1n}. \end{aligned}$$

We wzorach powyższych

$$\Omega_{2n} = A Q \left[\frac{R^2}{A} n^4 + \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) n^2 + \frac{a_1 + a_2}{A I} R^6 + \frac{R^4}{I} \right].$$

Przed wykonaniem odwrotnej transformacji Laplace'a należy zanalizować wielomian

$$(4.10) \quad T(s) = a_1 s^4 + a_{2n} s^3 + a_{3n} s^2 + a_{4n} s + a_{5n}.$$

Należy przy tym rozpatrzyć trzy przypadki:

1. $T(s) = a_1 (s - s_{1n})(s - s_{2n})(s - s_{3n})(s - s_{4n})$,
2. $T(s) = a_1 (s - s_{1n})(s - s_{2n})(s^2 + s\varphi_{2n} + \psi_{2n})$,
3. $T(s) = a_1 (s^2 + s\varphi_{1n} + \psi_{1n})(s^2 + s\varphi_{2n} + \psi_{2n})$.

W każdym z trzech powyższych przypadków należy dokonać rozkładu wymiernej funkcji operatorowej występującej we wzorze (4.9) na ułamki proste.

W przypadku gdy wielomian ma cztery miejsca zerowe, znajdziemy

$$(4.11) \quad R_n(t) = P_n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{s - s_{mn}} \right\},$$

gdzie

$$A_{mn} = \frac{1 + \lambda s_{mn}}{a_1 \prod_{i \neq m} (s_{mn} - s_{in})}.$$

Po wykonaniu odwrotnej transformacji mamy

$$(4.12) \quad R_n(t) = P_n \sum_{m=1}^4 A_{mn} e^{s_{mn} t}.$$

Gdy wielomian ma tylko dwa pierwiastki rzeczywiste, znajdziemy

$$(4.13) \quad R_n(t) = P_n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B_{1n}}{s - s_{1n}} + \frac{B_{2n}}{s - s_{2n}} - \frac{B_{3n} s + B_{4n}}{s^2 + s\varphi_{2n} + \psi_{2n}} \right\},$$

gdzie

$$B_{1n} = \frac{1 + \lambda s_{1n}}{a_1 (s_{1n}^2 + \varphi_{2n} s_{1n} + \psi_{2n}) (s_{1n} - s_{2n})}, \quad B_{2n} = \frac{1 + \lambda s_{2n}}{a_1 (s_{2n}^2 + \varphi_{2n} s_{2n} + \psi_{2n}) (s_{2n} - s_{1n})},$$

$$B_{3n} = -B_{1n} - B_{2n}, \quad B_{4n} = \frac{1}{a_1 s_{1n} s_{2n}} + \left(\frac{B_{1n}}{s_{1n}} + \frac{B_{2n}}{s_{2n}} \right) \psi_{2n},$$

czyli

$$(4.14) \quad R_n(t) = P_n \left\{ B_{1n} e^{s_{1n}t} + B_{2n} e^{s_{2n}t} + B_{3n} \times \right.$$

$$\left. \mathcal{L}^{-1} \times \left[\frac{s + \frac{\varphi_{2n}}{2}}{\left(s + \frac{\varphi_{2n}}{2} \right)^2 + \psi_{2n} - \left(\frac{\varphi_{2n}}{2} \right)^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B_{4n} - B_{3n} \frac{\varphi_{2n}}{2}}{\left(s + \frac{\varphi_{2n}}{2} \right)^2 + \psi_{2n} - \left(\frac{\varphi_{2n}}{2} \right)^2} \right] \right\}.$$

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku

$$\chi_{2n}^2 = \psi_{2n} - \left(\frac{\varphi_{2n}}{2} \right)^2 > 0,$$

przeto transformata odwrotna ma postać

$$(4.15) \quad R_n(t) = P_n \left[B_{1n} e^{s_{1n}t} + B_{2n} e^{s_{2n}t} + B_{3n} e^{-\frac{\varphi_{2n}}{2}t} \cos \chi_{2n} t + \right.$$

$$\left. + \left(B_{4n} - B_{3n} \frac{\varphi_{2n}}{2} \right) \frac{1}{\chi_{2n}} e^{-\frac{\varphi_{2n}}{2}t} \sin \chi_{2n} t \right].$$

Na koniec rozpatrzmy przypadek, gdy wielomian $T(s)$ nie posiada rzeczywistych miejsc zerowych:

$$(4.16) \quad R_n(t) = P_n \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_{1n} s + C_{2n}}{s^2 + \varphi_{1n} s + \psi_{1n}} + \frac{C_{3n} s + C_{4n}}{s^2 + \varphi_{2n} s + \psi_{2n}} \right],$$

gdzie

$$C_{3n} = \frac{D_{3n}}{D_n}, \quad C_{4n} = \frac{D_{4n}}{D_n}, \quad C_{1n} = -C_{3n}, \quad C_{2n} = \frac{1}{\psi_{2n}} \left(\frac{1}{a_1} - \psi_{1n} C_{4n} \right),$$

$$D_{3n} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{a_1 \psi_{2n}} & 1 - \frac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \\ \frac{1}{a_1} \left(\lambda - \frac{\varphi_{2n}}{\psi_{2n}} \right) & \varphi_{1n} - \varphi_{2n} \frac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \end{vmatrix}, \quad D_{4n} = \begin{vmatrix} \varphi_{1n} - \varphi_{2n} & -\frac{1}{a_1 \psi_{2n}} \\ \psi_{1n} - \psi_{2n} & \frac{1}{a_1} \left(\lambda - \frac{\varphi_{2n}}{\psi_{2n}} \right) \end{vmatrix},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \varphi_{1n} - \varphi_{2n} & 1 - \frac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \\ \psi_{1n} - \psi_{2n} & \varphi_{1n} - \varphi_{2n} \frac{\psi_{1n}}{\psi_{2n}} \end{vmatrix}$$

Po wykonaniu odwrotnej transformacji otrzymujemy wyrażenie

$$(4.17) \quad R_n(t) = P_n \left(C_{1n} e^{-\frac{\varphi_{1n}}{2} t} \cos \chi_{1n} t + \frac{C_{2n} - C_{2n} \frac{\varphi_{1n}}{2}}{\chi_{1n}} e^{-\frac{\varphi_{1n}}{2} t} \sin \chi_{1n} t + \right. \\ \left. + C_{3n} e^{-\frac{\varphi_{2n}}{2} t} \cos \chi_{2n} t + \frac{C_{4n} - C_{3n} \frac{\varphi_{2n}}{2}}{\chi_{2n}} e^{-\frac{\varphi_{2n}}{2} t} \sin \chi_{2n} t \right).$$

5. Przypadek «wędrującej» siły stycznej

Zagadnienie sprowadza się do obliczenia całki w równaniu (4.8), gdy

$$(5.1) \quad p(\varphi, \tau) = \frac{P_0}{R} \delta(\varphi - \omega\tau), \\ W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_5^t R_n(t - \tau) \sin n(\varphi - \omega\tau) d\tau.$$

Podstawiając do (5.1) kolejno (4.11), (4.15) i (4.17) otrzymujemy rozwiązanie interesującego nas problemu.

W przypadku pierwszym równanie opisujące przemieszczenie pręta ma postać

$$(5.2) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \sum_{m=1}^4 A_{mn} \frac{\omega n}{\omega^2 n^2 + s_{mn}^2} \times \\ \times \left[\frac{s_{mn}}{\omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{s_{mn} t} \left(\frac{s_{mn}}{\omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right].$$

Przyjmijmy teraz oznaczenia następujące:

$$\beta_{2m-1, n} = \chi_{mn} t + n\varphi, \quad \gamma_{2m-1, n} = \chi_{mn} t - n\varphi,$$

$$\varepsilon_{2m-1, n} = -\chi_{mn} - n\omega, \quad \delta_{2m-1, n} = -\chi_{mn} + n\omega, \quad \kappa_{mn} = \frac{\varphi_{mn}}{2}$$

dla $m = 1, 2$.

W drugim przypadku przemieszczenia są określone za pomocą wzorów:

$$(5.3) \quad W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \left\{ \sum_{m=1}^2 \frac{B_{mn} \omega n}{\omega^2 n^2 + s_{mn}^2} \left[\frac{s_{mn}}{\omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{s_{mn} t} \left(\frac{s_{mn}}{\omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right] + \frac{B_{3n}}{2} \left[\frac{e_{3n}}{\kappa_{2n}^2 + \varepsilon_{3n}^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\kappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}} \sin n(\varphi - \omega t) - \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{2n} t} \left(\frac{\kappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}} \sin \beta_{3n} - \cos \beta_{3n} \right) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\delta_{3n}}{\kappa_{2n}^2 + \delta_{3n}^2} \left(\frac{\kappa_{2n}}{\delta_{3n}} \sin n(\omega t - \varphi) - \cos n(\omega t - \varphi) - e^{-\kappa_{2n} t} \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\kappa_{2n}}{\delta_{3n}} \sin \gamma_{3n} - \cos \gamma_{3n} \right) \Bigg] + \frac{B_{4n} - B_{3n} \kappa_{2n}}{2\chi_{2n}} \left[\frac{\delta_{3n}}{\kappa_{2n}^2 + \delta_{3n}^2} \left(\frac{\kappa_{3n}}{\delta_{3n}} \cos n(\omega t - \varphi) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin n(\omega t - \varphi) - e^{-\kappa_{2n} t} \left(\frac{\kappa_{2n}}{\delta_{3n}} \cos \gamma_{3n} - \sin \gamma_{3n} \right) \right) - \frac{\varepsilon_{3n}}{\kappa_{2n}^2 + \varepsilon_{3n}^2} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{\kappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) e^{-\kappa_{2n} t} \left(\frac{\kappa_{2n}}{\varepsilon_{3n}} \cos \beta_{3n} - \sin \beta_{3n} \right) \right) \right] \Bigg\}. \end{aligned}$$

W ostatnim zaś przypadku otrzymujemy wzór

$$\begin{aligned} (5.4) \quad W(\varphi, t) = & \frac{P_0}{2\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \sum_{m=1}^2 \left\{ C_{2m-1, n} \left[\frac{\varepsilon_{2m-2, n}}{\kappa_{mn}^2 + \varepsilon_{2m-1, n}^2} \times \right. \right. \\ & \times \left(\frac{\kappa_{mn}}{\varepsilon_{2m-1, n}} \sin n(\varphi - \omega t) \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\varepsilon_{2m-1, n}} \times \right. \right. \\ & \times \sin \beta_{2m-1, n} - \cos \beta_{2m-1, n} \Bigg) \Bigg] + \frac{\delta_{2m-1, n}}{\kappa_{mn}^2 + \delta_{2m-1, n}^2} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\delta_{2m-1, n}} \sin n(\omega t - \varphi) - \right. \\ & \left. \left. - \cos n(\omega t - \varphi) - e^{-\kappa_{mn} t} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\delta_{2m-1, n}} \sin \gamma_{2m-1, n} - \cos \gamma_{2m-1, n} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{C_{2m, n} - C_{2m-1, n} \kappa_{mn}}{\chi_{mn}} \left[\frac{\delta_{2m-1, n}}{\kappa_{mn}^2 + \delta_{2m-1, n}^2} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\delta_{2m-1, n}} \cos n(\omega t - \varphi) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin n(\omega t - \varphi) - e^{-\kappa_{mn} t} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\delta_{2m-1, n}} \cos \gamma_{2m-1, n} - \sin \gamma_{2m-1, n} \right) \right) \right] - \\ & - \frac{\varepsilon_{2m-1, n}}{\kappa_{mn}^2 + \varepsilon_{2m-1, n}^2} \left(\frac{\kappa_{mn}}{\varepsilon_{2m-1, n}} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\kappa_{mn} t} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{\kappa_{mn}}{\varepsilon_{2m-1, n}} \cos \beta_{2m-1, n} - \sin \beta_{2m-1, n} \right) \right) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}$$

6. Przykłady

Obliczenia wykonano dla przypadku quasi-statycznego. Założono, że $\alpha_1 = \alpha_2 = I/R^4$. Przyjęto również, że przekrój pręta jest kołowy, którego promień r spełnia warunek $r/R = \delta$. Wówczas wielkości bezwymiarowe przyjęte do obliczeń określone są przez następujące wzory:

$$\begin{aligned} \beta_w(\lambda, \omega, \varphi, t) = & \frac{\alpha \pi E_0 R}{P} W(\varphi, t) = \\ = & \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n n (n^2 \delta^2 + 4)}{n^6 - \left(2 - \frac{\delta^2}{4}\right) n^4 + \left(2 + \frac{\delta^2}{4}\right) n^2 + \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)} \frac{1}{\lambda \omega n + \frac{1}{\lambda \omega n}} \times \\ & \times \left[\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-t/\lambda} \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right], \end{aligned}$$

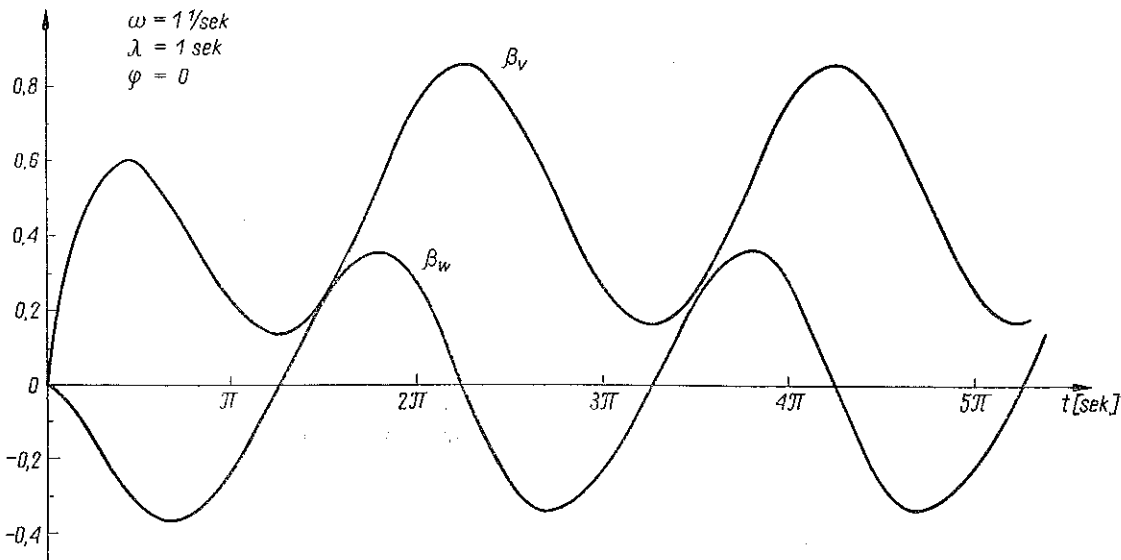
$$\beta_v(\lambda, \omega, \varphi, t) = \frac{\alpha\pi E_0 R}{P} W(\varphi, t) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n (\delta^2 n^4 + 4 + \delta^2)}{n^6 - \left(2 - \frac{\delta^2}{4}\right) n^4 + \left(2 + \frac{\delta^2}{4}\right) n^2 + \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)} \frac{1}{\lambda\omega n + \frac{1}{\lambda\omega n}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-t/\lambda} \left(\frac{1}{\lambda\omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right].$$

W przykładzie obliczono wartości β_w i β_v dla $\lambda = 1$ sek., $\omega = 1$ 1/sek., $\delta = 0,1$, i kątów φ od 0 do 2π co $0,1 \pi$. Wyniki zamieszczono w tablicy 1.

Pod wpływem siły wędrującej punkt osi, wokół którego odbywają się oscylacje wzdłużne, przesuwa się o pewien kąt w kierunku poruszania się siły, natomiast oscylacje poprzeczne odbywają się wokół punktu na osi pręta (rys. 3). Z wykresów

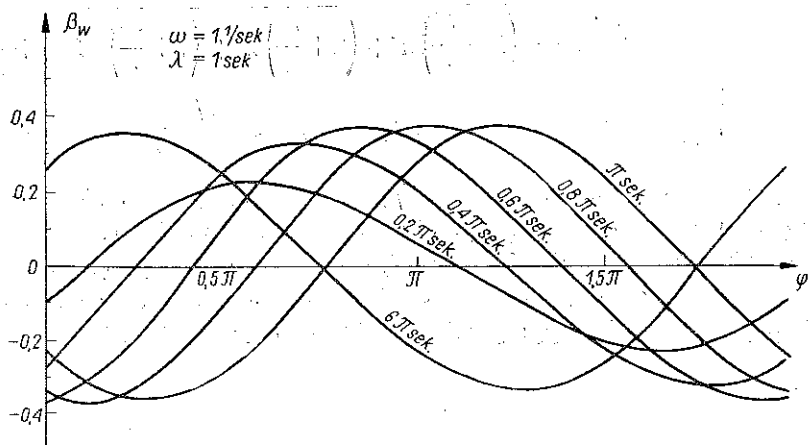


Rys. 3

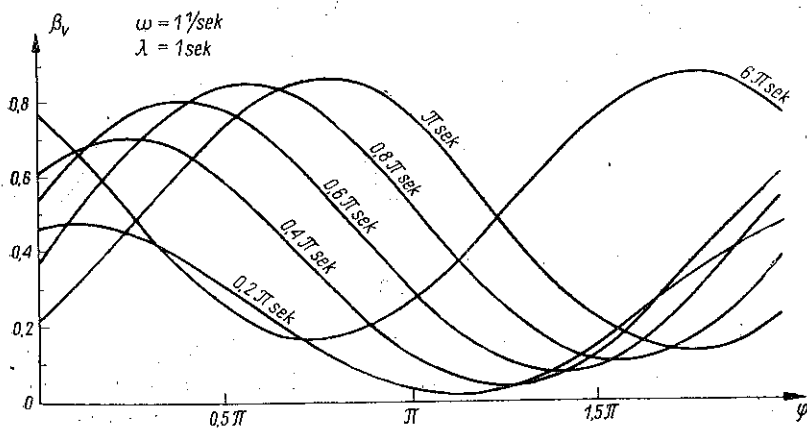
odkształconej osi pręta (rys. 4 i 5) wnioskujemy, że maksimum przemieszczeń stycznych porusza się za punktem przyłożenia siły stycznej, natomiast maksymalne ugięcie promieniowe wyprzedza punkt przyłożenia siły. Dzieje się tak z wyjątkiem okresu początkowego tj. w przedziale $0, 0,4 \pi$ sek.

7. Przypadek obciążenia dowolnego

Rozpatrywane zagadnienie jest liniowe, zatem wolno skorzystać z zasady superpozycji. W związku z tym wolno obciążenie rozłożyć na część promieniową i styczną osobno rozpatrując oba przypadki. Przypadek obciążenia promieniowego został omówiony w [3]. Pominięto tam jednak w obliczeniach wpływ reakcji stycznych podłoża.



Rys. 4



Rys. 5

Tablica 1.

φ/π	t/π 0,2		t/π 0,4		t/π 0,6	
	β_w	β_v	β_w	β_v	β_w	β_v
0,1	-0,0093	0,4750	-0,1686	0,6702	-0,3199	0,6447
0,2	0,0771	0,4641	-0,0529	0,7059	-0,2380	0,7337
0,3	0,1509	0,4273	0,0712	0,7030	-0,1257	0,7918
0,4	0,2023	0,3707	0,1850	0,6618	0,0046	0,8114
0,5	0,2278	0,3023	0,2724	0,5886	0,1361	0,7890
0,6	0,2285	0,2298	0,3242	0,4933	0,2501	0,7272
0,7	0,2078	0,1607	0,3387	0,3880	0,3316	0,6343
0,8	0,1704	0,1009	0,3194	0,2837	0,3727	0,5221
0,9	0,1216	0,0548	0,2726	0,1900	0,3733	0,4036
1,0	0,0657	0,0253	0,2055	0,1144	0,3381	0,2909
1,1	0,0063	0,0139	0,1250	0,0623	0,2744	0,1939
1,2	-0,0535	0,0214	0,0372	0,0367	0,1903	0,1205
1,3	-0,1104	0,0472	-0,0526	0,0391	0,0936	0,0757
1,4	-0,1610	0,0901	-0,1394	0,0694	-0,0086	0,0623
1,5	-0,2011	0,1473	-0,2177	0,1258	-0,1099	0,0811
1,6	-0,2257	0,2149	-0,2814	0,2046	-0,2036	0,1306
1,7	-0,2299	0,2871	-0,3237	0,3005	-0,3411	0,3063
1,8	-0,2098	0,3571	-0,3377	0,4054	-0,3411	0,3063
1,9	-0,1637	0,4168	-0,3172	0,5095	-0,3704	0,4191
2,0	-0,0941	0,4583	-0,2600	0,6016	-0,3644	0,5358

φ/π	t/π 0,8		t/π 1,0		t/π 1,2	
	0,1	-0,3718	0,4912	-0,3087	0,3093	-0,1584
0,2	-0,3527	0,6063	-0,3492	0,4235	-0,2398	0,2420
0,3	-0,2970	0,7096	-0,3595	0,5258	-0,3022	0,3278
0,4	-0,2073	0,7900	-0,3363	0,6363	-0,3404	0,4295
0,5	-0,0911	0,8377	-0,2785	0,7341	-0,3497	0,5389
0,6	0,0393	0,8463	-0,1888	0,8086	-0,3265	0,6462
0,7	0,1676	0,8136	-0,0743	0,8508	-0,2695	0,7410
0,8	0,2760	0,7426	0,0531	0,8545	-0,1814	0,8129
0,9	0,3500	0,6426	0,1775	0,8179	-0,0690	0,8531
1,0	0,3827	0,5259	0,2813	0,7446	0,0560	0,8556
1,1	0,3742	0,4057	0,3506	0,6437	0,1777	0,8185
1,2	0,3300	0,2941	0,3784	0,5277	0,2790	0,7456
1,3	0,2577	0,2011	0,3653	0,4096	0,3458	0,6458
1,4	0,1658	0,1341	0,3170	0,3014	0,3714	0,5315
1,5	0,0630	0,0981	0,2414	0,2130	0,3566	0,4159
1,6	-0,0429	0,0950	0,1475	0,1516	0,3072	0,3107
1,7	-0,1447	0,1247	0,0444	0,1214	0,2314	0,2254
1,8	-0,2355	0,1848	-0,0599	0,1239	0,1390	0,1670
1,9	-0,3080	0,2708	-0,1580	0,1584	0,0373	0,1394
2,0	-0,3554	0,3759	-0,2431	0,2219	-0,0640	0,1437

c.d. Tablicy 1

φ/π	t/π		t/π		t/π	
	1,4		1,6		1,8	
	β_w	β_v	β_w	β_v	β_w	β_v
0,1	0,0371	0,1503	0,2275	0,2409	0,3493	0,4308
0,2	-0,0622	0,1544	0,1373	0,1833	0,3017	0,3276
0,3	-0,1549	0,1888	0,0390	0,1556	0,2285	0,2437
0,4	-0,2351	0,2505	-0,0597	0,1590	0,1385	0,1857
0,5	-0,2970	0,3347	-0,1521	0,1925	0,0405	0,1576
0,6	-0,3352	0,4348	-0,2323	0,2534	-0,0582	0,1605
0,7	-0,3449	0,5426	-0,2944	0,3367	-0,1508	0,1936
0,8	-0,3226	0,6486	-0,3331	0,4360	-0,2312	0,2540
0,9	-0,2667	0,7423	-0,3434	0,5433	-0,2936	0,3371
1,0	-0,1799	0,8135	-0,3217	0,6489	-0,3326	0,4362
1,1	-0,0689	0,8534	-0,2667	0,7424	-0,3434	0,5434
1,2	0,0547	0,8560	-0,1806	0,8138	-0,3220	0,6490
1,3	0,1752	0,8196	-0,0702	0,8540	-0,2674	0,7427
1,4	0,2753	0,7476	0,0528	0,8571	-0,1816	0,8144
1,5	0,3411	0,6492	0,1727	0,8214	-0,0716	0,8550
1,6	0,3662	0,5365	0,2725	0,7503	0,0513	0,8586
1,7	0,3513	0,4225	0,3383	0,6527	0,1712	0,8233
1,8	0,3024	0,3189	0,3636	0,5409	0,2711	0,7526
1,9	0,2277	0,2351	0,3493	0,4277	0,3372	0,6554
2,0	0,1363	0,1776	0,3012	0,3246	0,3630	0,5439

φ/π	t/π		t/π		t/π	
	2,0		2,2		2,4	
0,1	0,3372	0,6571	0,1706	0,8256	-0,0727	0,8572
0,2	0,3633	0,5455	0,2709	0,7551	0,0505	0,8611
0,3	0,3499	0,4323	0,3375	0,6579	0,1708	0,8260
0,4	0,3024	0,3289	0,3637	0,5462	0,2711	0,7555
0,5	0,2293	0,2448	0,3502	0,4328	0,3377	0,6582
0,6	0,1394	0,1865	0,3029	0,3293	0,3639	0,5464
0,7	0,0412	0,1581	0,2297	0,2451	0,3504	0,4330
0,8	-0,0576	0,1608	0,1397	0,1867	0,3030	0,3294
0,9	-0,1503	0,1938	0,0414	0,1582	0,2298	0,2451
1,0	-0,2309	0,2541	-0,0575	0,1609	0,1398	0,1867
1,1	-0,2936	0,3371	-0,1503	0,1938	0,0414	0,1582
1,2	-0,3328	0,4363	-0,2310	0,2541	-0,0575	0,1609
1,3	-0,3438	0,5435	-0,2938	0,3372	-0,1504	0,1938
1,4	-0,3226	0,6493	-0,3331	0,4365	-0,2312	0,2542
1,5	-0,2681	0,7433	-0,3441	0,5438	-0,2940	0,3373
1,6	-0,1824	0,8151	-0,3231	0,6497	-0,3333	0,4367
1,7	-0,0724	0,8560	-0,2685	0,7438	-0,3444	0,5441
1,8	0,0506	0,8598	-0,1828	0,8158	-0,3233	0,6501
1,9	0,1706	0,8247	-0,0727	0,8568	-0,2686	0,7442
2,0	0,2708	0,7542	0,0504	0,8607	-0,1829	0,8163

c.d. Tablicy 1

φ/π	2,6		2,8		3,0	
	β_w	β_v	β_w	β_v	β_w	β_v
0,1	-0,2687	0,7445	-0,3445	0,5444	-0,2942	0,3377
0,2	-0,1829	0,8165	-0,3233	0,6505	-0,3335	0,4371
0,3	-0,0726	0,8575	-0,2686	0,7446	-0,3444	0,5445
0,4	0,0506	0,8613	-0,1828	0,8166	-0,3233	0,6505
0,5	0,1709	0,8262	-0,0725	0,8676	-0,2686	0,7447
0,6	0,2712	0,7556	0,0506	0,8614	-0,1828	0,8166
0,7	0,3378	0,6583	0,1709	0,8262	-0,0725	0,8576
0,8	0,3640	0,5464	0,2713	0,7556	0,0506	0,8614
0,9	0,3505	0,4330	0,3377	0,6583	0,1710	0,8262
1,0	0,3031	0,3295	0,3640	0,5465	0,2713	0,7556
1,1	0,2299	0,2451	0,3505	0,4330	0,3379	0,6583
1,2	0,1397	0,1868	0,3031	0,3295	0,3640	0,5465
1,3	0,0413	0,1583	0,2298	0,2451	0,3505	0,4330
1,4	-0,0576	0,1609	0,1397	0,1868	0,3030	0,3295
1,5	-0,1506	0,1939	0,0413	0,1583	0,2298	0,2452
1,6	-0,2313	0,2543	-0,0577	0,1610	0,1397	0,1868
1,7	-0,2941	0,3375	-0,1506	0,1940	0,0413	0,1583
1,8	-0,3335	0,4369	-0,2314	0,2545	-0,0577	0,1610
1,9	-0,3445	0,5443	-0,2942	0,3376	-0,1506	0,1941
2,0	-0,3233	0,6503	-0,3335	0,4370	-0,2314	0,2545

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
2. B. SKALMIERSKI, *Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych uźebrowanych*, Zeszyty Naukowe Pol. Sl., nr 73, Mechanika, z. 10, 1963.
3. B. SKALMIERSKI, *Zagadnienie lepkospřeżystego pręta kołowego na podłożu lepkospřeżystym*, Rozpr. Inżyn., 2, 13 (1965).
4. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, New York-Toronto-London, 1951.

Резюме

ВЯЗКО-УПРУГИЙ КРУГОВОЙ СТЕРЖЕНЬ ПОКОЯЩИЙСЯ НА ОСНОВАНИИ
С ДВУНАПРАВЛЕННОЙ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В работе обсуждается вопрос вязко-упругого кругового стержня, покоящегося на основании с двунаправленной вязко-упругой характеристикой. Основание реагирует на радиальные и касательные перемещения (две характеристические постоянные). Вопрос рассматривается в двух аспектах, как квази-статический и динамический т.е. с учетом сил инерции. Исходным пунктом были дифференциальные равновесия изгибающего стержня

$$\frac{AE}{R^2} \left(\frac{d^2 V(\varphi, t)}{d\varphi^2} + \frac{dW(\varphi, t)}{d\varphi} \right) - \frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^3 W(\varphi, t)}{d\varphi^3} - \frac{d^2 V(\varphi, t)}{d\varphi^2} \right) + p^*(\varphi, t) = 0,$$

$$-\frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^4 W(\varphi, t)}{d\varphi^4} - \frac{d^3 V(\varphi, t)}{d\varphi^3} \right) - \frac{AE}{R^2} \left(\frac{dV(\varphi, t)}{d\varphi} + W(\varphi, t) \right) + q^*(\varphi, t) = 0,$$

где W и V — деформации стержня, q и p — нагрузки, соответственно и радиальном и касательном направлении. Результаты получены на основе упруго-вязкоупругой аналогии.

Получено функцию Грина задачи, которая дает возможность вычислить перемещения при произвольных нагрузках на основании формул

$$W(\varphi, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) G_n(t-\tau) \sin n(\varphi-\psi) d\psi d\tau,$$

$$V(\varphi, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) H_n(t-\tau) \cos n(\varphi-\psi) d\psi d\tau.$$

Отдельно рассматривается полный стержень, подверженный нагрузке радиальных и касательных сил, странствующих по окружности со скоростью V . Такое состояние нагрузки реализуется в работе всякого рода приводных колес.

Для подробных обсуждений принято модель Фойгта. Не учитывается влияние радиальной нагрузки на продольные деформации.

$$W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi E_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n n \left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A} \right) n^4 + \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda \omega n + \frac{1}{\lambda \omega n}} \left[\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right],$$

$$V(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi E_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \left[\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right) \right]}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A} \right) n^4 + \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda \omega n + \frac{1}{\lambda \omega n}} \left[\frac{1}{\lambda \omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right].$$

Summary

VISCO-ELASTIC ROUND BAR ON A FOUNDATION WITH VISCOELASTIC PROPERTIES IN TWO DIRECTIONS

The foundation considered is assumed to respond to radial and tangential displacement (two characteristic constants). The problem is considered in two aspects: quasi-static and dynamic in which inertia forces are taken into consideration. The point of departure are the equilibrium equations of a bar subject to bending

$$\frac{AE}{R^2} \left(\frac{d^2 V(\varphi, t)}{d\varphi^2} + \frac{dW(\varphi, t)}{d\varphi} \right) - \frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^3 W(\varphi, t)}{d\varphi^3} - \frac{d^2 V(\varphi, t)}{d\varphi^2} \right) + p^*(\varphi, t) = 0,$$

$$-\frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^4 W(\varphi, t)}{d\varphi^4} - \frac{d^3 V(\varphi, t)}{d\varphi^3} \right) - \frac{AE}{R^2} \left(\frac{dV(\varphi, t)}{d\varphi} + W(\varphi, t) \right) + q^*(\varphi, t) = 0,$$

where W and V are the displacements of the bar and q and p — the loads in the radial and tangential direction, respectively. The results are obtained on the ground of the elastic-viscoelastic analogy.

Green's function of the problem is obtained enabling the obtainment of the displacements for any loads by means of the equations

$$W(\varphi, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) G_n(t-\tau) \sin n(\varphi-\psi) d\psi d\tau,$$

$$V(\varphi, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \int_0^{2\pi} p(\psi, \tau) H_n(t-\tau) \cos n(\varphi-\psi) d\psi d\tau.$$

As a separate problem is considered a full bar loaded by radial and tangential forces travelling along the periphery with velocity V . Such a state of load is encountered in the operation of driving wheels of any kind. The Voigt model is assumed for detailed analysis. The influence of the radial load on the longitudinal strain is rejected.

$$W(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi E_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n n \left(\frac{R^2}{A} n^2 + \frac{R^4}{I} \right)}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A} \right) n^4 + \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda \omega n + \frac{1}{\lambda \omega n}} \left[\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n(\varphi - \omega t) + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \sin n\varphi + \cos n\varphi \right) \right],$$

$$V(\varphi, t) = \frac{P_0}{\pi E_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \left[\frac{R^2}{A} n^4 + \frac{R^4}{I} \left(1 + \frac{R^2}{A} \right) \right]}{n^6 - \left(2 - \frac{\alpha_2 R^2}{A} \right) n^4 + \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{R^4}{I} + \frac{R^2}{A} \right) \right] n^2 + \frac{\alpha_2 R^4}{I} \left(1 + \frac{\alpha_1 R^2}{A} \right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda \omega n + \frac{1}{\lambda \omega n}} \left[\frac{1}{\lambda \omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda \omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right].$$

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1966 r.