

STAN GRANICZNY WIRUJĄCEJ RURY GRUBOŚCIENNEJ
W NIEKTÓRYCH ZŁOŻONYCH PRZYPADKACH OBCIĄŻENIA

JACEK SKRZYPEK (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Zagadnieniom cylindrów grubościennych poddanych samemu tylko wirowaniu poświęcono w literaturze już kilka prac. E. A. DAVIS i F. M. CONNELLY [4], F. P. J. RIMROTT [11] oraz I. N. DANIŁOWA [3] rozpatrują równowagę plastyczną cylindrów pełnych lub grubościennych zakładając wzmocnienie plastyczne materiału i uwzględniając wpływ przemieszczeń na wielkość sił masowych. J. W. NIEMIROWSKI [10], a także P. G. HODGE i M. BALABAN [7] analizują stan sprężysto-plastyczny wirującej rury w oparciu o warunek plastyczności Treski i stowarzyszone prawo płynięcia dla materiałów nieściśliwych lub ściśliwych.

Niektóre przypadki złożone, jak np. cylinder wirujący, pod działaniem ciśnień wewnętrznych i zewnętrznych dają się rozwiązać w sposób całkowicie elementarny [9]. Jednakże ważny dla zastosowań praktycznych przypadków jednoczesnego działania momentu skręcającego prowadzi do całek eliptycznych.

N. S. KURDIN [8] przeprowadził analizę stanu sprężysto-plastycznego wirującego pręta o przekroju kołowym, obciążonego momentem skręcającym. W pracy wykazano, że uplastycznienie może się wówczas rozpocząć w środku lub na brzegach przekroju poprzecznego pręta; podano przy tym warunki, przy których zachodzą opisane przypadki. Wzory na naprężenia wyprowadzono tu w oparciu o warunek plastyczności Misesa przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia. Końcowe wyrażenia na naprężenia w strefie plastycznej podano w formie całkowitej nie sprowadzając całek hipereliptycznych do eliptycznych i nie wykonując żadnych obliczeń numerycznych.

W pracy M. ŻYCKOWSKIEGO [14] wyprowadzono ogólne wzory dla kołowo-symetrycznych stanów cylindra wykazując, iż stan ten odpowiada pięciu typom obciążeń powierzchniowych. W pracy [15] uogólniono powyższe wzory na przypadek działania sił masowych i obciążeń cieplnych. W obu cytowanych publikacjach podano jedynie wzory ogólne, z których naprężenia normalne wyrażają się przez całki hipereliptyczne, a naprężenia styczne i odkształcenia przez proste funkcje elementarne.

Szczegółową analizę potrójnie złożonego przypadku obciążenia momentem skręcającym, siłą osiową i różnicą ciśnień przeprowadzono w niedawno opublikowanej pracy [12].

W niniejszej pracy będziemy badali takie przypadki złożonych obciążeń wirującej rury grubościennej, w których rozwiązania wyrażają się przez całki eliptyczne. Będziemy przy tym rozważali ustalone i nieustalone wirowanie. Oprócz rozwiązań ścisłych podamy również proste wzory aproksymacyjne na krzywe graniczne, dogodnie do dalszych zastosowań.

2. Założenia i wzory podstawowe

Pracę obecną oprzemy na następujących założeniach:

a. Stan naprężenia i odkształcenia rury jest kołowo-symetryczny. W pracy [14] wykazano, że odpowiada to następującym pięciu typom obciążeń powierzchniowych: rozciąganiu lub ściskaniu, skręcaniu, ciśnieniu normalnemu wewnętrznemu i zewnętrznemu, ciśnieniom stycznym o kierunku obwodowym i ciśnieniom stycznymi o kierunku osiowym, a w pracy [15] uwzględniono również możliwość występowania sił masowych i obciążeń cieplnych.

b. Rura wykonana jest z materiału idealnie sprężysto-plastycznego nie podlegającego wzmocnieniu plastycznemu, przy czym ograniczymy się do analizy stanu granicznego rury, tak iż wystarczy badać jedynie strefy uplastycznione.

c. Materiał jest jednorodny, izotropowy, nieściśliwy i podlega warunkowi plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego.

d. Wykorzystamy równania teorii plastyczności Hencky'ego-Iliuszina. Rozwiązanie to jest również słuszne w oparciu o teorię Levy-Misesa przy formalnym zastąpieniu odkształceń przez prędkości odkształceń.

e. Przyjmujemy, że warunki brzegowe na końcach rury, odnośnie siły podłużnej i momentu skręcającego, spełnione są w sensie całkowym, czyli, że obciążenia te przyłożone są tak, jak to wynika z uzyskanego rozkładu naprężeń.

Przy powyższych założeniach w pracach [14 i 15] wyprowadzono następujące wzory na rozkład naprężeń i odkształceń:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= C_\sigma - \int R dr + \int \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\varphi r} dr, \\
 \sigma_\theta &= C_\sigma - \int R dr + \int \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\varphi r} dr + \frac{1}{\varphi} (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r), \\
 \sigma_z &= C_\sigma - \int R dr + \int \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\varphi r} dr + \frac{1}{\varphi} (\varepsilon_z - \varepsilon_r), \\
 \tau_{\theta z} &= \frac{1}{2\varphi} \gamma_{\theta z}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{C_\theta}{r^2} - \frac{1}{r^2} \int \theta(r) r^2 dr, \\
 \tau_{rz} &= \frac{C_z}{r^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Występująca w tych wzorach funkcja $\varphi(r)$, określająca stopień zaawansowania odkształceń plastycznych, wyraża się następująco:

$$(2.2) \quad \varphi = \sqrt{\frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + \frac{3}{2} \gamma_{\theta z}^2}{2Q^2 - 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{rz}^2)}}.$$

Odształcenia są następujące:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r - \varepsilon_\theta &= -2 \frac{C_r}{r^2} - \frac{6}{r^2} \int a r t dr + 3at, \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_z &= \frac{C_r}{r^2} + \frac{3}{r^2} \int a r t dr - \frac{3}{2} \varepsilon, \\ \varepsilon_z - \varepsilon_r &= \frac{C_r}{r^2} + \frac{3}{r^2} \int a r t dr - 3at + \frac{3}{2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Sprowadzając wszystkie występujące powyżej wielkości do postaci bezwymiarowej i wykonując zaznaczone całkowania dla przyjętych prostych funkcji

$$(2.4) \quad \begin{aligned} a(r) &= 0, \\ R(r) &= \frac{2Q\beta^2}{\sqrt{3}r_z} c_w Q, \\ \theta(r) &= \frac{2Q\beta^2}{\sqrt{3}r_z} c_\theta Q, \end{aligned}$$

odpowiadających wirowaniu cylindra (gdzie R oznacza siłę masową o kierunku promieniowym, θ siłę masową o kierunku obwodowym) otrzymujemy następujące wyrażenia na składowe stanu naprężenia:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} s_r &= -q_w - \frac{c_w \beta^2}{\sqrt{3}} x \Big|_{\beta z}^{e^2} + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta z}^{e^2} \frac{p(x)}{x^2} dx, \\ s_\theta &= -q_w - \frac{c_w \beta^2}{\sqrt{3}} x \Big|_{\beta z}^{e^2} + \frac{2c_r}{\sqrt{3}e^2} p(e) + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta z}^{e^2} \frac{p(x)}{x^2} dx, \\ s_z &= -q_w - \frac{c_w \beta^2}{\sqrt{3}} x \Big|_{\beta z}^{e^2} + \left(\frac{c_r}{\sqrt{3}e^2} + e \right) p(e) + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta z}^{e^2} \frac{p(x)}{x^2} dx, \\ s_{\theta z} &= g Q p(e), \quad s_{rz} = \frac{\beta c_z}{e}, \quad s_{r\theta} = \frac{\beta c_\theta}{e^2} - \frac{c_z \beta^2 Q^2}{2}, \end{aligned}$$

Wielkości bezwymiarowe wprowadzono za pomocą wzorów

$$(2.6) \quad s_j = \frac{1}{Q} \sigma_j, \quad s_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{Q} \tau_{ij}, \quad i, j = r, \theta, z$$

oraz

$$(2.7) \quad q_w = \frac{p_w r}{Q}, \quad \beta = \frac{r_w}{r_z}, \quad \varrho = \frac{r}{r_z}, \quad x = \varrho^2,$$

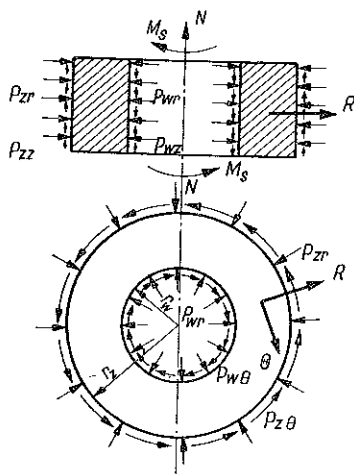
$$c_\omega = \frac{\sqrt{3}\gamma r_z^2}{2g Q \beta^2} \omega^2, \quad c_\varepsilon = \frac{\sqrt{3}\gamma r_z^2}{2g Q \beta^2} \frac{d\omega}{dt}.$$

Parametry związane z siłami masowymi w ruchu obrotowym ustalonym i przyspieszonym oznaczono przez c_ω i c_ε , jakkolwiek przyspieszenia kąowego nie będziemy oznaczali przez ε , bowiem symbolem tym oznaczono wydłużenie rury. Występująca we wzorach (2.5) funkcja $p(x)$ zdefiniowana jako

$$(2.8) \quad p(x) = \frac{1}{2G\varphi(x)},$$

gdzie G oznacza moduł Kirchhoffa, ma następującą postać:

$$(2.9) \quad p(x) = \sqrt{\frac{-\frac{1}{4}c_\varepsilon^2 \beta^4 x^4 + (1 + c_\theta c_\varepsilon \beta^4) x^2 - c_z^2 \beta^2 x - c_\theta^2 \beta^4}{g^2 x^3 + e^2 x^2 + c_r^2}};$$



Rys. 1

symbole e , g , c_r , c_z i c_θ określają parametry odkształceniowe decydujące o udziale poszczególnych obciążeń (bezwymiarowe wydłużenie, kąt skręcenia itp. [12 i 14]).

Przejdźmy obecnie do analizy obciążeń. Przy przyjętych na wstępie założeniach rura może być poddana działaniu pięciu typów obciążeń powierzchniowych oraz sił masowych pojawiających się przy wirowaniu elementu. Obciążenia te oznaczone symbolicznie M_s , N , p_r , p_z i p_θ oraz R i θ przedstawia rys. 1. Na rysunku pominięto obciążenia cieplne, nimi bowiem, podobnie jak ciśnieniami stycznymi o kierunku osiowym, nie będziemy się w dalszym ciągu zajmować. W oparciu o wyrażenia (2.5) można wyprowadzić następujące wzory na obciążenia:

Bezwymiarowa różnica ciśnień promieniowych: z warunku $q_z = -[s_r]_{\varrho=1}$

$$(2.10) \quad q_w - q_z = -\frac{c_\omega \beta^2}{\sqrt{3}} x \Big|_{\beta^2}^1 + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^1 \frac{p(x)}{x^2} dx;$$

siła podłużna

$$N = 2\pi Q r_z^2 \int_{\beta}^1 \varrho s_z d\varrho,$$

a w postaci bezwymiarowej po uwzględnieniu (2.10)

$$(2.11) \quad n = \frac{N}{FQ} = \frac{\beta^2 q_w - q_z}{1 - \beta^2} + \frac{c_0 \beta^2 (1 + \beta^2)}{2\sqrt{3}} + \frac{e}{1 - \beta^2} \int_{\beta^2}^1 p(x) dx;$$

moment skręcający

$$M_s = 2\pi \frac{Q}{\sqrt{3}} r_z^3 \int_{\beta}^1 s_{\theta z} \rho^2 d\rho$$

lub w formie bezwymiarowej

$$(2.12) \quad m_s = \frac{M_s \sqrt{3}}{W_0 Q} = \frac{2g}{1 - \beta^4} \int_{\beta^2}^1 xp(x) dx,$$

gdzie W_0 oznacza sprężysty wskaźnik skręcania.

Ciśnienie styczne. Zakładając napęd rury na wewnętrznej średnicy przy uwzględnieniu warunków

$$(2.13) \quad [s_{r\theta}]_{\rho=\beta} = t_{w\theta}, \quad [s_{r\theta}]_{\rho=1} = 0$$

otrzymujemy w formie bezwymiarowej związek między parametrami c_0 i c_e oraz obciążenie $t_{w\theta}$:

$$(2.14) \quad c_0 = \frac{c_e}{2}, \quad t_{w\theta} = \frac{c_e}{2} (1 - \beta^4).$$

Siły masowe o kierunku promieniowym R i obwodowym θ podają wzory (2.4). Wyrażenie na funkcję $p(x)$ we wzorach (2.10)–(2.12) uzyskamy zakładając w (2.9)

$$(2.15) \quad c_z = 0, \quad c_\theta = c_e/2:$$

$$(2.16) \quad p(x) = \sqrt{\frac{-\frac{1}{4} c_e^2 \beta^4 x^4 + (1 + \frac{1}{2} c_e^2 \beta^4) x^2 - \frac{1}{4} c_e^2 \beta^4}{g^2 x^3 + e^2 x^2 + c_r^2}}.$$

3. Stan graniczny przy ustalonym wirowaniu rury

Wzory (2.10)–(2.12) a także (2.4), opisujące stan graniczny rury przy czterech obciążeniach powierzchniowych M_s , N , Δp_r i $p_{w\theta}$ oraz dwóch siłach masowych R i θ ze względu na wysoki stopień hipereliptyczności występujących tam całek, nie nadają się wprost do praktycznych zastosowań. Celem sprowadzenia tych całek do normalnych całek eliptycznych należy ograniczyć nieco ogólność rozważań.

Zajmijmy się obecnie przypadkiem wirowania rury ze stałą prędkością kątową ω . Wyrażenie na funkcję $p(x)$ przyjmie teraz postać

$$(3.1) \quad p(x) = \frac{x}{\sqrt{g^2 x^3 + e^2 x^2 + c_r^2}}.$$

Sprowadzenie całek do normalnych całek eliptycznych odbywa się tu tak samo jak w poprzedniej pracy [12], co jest możliwe dzięki temu, że dodatkowy parametr c_ω , opisujący udział wirowania w procesie obciążania, nie występuje pod znakiem całki. Tak więc kolejno podstawienie $1/x = y$ sprowadza wyrażenie pod pierwiastkiem w mianowniku (3.1) do postaci kanonicznej

$$(3.2) \quad p(y) = \frac{y}{\varkappa_r c_r \sqrt{y \left(\frac{g^2}{c_r^2} + \frac{e^2}{c_r^2} y + y^3 \right)}}, \quad \varkappa_r = \text{sign } c_r = \pm 1,$$

a dalsza redukcja do całek eliptycznych jest możliwa przez wprowadzenie nowej zmiennej

$$(3.3) \quad \zeta = 2 \text{arc tg } \sqrt{\frac{a_2 y}{a_1 [y - (\omega_1 - \omega_2)]}},$$

przy czym użyte tu symbole ω_1 , ω_2 , a_1 i a_2 mają znaczenie następujące:

$$(3.4) \quad \omega_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - \frac{g^2}{2c_r^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{g^2}{2c_r^2}}, \quad \Delta = \frac{g^4}{4c_r^4} + \frac{e^6}{27c_r^6} > 0$$

oraz

$$(3.5) \quad a_1^2 = \omega_1^2 + \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2, \quad a_2^2 = 3(\omega_1^2 - \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2).$$

Po zastosowaniu kilku przekształceń otrzymujemy ostatecznie następujące wyrażenie na bezwymiarowe obciążenia:

Różnica ciśnień

$$(3.6) \quad q_w - q_z = -\frac{c_\omega \beta^2}{\sqrt{3}} (1 - \beta^2) + \frac{\varkappa_r}{\sqrt{3}} \left[\text{Arth} \frac{2\sqrt{y(\omega_2^3 - \omega_1^3) + 3y^2 \omega_1 \omega_2 + y^4}}{a_1(a_1 + a_2) + 2y^2} + \right. \\ \left. + \frac{(a_2 - a_1)(\omega_2 - \omega_1)}{(a_2 + a_1) 2\sqrt{a_1 a_2}} \Pi \left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k \right) - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} F(\zeta, k) \right] \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}},$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(3.7) \quad k^2 = \frac{3a_1^2 + 4a_1 a_2 + a_2^2}{8a_1 a_2}, \quad n = -\frac{(a_2 + a_1)^2}{4a_1 a_2}.$$

Siła podłużna

$$(3.8) \quad \bar{n} = \frac{1 + \beta^2}{2(1 - \beta^2)} \Delta q + \frac{c_\omega \beta^2 (1 + \beta^2)}{2\sqrt{3}} + \frac{2e \varkappa_r}{(1 - \beta^2) c_r a_1} \times \\ \times \left\{ \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{a_1 a_2} (a_1 + a_2)} F(\zeta, k) - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} E(\zeta, k) - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{(\omega_2 - \omega_1 + y)[y^2 + (\omega_2 - \omega_1)y + (\omega_1^2 + \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2)]}}{[a_1(\omega_2 - \omega_1 + y) + a_2 y] \sqrt{y}} \right\} \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}},$$

gdzie \bar{n} jest zredukowaną siłą podłużną,

$$(3.9) \quad \bar{n} = n - (-q), \quad q = \frac{q_w + q_z}{2}, \quad \Delta q = q_w - q_z.$$

Moment skręcający

$$(3.10) \quad m_s = \frac{4g\kappa_r}{3c_r(1-\beta^4)(\omega_2 - \omega_1)\alpha_1^3} \left\{ \frac{\sqrt{y^4 + 3y^2\omega_1\omega_2 + y(\omega_2^3 - \omega_1^3)}}{y^2[\alpha_1(y - \omega_1 + \omega_2) + \alpha_2 y]} \times \right. \\ \left. \times [(6\omega_1\omega_2 - \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2)y - (\omega_2^3 - \omega_1^3)] + \right. \\ \left. + \frac{3\omega_1\omega_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\omega_2 - \omega_1)\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} F(\xi, k) + \frac{6\omega_1\omega_2\alpha_2}{(\omega_2 - \omega_1)\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} E(\xi, k) \right\} \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}.$$

Prędkość kątowna

$$(3.11) \quad w = \frac{2\beta^2}{\sqrt{3}} c_\omega,$$

gdzie

$$(3.12) \quad w = \frac{\gamma}{g} \frac{r_z^2}{Q} \omega^2.$$

Wzory (3.6), (3.8), (3.10) i (3.11) opisują w sposób parametryczny powierzchnię graniczną w omawianym poczwórnie złożonym przypadku obciążenia rury. Parametrami są e/c_r , g/c_r , c_ω oraz dodatkowo stosunek promieni β .

4. Przypadki szczególne

Przeprowadzimy obecnie analizę kilku ważnych z praktycznego punktu widzenia szczególnych przypadków obciążenia.

4.1. Rozciąganie lub ściskanie z wirowaniem. W tym przypadku funkcja $p(x)$ sprowadza się do prostej postaci

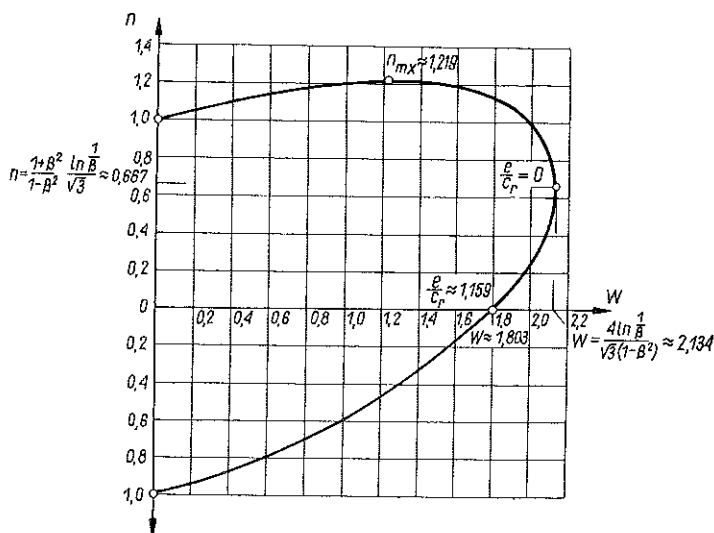
$$(4.1) \quad p(x) = \frac{x}{\sqrt{e^2 x^2 + c_r^2}}.$$

Przy założeniu braku ciśnień promieniowych ($q_w = q_z = 0$) bezwymiarowa siła podłużna i prędkość kątowna wyrażają się wyłącznie za pomocą funkcji elementarnych:

$$(4.2) \quad w = \frac{2}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} \left[\text{Arth} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^4 \frac{e^2}{c_r^2}}} - \text{Arth} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{e^2}{c_r^2}}} \right], \\ n = \frac{1+\beta^2}{4} w + \frac{\kappa_r c_r}{(1-\beta^2)e} \left[\sqrt{1+\frac{e^2}{c_r^2}} - \sqrt{1+\beta^4 \frac{e^2}{c_r^2}} \right].$$

Powyższe wzory stanowią parametryczne równanie poszukiwanej krzywej granicznej. Parametrami są e/c_r oraz dodatkowo β .

Krzywą graniczną dla przykładowo dobranego stosunku promieni $\beta = 1/2$ przedstawia w układzie współrzędnych n, w rys. 2. Godny uwagi jest fakt, że zastoso-



Rys. 2

wanie rozciągającej siły podłużnej poprawia nośność elementu osiągającą wartość maksymalną:

$$(4.3) \quad \bar{w} = \frac{4 \ln \frac{1}{\beta}}{\sqrt{3} (1 - \beta^2)},$$

dla $e/c_r = 0$. Jest to znane rozwiązanie dla płaskiego stanu odkształcenia.

4.2. Skręcanie z wirowaniem w płaskim stanie odkształcenia. Omówiony powyżej przypadek obciążenia wirującej rury grubościennej samą tylko siłą podłużną nie ma wielkiego znaczenia praktycznego. Dużo częściej w zastosowaniach technicznych spotykamy się z rurami wirującymi, przenoszącymi jednocześnie moment skręcający. Przyjęcie płaskiego stanu odkształcenia ($e=0$) upraszcza nieco rozważania. Funkcja $p(x)$ ma postać

$$(4.4) \quad p(x) = \frac{x}{\sqrt{g^2 x^3 + c_r^2}},$$

a wprowadzone we wzorach (3.4) i (3.5) wyrażenia $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2$ są odpowiednio równe:

$$(4.5) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \theta, \quad \alpha_1 = \theta, \quad \alpha_2 = \theta \sqrt{3},$$

gdzie

$$(4.6) \quad \theta = \left(\frac{g}{c_r} \right)^{2/3}.$$

Poszukiwane rozwiązanie na bezwymiarową prędkość kątową uzyskamy wstawiając wyznaczone powyżej wartości (4.5) do wzoru (3.6) i zakładając brak ciśnień promieniowych ($q_w = q_z = 0$). Otrzymujemy wówczas

$$(4.7) \quad w = \frac{2}{1 - \beta^2} \frac{\kappa_r}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arth} \frac{2\sqrt{t+t^4}}{1+\sqrt{3}+2t^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}(1+\sqrt{3})^2} \times \right. \\ \left. \times \Pi\left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k\right) - \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\zeta, k) \right] \Bigg|_{t_1=\theta-1}^{t_2=\beta-\theta-1}.$$

Moment skręcający wyraża się natomiast prostą funkcją elementarną:

$$(4.8) \quad m_s = -\frac{4}{3} \frac{\kappa_r}{(1 - \beta^4) \theta^{3/2}} \sqrt{\frac{t^4 + t}{t^4}} \Bigg|_{t_1=\theta-1}^{t_2=\beta-\theta-1}.$$

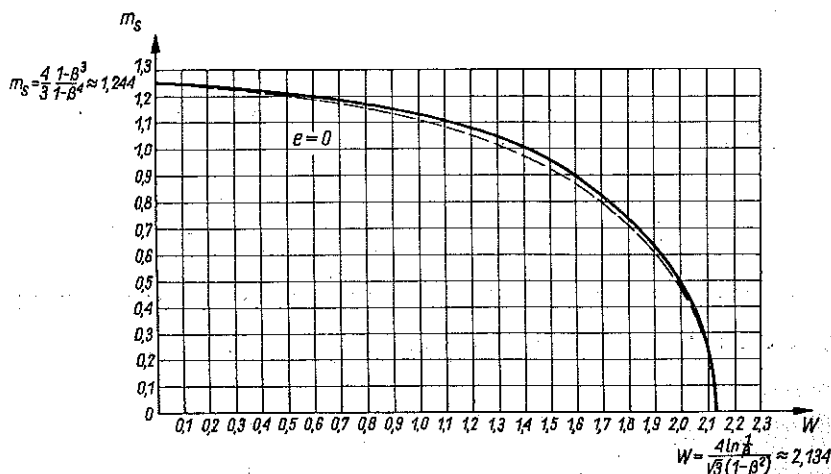
Zastosowano tu dla wygody nową zmienną

$$(4.9) \quad t = \frac{y}{\theta},$$

dzięki czemu parametr θ pojawia się tylko w granicach całkowania; wyrażenia k^2 i n podaje wzór (3.7). Wzory (4.7) i (4.8) są parametrycznymi równaniami krzywej granicznej. Parametrami są $\theta = (g/c_r)^{2/3}$ oraz dodatkowo stosunek promieni β . Zakładając w nich kolejno $\theta \rightarrow 0$ i $\theta \rightarrow \infty$ otrzymujemy znane rozwiązania elementarne dla «czystego wirowania» i «czystego skręcania»:

$$(4.10) \quad \bar{w} = \frac{4 \ln \frac{1}{\beta}}{\sqrt{3}(1 - \beta^2)}, \quad m_s = \frac{4}{3} \frac{1 - \beta^3}{1 - \beta^4}.$$

Krzywą graniczną dla przyjętego stosunku promieni $\beta = 1/2$ przedstawia linia ciągła na rys. 3.



Rys. 3

Otrzymane rozwiązanie jest dość kłopotliwe w praktycznych inżynierskich zastosowaniach zwłaszcza z powodu występujących tam całek eliptycznych pierwszego i trzeciego rodzaju. Interesująca jest więc możliwość wyprowadzenia bardzo prostej zależności aproksymacyjnej pozwalającej z wystarczająco dużą dokładnością wyznaczyć krzywą nośności granicznej. Przedstawimy w tym celu jeszcze raz w postaci całkowitej wyrażenia na bezwymiarową prędkość kątową i moment skręcający (uwzględniając oczywiście założenie $e = 0$):

$$(4.11) \quad w = \frac{2}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} \int_{\beta^2}^1 \frac{dx}{x \sqrt{1+\chi^2 x^3}}, \quad m_s = \frac{2\chi}{1-\beta^4} \int_{\beta^2}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\chi^2 x^3}},$$

gdzie

$$(4.12) \quad \chi = \frac{g}{c_r}.$$

Rozwijając wyrażenia podcałkowe w (4.11) na szeregi potęgowe w punkcie $\chi = 0$, a następnie całkując w przedziale $[\beta^2, 1]$ otrzymujemy

$$(4.13) \quad w = \frac{2}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} \left[2 \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1}{6} (1-\beta^6) \chi^2 + \frac{1}{16} (1-\beta^{12}) \chi^4 - \dots \right],$$

$$m_s = \frac{2\chi}{1-\beta^4} \left[\frac{1}{3} (1-\beta^6) - \frac{1}{12} (1-\beta^{12}) \chi^2 + \frac{1}{24} (1-\beta^{18}) \chi^4 - \dots \right].$$

Drugi z powyższych szeregów $m_s = m_s(\chi)$ można odwrócić do postaci $\chi = \chi(m_s)$ [13], skąd po wstawieniu do pierwszego uzyskamy

$$(4.14) \quad w = \frac{4 \ln \frac{1}{\beta}}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{(1+\beta^2)^2 (1-\beta^2)}{1-\beta^6} m_s^2 + \dots$$

Przyjmijmy obecnie następujące równania aproksymacyjne:

$$(4.15) \quad k_1 m_s^2 + k_2 w^2 + k_3 m_s^4 = 1.$$

Dla wyznaczenia współczynników k_1 , k_2 i k_3 napiszmy (4.15) w postaci $w = w(m_s)$ i rozwińmy na szereg potęgowy w punkcie $m_s = 0$:

$$(4.16) \quad w = \sqrt{\frac{1 - k_1 m_s^2 - k_3 m_s^4}{k_2}} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} - \frac{k_1}{2\sqrt{k_2}} m_s^2 - \dots$$

Porównując odpowiednie współczynniki w rozwinięciach (4.14) i (4.16) oraz uwzględniając, że dla $w = 0$, $m_s = \frac{4}{3} \frac{1-\beta^3}{1-\beta^4}$ otrzymujemy ostatecznie

$$(4.17) \quad k_1 = \frac{3}{8} \frac{(1-\beta^4)^2}{(1-\beta^6) \ln \frac{1}{\beta}}, \quad k_2 = \frac{3}{16} \frac{(1-\beta^2)^2}{\left(\ln \frac{1}{\beta}\right)^2},$$

$$(4.17) \quad k_3 = \frac{81}{256} \left(\frac{(1-\beta^4)}{(1-\beta^3)} \right)^4 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{1-\beta^3}{(1+\beta^3) \ln \frac{1}{\beta}} \right].$$

[e. d.]

Wzór (4.15) po wprowadzeniu wyrażeń (4.17) jest poszukiwanym aproksymacyjnym równaniem krzywej granicznej. Aproksymacja ta ma więc charakter aproksymacji Hermite'a przy uwzględnieniu dwóch warunków zgodności na osi w i jednego na osi m_s . W istocie liczba warunków zgodności jest większa, bowiem automatycznie zachodzi jeszcze zgodność pierwszych pochodnych w obu punktach brzegowych. Graficzny obraz tej krzywej dla $\beta = 1/2$ przedstawia linia przerywana na rys. 3. Błąd tej aproksymacji, liczony wzdłuż promienia, nie przekracza 2%.

4.3. Skręcanie z wirowaniem przy braku siły osiowej. Przy założeniu braku siły osiowej ($n = 0$) funkcja $p(x)$ przyjmuje postać (3.1). Załóżmy dalej we wzorze (3.6) $q_w - q_z = 0$, a w (3.8) dodatkowo $n = 0$, otrzymamy wówczas układ dwóch równań na bezwymiarową prędkość kątową, pozwalający tak dobrać pary parametrów e/c_r i g/c_r , aby był spełniony warunek $n = 0$:

$$(4.18) \quad w = \frac{2\alpha_r}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} \left[\operatorname{Arth} \frac{2\sqrt{y(\omega_2^3 - \omega_1^3) + 3y^2\omega_1\omega_2 + y^4}}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) + 2y^2} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\omega_2 - \omega_1)}{(\alpha_2 + \alpha_1)2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \operatorname{II} \left(\zeta, \frac{k^2}{n}, k \right) + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} F(\zeta, k) \right] \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}},$$

$$w = \frac{8\alpha_r}{(1-\beta^4)\alpha_1} \frac{e}{c_r} \left\{ \frac{\sqrt{(\omega_2 - \omega_1 + y)[y^2 + (\omega_2 - \omega_1)y + (\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2)]}}{[\alpha_1(\omega_2 - \omega_1 + y) + \alpha_2 y] \sqrt{y}} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} E(\zeta, k) - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2 + \alpha_1)}} F(\zeta, k) \right\} \Big|_{y_1=1}^{y_2=\beta^{-2}}.$$

Dla wyznaczonych drogą numeryczną parametrów e/c_r i g/c_r bezwymiarową prędkość kątową liczymy z któregośkolwiek z dwóch powyższych wzorów. Do obliczenia momentu skręcającego można wprost zastosować wzory (3.10).

Przykład krzywej granicznej dla przyjętego stosunku promieni $\beta = 1/2$ przedstawia linia ciągła na rys. 4.

Porównując otrzymaną krzywą nośności granicznej z rezultatami podanymi na rys. 3 stwierdzamy, że nośność elementu liczona przy założeniu braku siły osiowej ($n = 0$) jest niższa niż w płaskim stanie odkształcenia ($e = 0$).

Korzystanie przy obliczeniach numerycznych ze wzorów (4.18) i (3.10) jest bardzo czasochłonne. Szczególnie niewygodny jest opisany wyżej sposób doboru parametrów e/c_r i g/c_r w oparciu o równanie przestępne powstałe z porównania prawych stron w wyrażeniu (4.18).

Spróbujmy więc podobnie jak poprzednio wyprowadzić prostą zależność aproksymacyjną. W tym celu napiszmy wzory wyjściowe na bezwymiarowe obciążenia (2.10), (2.11) i (2.12) przy założeniach $q_w = q_z = 0$ i $n = 0$ w następującej formie:

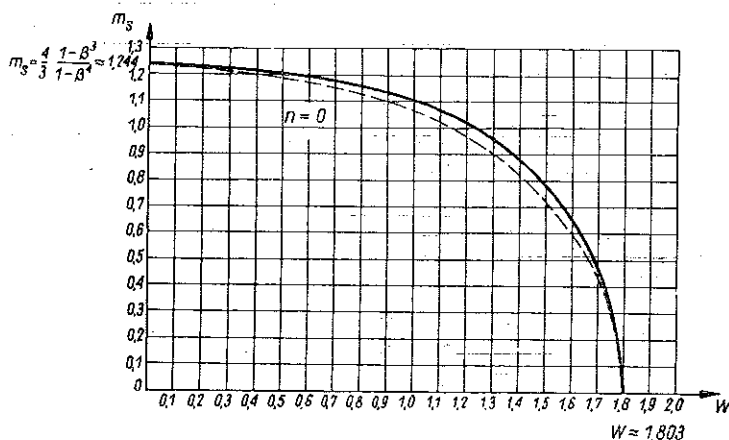
$$(4.19) \quad w = \frac{2}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} \psi \int_{\beta^2}^1 \frac{dx}{x^{5/2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} \varphi^2 + \frac{1}{x^3} \psi^2}},$$

$$w = -\frac{4}{1-\beta^4} \varphi \int_{\beta^2}^1 \frac{dx}{x^{1/2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} \varphi^2 + \frac{1}{x^3} \psi^2}},$$

$$m_s = \frac{2}{1-\beta^4} \int_{\beta^2}^1 \frac{x^{1/2} dx}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} \varphi^2 + \frac{1}{x^3} \psi^2}},$$

gdzie

$$(4.20) \quad \varphi = \frac{e}{g}, \quad \psi = \frac{c_r}{g}.$$



Rys. 4

Rozwińmy teraz wyrażenia podcałkowe na szeregi potęgowe w punkcie $g = \infty$, a następnie wykonajmy zaznaczone całkowania:

$$(4.21) \quad w = \psi (a_{00} + a_{10} \varphi^2 + a_{01} \psi^2 + \dots),$$

$$w = \varphi (b_{00} + b_{10} \varphi^2 + b_{01} \psi^2 + \dots),$$

$$m_s = c_{00} + c_{10} \varphi^2 + c_{01} \psi^2 + c_{20} \varphi^4 + c_{11} \varphi^2 \psi^2 + c_{02} \psi^4 + \dots,$$

przy czym współczynniki a_{ij} , b_{ij} i c_{ij} w powyższych wyrażeniach są prostymi funkcjami parametru β . Po odwróceniu pierwszych dwóch szeregów z (4.21) do postaci $\psi = \psi(w)$ oraz $\varphi = \varphi(w)$ i wprowadzeniu do trzeciego uzyskamy

$$(4.22) \quad m_s = c_0 + c_1 w^2 + \dots,$$

gdzie

$$(4.23) \quad c_0 = \frac{4}{3} \frac{1 - \beta^3}{1 - \beta^4}, \quad c_1 = \frac{c_{10}}{b_{00}^2} + \frac{c_{01}}{a_{00}^2}$$

oraz

$$(4.24) \quad a_{00} = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{1 - \beta^{-3}}{1 - \beta^2}, \quad b_{00} = -8 \frac{1 - \beta}{1 - \beta^4},$$

$$c_{10} = -2 \frac{1 - \beta}{1 - \beta^4}, \quad c_{01} = \frac{2}{3} \frac{1 - \beta^{-3}}{1 - \beta^4}.$$

Przyjmijmy obecnie podobnie jak poprzednio wzór aproksymacyjny

$$(4.25) \quad l_1 m_s^2 + l_2 w^2 + l_3 w^4 = 1.$$

Po napisaniu go w postaci $m_s = m_s(w)$ i rozwinięciu na szereg potęgowy w otoczeniu punktu $w = 0$ otrzymujemy

$$(4.26) \quad m_s = \sqrt{\frac{1 - l_2 w^2 - l_3 w^4}{l_1}} = \frac{1}{\sqrt{l_1}} - \frac{l_2}{2\sqrt{l_1}} w^2 - \dots$$

Porównując odpowiednie współczynniki w rozwinięciach (4.22) i (4.26) oraz uwzględniając, że dla $m_s = 0$, $w = \tilde{w} \approx 1,803$ otrzymamy

$$(4.27) \quad l_1 = \frac{1}{c_0}, \quad l_2 = -2 \frac{c_1}{c_0}, \quad l_3 = \frac{1 + 2 \frac{c_1}{c_0}}{w^4}.$$

Równanie (4.25) po uwzględnieniu (4.27), (4.23) i (4.24) jest szukanym równaniem aproksymacyjnym krzywej granicznej typu Hermite'a. Graficznym obrazem równania (4.25) dla przykładowo przyjętej wartości $\beta = 1/2$ jest linia przerywana na rys. 4. Błąd omówionej aproksymacji jest większy niż w przypadku poprzednim, lecz nie przekracza 3%.

5. Stan graniczny przy niestabilnym wirowaniu rury

Zajmijmy się obecnie innym przypadkiem, rurą wirującą z niejednostajną prędkością kątową ω , obciążoną siłą podłużną n , różnicą ciśnień promieniowych $p_{wr} - p_{zr}$ i ciśnieniem stycznym $p_{w\theta}$ (zakładając dla prostoty $p_{z\theta} = 0$, napęd rury «od środka»). Rozważania będziemy prowadzić przy warunku płaskiego stanu odkształcenia $e = 0$.

5.1. Dyskusja możliwych schematów zniszczenia. Jak wspomniano w uwagach wstępnych, w przypadku występowania ciśnień stycznych o kierunku obwodowym zniszczenie może nastąpić albo przez uplastycznienie całej objętości rozważanego elementu — «zniszczenie objętościowe», albo przez «obwodowe spłynięcie» warstwy materiału na powierzchni zewnętrznej lub wewnętrznej (w zależności od miejsca przyłożenia ciśnień stycznych) — «zniszczenie powierzchniowe».

Aby podać warunki, przy których występuje określony typ zniszczenia (objętościowy lub powierzchniowy), zajmijmy się analizą funkcji $p(x)$ zdefiniowanej

wyrażeniem (2.8). W rozważanym przypadku obciążenia funkcja $p(x)$ jest funkcją dwóch parametrów: obciążeniowego c_e i przemieszczeniowego c_r oraz dodatkowo stosunku promieni β i zmiennej x . Zakładając we wzorze (2.16) $e = g = 0$, otrzymujemy

$$(5.1) \quad p(x) = \sqrt{\frac{-\frac{1}{4}c_e^2\beta^4 x^4 + (1 + \frac{1}{2}c_e^2\beta^4)x^2 - \frac{1}{4}c_e^2\beta^4}{c_r^2}}$$

W przedziale $x \in [\beta^2, 1]$ przy założeniu $p_{z0} = 0$ funkcja $p(x)$ jest monotoniczna, stale rosnąca (intensywność odkształceń maleje ze wzrostem promienia).

Przy założeniu wyczerpania nośności granicznej elementu przez zniszczenie objętościowe musi ona spełniać podwójną nierówność

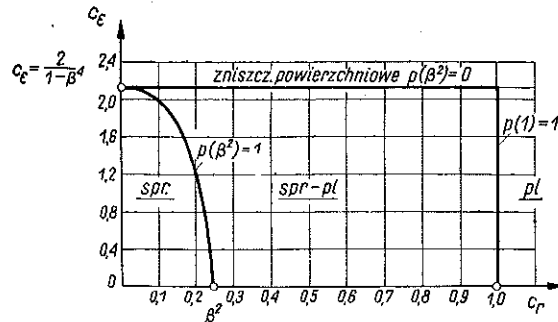
$$(5.2) \quad 0 < p(x) \leq 1.$$

Nierówność ta jest z jednej strony mocna, gdy bowiem kres dolny funkcji $p(x)$ osiągnie 0, to pojawi się już zniszczenie powierzchniowe.

Warunek (5.2) można zatem napisać w postaci dwóch pojedynczych nierówności

$$(5.3) \quad p(\beta^2) > 0, \quad p(1) \leq 1,$$

które po wprowadzeniu (5.1) dają proste ograniczenia na parametry



Rys. 5

$$(5.4) \quad c_e < \frac{2}{1 - \beta^4}, \quad c_r \geq 1.$$

Dla strefy sprężysto-plastycznej musi być spełniony warunek

$$(5.5) \quad p(\beta^2) \leq 1,$$

skąd po prostych przeliczeniach otrzymujemy

$$(5.6) \quad c_r^2 \frac{1}{\beta^4} + c_e^2 \frac{(1 - \beta^4)^2}{4} \geq 1.$$

Granicę strefy sprężystej i sprężysto-plastycznej opisuje zatem na płaszczyźnie parametrów c_e i c_r elipsa o półosiach

$$(5.7) \quad c_e = \frac{2}{1 - \beta^4}, \quad c_r = \beta^2.$$

Wszystkie trzy strefy: sprężystą, sprężysto-plastyczną i plastyczną pokazuje w układzie c_e, c_r rys. 5. Widać stąd, że w omawianym przypadku uplastycznienie rozpoczyna się zawsze na średnicy wewnętrznej rury postępując dalej w kierunku na zewnątrz. O ile ciśnienie styczne nie jest zbyt duże, proces ten kończy się uplastycznieniem skrajnych włókien elementu; przy większych jednak ciśnieniach stycznych, zanim ten stan zostanie osiągnięty, nastąpi spłynięcie materiału na powierzchni wewnętrznej, co oznacza «przedwczesne» zniszczenie elementu.

5.2. Analiza obciążeń, powierzchnia graniczna. Zajmijmy się obecnie wyznaczeniem równania powierzchni granicznej. Wychodząc ze wzorów (2.4), (2.10), (2.11) i (2.14) można napisać następujące wyrażenia na obciążenia:

$$\begin{aligned}
 q_w - q_z &= -\frac{c_w \beta^2 (1 - \beta^2)}{\sqrt{3}} + \frac{c_r}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^1 \frac{p(x)}{x^2} dx, \\
 \omega &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g Q \beta^2}{\gamma r_z^2 c_w} \right)^{1/2}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g Q \beta^2}{\gamma r_z^2} c_e, \\
 \bar{n} &= \frac{1 + \beta^2}{2(1 - \beta^2)} (q_w - q_z) + \frac{\beta^2 (1 + \beta^2)}{2\sqrt{3}} c_w, \\
 t_{w0} &= \frac{1 - \beta^4}{2} c_e.
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Tylko trzy spośród powyższych obciążeń są niezależne, np $q_w - q_z$, ω i $d\omega/dt$. Występująca w wyrażeniach (5.8) całka jest całką eliptyczną:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{-\frac{1}{4} c_e^2 \beta^4 x^4 + (1 + \frac{1}{2} c_e^2 \beta^4) x^2 - \frac{1}{4} c_e^2 \beta^4}}{x^2} dx.
 \tag{5.9}$$

Stosując podstawienie

$$x = \alpha_1 \cos \vartheta
 \tag{5.10}$$

można ją sprowadzić do postaci

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \operatorname{tg}^2 \vartheta \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \sin^2 \vartheta} d\vartheta,
 \tag{5.11}$$

gdzie

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{1 + \frac{1}{2} c_e^2 \beta^4 \pm \sqrt{1 + c_e^2 \beta^4}}{\frac{1}{2} c_e^2 \beta^4}.
 \tag{5.12}$$

Całka typu (5.11) sprowadza się do całek w postaci normalnej następująco:

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{tg}^2 \vartheta \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta &= \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \vartheta} \operatorname{tg} \vartheta + \\
 &+ \frac{2p^2 - 1}{p} F\left(\varphi, \frac{1}{p}\right) - 2pE\left(\varphi, \frac{1}{p}\right),
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

przy czym oznaczono tu

$$p = \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}} > 1, \quad \varphi = \operatorname{arc} \sin (p \sin \vartheta).
 \tag{5.14}$$

Po zastosowaniu wzoru (5.13) i wykonaniu kilku przekształceń otrzymujemy ostatecznie następujące równanie powierzchni granicznej:

$$(5.15) \quad q_w - q_z = -\frac{\beta^2(1-\beta^2)}{\sqrt{3}} c_w + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt[4]{1+c_s^2\beta^4} \times \\ \times \left[\sqrt{1-p^2\sin^2\vartheta} \operatorname{tg}\vartheta + \frac{2p^2-1}{p} F\left(\varphi, \frac{1}{p}\right) - 2pE\left(\varphi, \frac{1}{p}\right) \right] \Bigg|_{\vartheta_1=\arccos\frac{1}{\alpha_1}}^{\vartheta_2=\arccos\frac{\beta^2}{\alpha_1}}$$

Wzór (5.15) mimo stosunkowo prostej budowy jest bardzo niewygodny w praktycznych zastosowaniach. Moduł występujących tu całek eliptycznych jest bowiem bliski 1 (np dla $\beta = 1/2$, $1/p > 0,99$), a argument jest bliski $\pi/2$. Przy wyznaczaniu wartości tych całek nie można więc posługiwać się tablicami lecz trzeba stosować dość kłopotliwe rozwinięcia. I tak wg BYRDA i FRIEDMANA [2] (stosując przyjętą tam symbolikę) można posługiwać się wzorami

dla całki pierwszego rodzaju

$$(5.16) \quad F(\varphi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{m} k'^{2m} \varrho_{2m}(\varphi), \quad [0 < k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi < 1; k^2 < 1], \\ \varrho_0(\varphi) = \ln \frac{1+\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \varrho_2(\varphi) = \frac{\sin \varphi \sec^2 \varphi}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ \varrho_4(\varphi) = \frac{1}{8} \left[2 \sin^3 \varphi \sec^4 \varphi - 3 \sin \varphi \sec^2 \varphi + 3 \ln \frac{1+\sin \varphi}{\cos \varphi} \right], \\ \varrho_{2m}(\varphi) = \frac{1}{2m} [\sin^{2m-1} \varphi \sec^{2m} \varphi + (1-2m) \varrho_{2m-2}(\varphi)],$$

dla całki drugiego rodzaju

$$(5.17) \quad E(\varphi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{m} k'^{2m} d_{2m}(\varphi), \quad [0 < k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi < 1; k^2 < 1], \\ d_0(\varphi) = \sin(\varphi), \quad d_2(\varphi) = -\sin \varphi + \ln \frac{1+\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ d_4(\varphi) = \frac{1}{2} \left[\sin^3 \varphi \sec^2 \varphi + 3 \sin \varphi - 3 \ln \frac{1+\sin \varphi}{\cos \varphi} \right], \\ d_{2m}(\varphi) = \frac{1}{2(m-1)} [\sin^{2m+1} \varphi \sec^{2(m+1)} \varphi + (1-2m) d_{2(m+1)}(\varphi)], \quad m \neq 1,$$

gdzie $k' = \sqrt{1-k^2}$ oznacza moduł uzupełniający.

W przypadku bardzo dużych kątów φ , gdy nie jest spełniony warunek

$$(5.18) \quad 0 < k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi < 1,$$

szeregi (5.16) i (5.17) są rozbieżne.

Można wówczas zastosować następujące przekształcenia:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \mathbf{K}(k) - \int_\varphi^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \\ E(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \mathbf{E}(k) - \int_\varphi^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Wprowadzając nową zmienną

$$(5.20) \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$$

i dokonując odpowiednich przekształceń, obie całki można napisać w postaci

$$(5.21) \quad \begin{aligned} F(\varphi, k) &= \mathbf{K}(k) - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \int_0^{\pi/2 - \varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \sin^2 \theta}}, \\ E(\varphi, k) &= \mathbf{E}(k) - \sqrt{1 - k^2} \int_0^{\pi/2 - \varphi} \sqrt{1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Rozwińmy następnie wyrażenia podcałkowe na szeregi potęgowe, pamiętając o tym, że w rozważanych przypadkach kąt φ jest bliski $\pi/2$. W uzyskanych szeregach wygodnie jest jeszcze w celu uniknięcia odejmowania bliskich sobie wartości rozwinąć parzyste potęgi funkcji $\sin \vartheta$ na szeregi potęgowe zmiennej ϑ , a dopiero potem całkować. Otrzymamy ostatecznie, po uporządkowaniu, następujące nieskomplikowane rozwinięcia:

dla całki pierwszego rodzaju

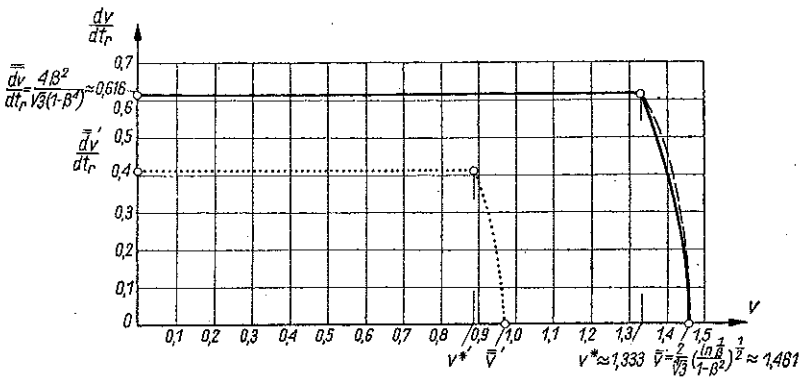
$$(5.22) \quad \begin{aligned} F(\varphi, k) &= \mathbf{K}(k) - \mu_1 \vartheta + \mu_3 \vartheta^3 - \mu_5 \vartheta^5 + \mu_7 \vartheta^7 - \dots, \\ \mu_1 &= (1 - k^2)^{-1/2}, \quad \mu_3 = \frac{1}{6} k^2 (1 - k^2)^{-3/2}, \\ \mu_5 &= \frac{1}{30} k^2 (1 - k^2)^{-3/2} + \frac{3}{40} k^4 (1 - k^2)^{-5/2}, \\ \mu_7 &= \frac{1}{315} k^2 (1 - k^2)^{-3/2} + \frac{1}{28} k^4 (1 - k^2)^{-5/2} + \frac{5}{112} k^6 (1 - k^2)^{-7/2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

dla całki drugiego rzędu

$$(5.23) \quad \begin{aligned} E(\varphi, k) &= \mathbf{E}(k) - \nu_1 \vartheta - \nu_3 \vartheta^3 + \nu_5 \vartheta^5 - \nu_7 \vartheta^7 + \dots, \\ \nu_1 &= (1 - k^2)^{1/2}, \quad \nu_3 = \frac{1}{6} k^2 (1 - k^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

$$(3.23) \quad \begin{aligned} v_5 &= \frac{1}{30} k^2 (1 - k^2)^{1/2} + \frac{1}{40} k^4 (1 - k^2)^{-3/2}, \\ \text{[c. d.]} \quad v_7 &= \frac{1}{315} k^2 (1 - k^2)^{-1/2} + \frac{1}{84} k^4 (1 - k^2)^{-3/2} - \frac{1}{112} k^6 (1 - k^2)^{-5/2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Przy stosowaniu wzorów (5.22) i (5.23) występujące tam całki eliptyczne K i E można albo odczytywać z dokładnych tablic pełnych całek eliptycznych [5], albo posługiwać się znanymi rozwinięciami [2 i 6].



Rys. 6

Najwygodniejsze są tu następujące szeregi (wg [6]):

dla całki pierwszego rodzaju

$$(5.24) \quad K(k) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{1.2}\right) k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{1.2} - \frac{2}{3.4}\right) k'^4 + \\ + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{1.2} - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6}\right) k'^6 + \dots,$$

dla całki drugiego rodzaju

$$(5.25) \quad E(k) = 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) k'^2 + \frac{12.3}{22.4} \left(1 - \frac{2}{1.2} - \frac{1}{3.4}\right) k'^4 + \\ + \frac{12.32.5}{22.42.6} \left(1 - \frac{2}{1.2} - \frac{2}{3.4} - \frac{1}{5.6}\right) k'^6 + \dots,$$

gdzie oznaczono

$$(5.26) \quad \Lambda = \ln \frac{4}{k'}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

Przy praktycznym korzystaniu z równania powierzchni granicznej (5.15) należy pamiętać oczywiście o wyprowadzonym ograniczeniu dla parametru c_0 (5.4).

Pełny obraz krzywej granicznej z uwzględnieniem wyników dyskusji (5.4) dla $q_w = q_z = 0$ i $\beta = 1/2$ przedstawia rys. 6.

Dla wygody wprowadzono tu nowe oznaczenia:

na bezwymiarową prędkość kątową

$$(5.27) \quad v = \sqrt{w} = \sqrt{\frac{\gamma r_z^2}{gQ}} \omega$$

oraz bezwymiarowe przyspieszenie kątowe

$$(5.28) \quad \frac{dv}{dt_r} = \sqrt{\frac{\gamma r_z^2}{gQ}} \frac{d\omega}{dt}$$

przy czym t_r jest bezwymiarowym czasem

$$(5.29) \quad t_r = \frac{t}{\sqrt{\frac{\gamma r_z^2}{gQ}}}$$

Prędkość kątowa $v^* \approx 1,333$, wyznaczona na drodze numerycznej, dzieli krzywą nośności granicznej na dwie części, z których jedna opisana jest równaniem (5.15), a druga (prostoliniowa) pierwszym ze związków (5.4).

Wyprowadzimy obecnie dla krzywoliniowej części krzywej granicznej równanie aproksymacyjne. W tym celu napiszmy raz jeszcze w postaci całkowitej wyrażenie na różnicę ciśnień:

$$(5.30) \quad q_w - q_z = -\frac{c_\omega \beta^2 (1 - \beta^2)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\beta^2}^1 \sqrt{1 - \frac{c_\omega^2 \beta^4 (1 - x^2)^2}{4} \frac{dx}{x}}$$

Stosując rozwinięcia wyrażenia podcałkowego na szereg potęgowy w otoczeniu punktu $c_\omega = 0$ po uwzględnieniu (5.28) i (5.29) i pominięciu ciśnień promieniowych otrzymamy

$$(5.31) \quad v^2 = \frac{4 \ln \frac{1}{\beta}}{\sqrt{3}(1 - \beta^2)} - \frac{\sqrt{3}}{16(1 - \beta^2)} \left(\frac{1 - \beta^4}{2} - 4 \ln \frac{1}{\beta} + \frac{1 - \beta^4}{2\beta^4} \right) \left(\frac{dv}{dt_r} \right)^2 - \dots$$

Przyjmijmy obecnie następującą postać wzoru aproksymacyjnego:

$$(5.32) \quad m_1 v^4 + m_2 \left(\frac{dv}{dt_r} \right)^2 + m_3 \left(\frac{dv}{dt_r} \right)^4 = 1.$$

Postępując podobnie jak poprzednio napiszemy:

$$(5.33) \quad v^2 = \sqrt{\frac{1 - m_2 \left(\frac{dv}{dt_r} \right)^2 - m_3 \left(\frac{dv}{dt_r} \right)^4}{m_1}}$$

a po rozwinięciu na szereg potęgowy w otoczeniu $dv/dt_r = 0$

$$(5.34) \quad v^2 = \frac{1}{\sqrt{m_1}} - \frac{m_2}{2\sqrt{m_1}} \left(\frac{dv}{dt_r} \right)^2 - \dots$$

Porównując odpowiednie współczynniki w rozwinięciach (5.32) i (5.34) oraz zakładając, że dla $v = v^*$

$$\frac{\overline{dv}}{dt_r} = \frac{4\beta^2}{\sqrt{3}(1-\beta^4)}$$

otrzymamy współczynniki m_1 , m_2 i m_3 w równaniu (5.32):

$$(5.35) \quad m_1 = \frac{3}{16} \left(\frac{1-\beta^2}{\ln \frac{1}{\beta}} \right)^2,$$

$$m_2 = \frac{3}{32 \ln \frac{1}{\beta}} \left(\frac{1-\beta^4}{2} - 4 \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1-\beta^4}{2\beta^4} \right),$$

$$m_3 = \frac{1}{(\overline{dv}/dt_r)^4} \left[1 - m_1 v^{*4} - m_2 \left(\frac{\overline{dv}}{dt_r} \right)^2 \right].$$

Wzór (5.32) po uwzględnieniu (5.35) jest poszukiwanym równaniem aproksymacyjnym. Krzywą opisaną tym równaniem przedstawia dla $\beta = 1/2$ linia przerywana na rys 6. Błąd powyższej aproksymacji nie przekracza 1%.

6. Optymalny rozruch cylindra

Sformułujmy obecnie następujące zagadnienie: w jaki sposób powinna narastać prędkość kątowa wprawionego w ruch obrotowy cylindra, aby w każdej chwili była wyczerpana nośność graniczna elementu. Taki rozruch z zastosowaniem odpowiedniego współczynnika bezpieczeństwa, którego wprowadzenie omówimy później, będziemy w dalszym ciągu nazywali «rozruchem optymalnym». Rozważania będziemy prowadzić stosując przyjęte uprzednio bezwymiarowe oznaczenia (5.24), (5.25) i (5.26).

W początkowej fazie ruchu (co widać wprost z wykresu na rys. 6) «optymalna» prędkość kątowa jest liniową funkcją czasu, bowiem wtedy

$$(6.1) \quad \frac{dv}{dt_r} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\beta^2}{1-\beta^4} = \text{const.}$$

Po osiągnięciu jednak wartości $v = v^*$ przyspieszenie kątowe musi się zmniejszać osiągając przy $v = \overline{v}$ wartość 0.

Przyjmijmy dla opisu tej drugiej fazy ruchu następujące równanie aproksymacyjne [prostsze od równania podanego poprzednio (5.32), by nie komplikować rachunków]:

$$(6.2) \quad p_1 v^2 + p_2 \left(\frac{dv}{dt_r} \right)^2 = 1.$$

Współczynniki p_1 i p_2 można wyznaczyć z warunków:

$$(6.3) \quad \frac{dv}{dt_r} = 0 \quad \text{dla} \quad v = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\ln \frac{1}{\beta}}{1 - \beta^2} \right)^{1/2} \approx 1,461$$

oraz

$$(6.4) \quad \frac{dv}{dt_r} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\beta^2}{1 - \beta^4} \approx 0,616 \quad \text{dla} \quad v = v^* \approx 1,333.$$

Są to proste funkcje parametru β :

$$(6.5) \quad p_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1 - \beta^2}{\ln \frac{1}{\beta}},$$

$$p_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1 - \beta^4}{\beta^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1 - \beta^2}{\ln \frac{1}{\beta}} v^{*2} \right).$$

Równanie różniczkowe (6.2) jest równaniem o rozdzielonych zmiennych, którego rozwiązaniem jest funkcja

$$(6.6) \quad v = p_1^{-1/2} \sin \left[(t_r - t_r^0) \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/2} \right].$$

Stałą t_r^0 wyznaczamy z warunku

$$(6.7) \quad v(t_r^*) = v^*$$

pamiętając, że

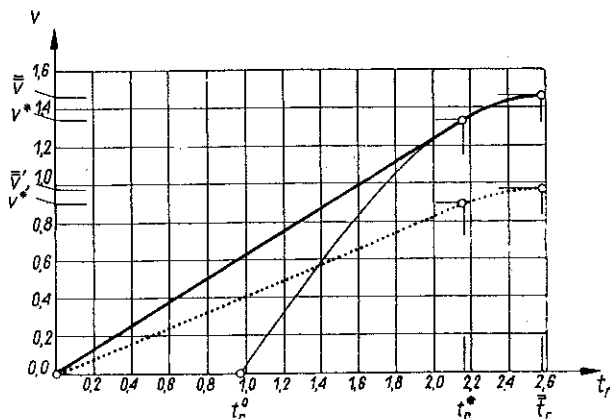
$$(6.8) \quad \frac{v^*}{t_r^*} = \frac{\overline{dv}}{dt_r} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\beta^2}{1 - \beta^4},$$

gdzie przez t_r^* oznaczono zredukowany czas, po jakim zostaje osiągnięta prędkość kątowna v^* . Stąd po prostych przekształceniach znajdziemy

$$(6.9) \quad t_r^0 = \frac{v^*}{\overline{dv}/dt_r} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/2} \arcsin(p_1^{1/2} v^*).$$

Wzory (6.1) i (6.6) opisują poszukiwaną zależność prędkości kątownej od czasu przy założeniu wyczerpania nośności granicznej elementu. Odcinek prostej (6.1) jest

styczny do sinusoidy (6.6) w punkcie $t_r = t_r^*$, co wynika z ciągłości wykresu $dv/dt_r = dv/dt_r(v)$ na rys. 6. Przykładowy przebieg «optimalnego» rozruchu dla $\beta=1/2$ przedstawia rys. 7.



Rys. 7

Użytego w powyższym omówieniu terminu «optimalny» nie należy rozumieć dosłownie. W rzeczywistości bowiem wprowadzając pewien współczynnik bezpieczeństwa n , każdą z wartości na rys. 6 trzeba n -krotnie zmniejszyć i dopiero tak otrzymany wykres może służyć do realizacji najkorzystniejszych warunków rozruchu. Wykresy takie dla przykładowej wartości $n = 1,5$ przedstawiają linie kropkowane na rys. 6 i 7.

Na zakończenie pragnę podziękować prof. dr M. ŻYCZKOWSKIEMU za pomoc i cenne wskazówki przy wykonywaniu pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Рапопорт, *Таблицы эллиптических интегралов*, Изд. АН СССР, Москва 1962-3.
2. P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
3. И. Н. Данилова, *О влиянии величины расточки на несущую способность ротора*, Изв. АН СССР.
4. E. A. DAVIS, F. M. CONNELLY, *Stress distribution and plastic deformation in rotating cylinders of strain-hardening material*, Trans. of the ASME E26 1 (1959), 25-30.
5. С. Е. FRÖBERG, *Complete Elliptic Integrals*, table nr 2, CWK Gleerup, Lund Haken Ohlssons Bortryckeri 1957.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1962.
7. P. G. HODGE, M. BALABAN, *Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder*, Inter. J. Mech. Scie., 4 (1962), 465-476.

8. Н. С. Курдин, *Упруго-пластическое состояние стержня находящегося под действием центробежных сил и крутящего момента*, Изв. АН СССР, отд. тех. наук, 3 (1959), 152–153.
9. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność*, PWN, Warszawa 1962.
10. Ю. В. Немировский, *Об упруго-пластическом равновесии и несущей способности полой вращающейся трубы*, Изв. АН СССР, отд. тех. и мех. и машиностр., 3 (1959), 148–151.
11. F. P. J. RIMROTT, *On the plastic behavior of rotating cylinders*, Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs. A-65, 7 (1959).
12. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Stan graniczny rury grubościennej przy jednoczesnym skręcaniu, rozciąganiu i różnicy ciśnień*, 2, 13 (1965), 281–296.
13. M. ŻYCZKOWSKI, *Operations on Generalized Power Series*, ZAMM 45 (1965), 235–244.
14. M. ŻYCZKOWSKI, *The limit state of a thick-walled tube in a general circularly symmetrical case*, Arch. Mech. Stos., 2, 8 (1956), 155–178.
15. M. ŻYCZKOWSKI, *Certain general formulae for plane circularly symmetric plastic states*, Arch. Mech. Stos., 4, 10 (1958), 463–478.

Резюме

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ В НЕКОТОРЫХ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЯХ НАГРУЗКИ

В работе дается несколько новых решений, для сложных случаев нагрузки толстостенной трубы, со специальным учетом массовых сил, возникших вследствие равномерного или неравномерного движения.

Для четырех-кратно сложного случая: одновременного действия нормальных давлений, продольной силы, крутящего момента и массовых сил в радиальном направлении, выводятся уравнения граничной поверхности (3.6), (3.8), (3.10) и (3.11). Решение выражается эллиптическими интегралами, причем в приведенных формулах они сводятся к нормальному виду. В особенности, случай сложения крутящего момента и массовых сил может иметь практическое значение так как при вращении трубы, на нее действует, как правило, крутящий момент. Решение в данном случае получено при двух предположениях:

- 1) плоского деформированного состояния (4.7) и (4.8),
- 2) отсутствия осевой силы (4.18).

В обоих случаях даются, также, простые аппроксимационные формулы типа Гермита (4.15) и (4.25), дающие возможность с достаточной точностью вычислять граничные кривые.

Массовые силы возникшие при неравномерном вращении учитываются вместе с касательными давлениями, окружными и нормальными, радиальными. Обсуждение проводилось при предположении плоского деформированного состояния. Конечные уравнения (5.15) так как и раньше представлены здесь в форме удобной для численных расчетов, выражая все величины в безразмерном виде. Обсуждает также область важности полученных решений при предположении исчерпания несущей способности во всем объеме материала (объемное разрушение). Для криволинейной части полученной таким способом граничной кривой (рис. 6), дается также удобная аппроксимационная формула (5.32).

Основываясь на приближенном решении (6.1), анализируется оптимальный запуск цилиндра при предположении исчерпания несущей способности.

Для всех рассмотренных в работе вопросов даются примеры численных расчетов и построения граничных кривых.

Summary

THE LIMIT STATE OF A ROTATING CIRCULAR TUBE
UNDER COMBINED LOADS

A number of new solutions are given for combined loads of a thick-walled tube with special consideration of the mass forces resulting from steady or non-steady rotation.

In the quadruple case of combined normal pressure, longitudinal force, torque and radial mass force the equations of the limit surface (3.6) (3.8) (3.10) and (3.11) are derived. The solution is expressed in terms of elliptic integrals reduced to the normal form. In particular, the combination of a torque and a mass force may be of practical importance, because if the tube rotates it is acted on as a rule by a torque. Solution is obtained with the assumption of

- 1) plane strain, (4.7) and (4.8),
- 2) no axial force, (4.18).

In both cases simple approximation formulae of the Hermitian type (4.15), (4.25) are also given thus enabling the computation of a limit curve with sufficient accuracy.

The mass forces produced during non-steady rotation are taken into consideration together with the tangential (circumferential) and normal (radial) pressures. Plane strain is assumed. The final equation (5.15) is given, as before, in a form suitable for numerical computation, expressing all the quantities in a dimensionless form. The validity range of the solutions obtained is also discussed assuming that the limit load is reached in the entire volume of the material (volume destruction). For the curvilinear part of the limit curve obtained in this manner (Fig. 6) a convenient approximation relation is given, (5.32).

On the basis of the approximate solution (6.1) the optimum starting process of the cylinder is discussed assuming that the limit load is reached.

For all the problems discussed examples of numerical computation are given as well as examples of drawing of the limit curves.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji 17 lutego 1966 r.
