

STATECZNOŚĆ PEWNYCH NIEPRYZMATYCZNYCH I NIEJEDNORODNYCH PRĘTÓW ŚCISKANYCH SIŁĄ ŚLEDZĄCĄ

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Badanie stateczności układów sprężystych poddanych działaniu obciążenia niekonserwatywnego jest od kilku już lat przedmiotem zainteresowania wielu autorów; jako pierwszych należy wymienić W. J. REUTA [12] i B. J. NIKOLAI [10]. B. J. NIKOLAI wykazał, że stosowanie statycznego kryterium stateczności w tych problemach prowadzi do wyników błędnych i wprowadził po raz pierwszy tak zwane kinetyczne kryterium stateczności. Polega ono na obliczaniu siły krytycznej, której odpowiada zamiana ustalonych drgań układu na drgania nieustalone. Wiele uwagi poświęcono obliczaniu obciążeń krytycznych w przypadku śledzącego działania siły, tzn. gdy kierunek siły jest zawsze styczny do osi odkształconego pręta na swobodnym końcu. Wymienić tu należy prace M. BECKA [1], K. S. DEJNEKI, M. J. LEONOWA [3], A. PFLÜGERA [11], H. ZIEGLERA [16] i G. JU DŻANIELIDZE [4]. Obszerny przegląd prac wydanych do roku 1959, dotyczących rozwoju niekonserwatywnych problemów teorii stateczności prętów, zawiera praca L. M. ZORII i M. JA. LEONOWA [17], a wiele konkretnych zagadnień przytoczono w książce W. W. BOLOTINA [2].

W dalszym ciągu kinetycznym kryterium stateczności zajęli się szczegółowo Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI [7], którzy dokonali analizy dokładności metody energetycznej, stosowanej przy uwzględnieniu tego kryterium w przypadku obciążenia pręta jednostronnie utwierdzonego siłą śledzącą, działającą na końcu swobodnym. W pracy [8] ci sami autorzy zbadali zależność siły krytycznej od tzw. współczynnika śledzenia, który zdefiniowano jako stosunek kąta zawartego między kierunkiem siły (po wyboczeniu pręta), a nieodkształconą osią pręta do kąta nachylenia stycznej na swobodnym końcu. Analizę problemu przeprowadzono tu w sposób ścisły badając drgania układu o nieskończonej liczbie stopni swobody oraz metodą energetyczną.

Dalszy rozwój tego zagadnienia zmierza w kierunku lepszego zbliżenia teoretycznego modelu do warunków rzeczywistych, a więc do uwzględnienia szeregu czynników takich jak tarcie, ciśnienie boczne i inne.

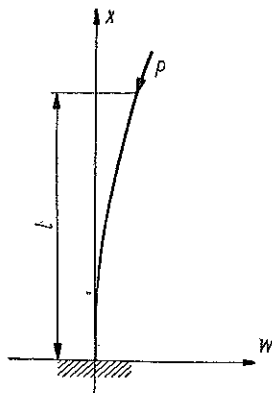
L. M. ZORII i M. JA. LEONOW [19] na prostym przykładzie «podwójnego wahadła» obciążonego siłą śledzącą wykazali, że już małe tarcie może istotnie zmieniać obszar stateczności układów niekonserwatywnych, a w pracy [18] ci sami autorzy badali wpływ tarcia dla pręta wspornikowego z dwoma masami skupionymi odległymi

od siebie, umieszczonymi na końcu swobodnym. Podjęto również próbę (Z. KORDAS [9]) rozwiązania problemu stateczności pręta jednostronnie utwierdzonego, znajdującego się w równoległym strumieniu płynu przy jednoczesnym uwzględnieniu ciśnień bocznych i siły czołowej.

Wszystkie wymienione powyżej prace zajmowały się statecznością układów niekonserwatywnych o stałej sztywności (grubości) i jednorodnych. Obecnie przeprowadzimy analizę stateczności prętów obciążonych siłą śledzącą, o zmiennej w pewien sposób sztywności lub niejednorodnych, albo o zmiennej sztywności i niejednorodnych. Wobec dużych trudności w rozwiązaniu równania ścisłego tego problemu posłużymy się tu metodą «małego parametru», wykorzystując rozwiązanie ścisłe dla pręta pryzmatycznego podane w pracy [8].

Metoda małego parametru, powszechnie stosowana w wielu działach fizyki i mechaniki, znalazła również zastosowanie przy badaniu stateczności konserwatywnych układów sprężystych o zmiennej sztywności, w szczególności przy stateczności prętów w pracach [15, 6, 5] oraz płyt [13]. Pomimo istnienia szeregu rozwiązań ścisłych dla prętów (np. [20]) metoda ta może również i tu oddać pewne usługi w przypadkach niewielkich zmian sztywności lub niewielkich niejednorodności. W niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności pręta pozwoli nam na określenie wpływu małej zmiany sztywności lub niejednorodności na siłę krytyczną oraz częstość drgań układu w chwili utraty stateczności.

W odróżnieniu od rozwiązań podanych dla prętów obciążonych siłą eulerowską, gdzie rozwijano na szereg małego parametru tylko funkcję ugięcia i siłę ściskającą, w naszym przypadku trzeba będzie rozwijać na szereg jeszcze częstość drgań układu, co znacznie skomplikuje stosowanie tej, prostej w innych przypadkach, metody.



Rys. 1

2. Sformułowanie zagadnienia

W dalszym ciągu będziemy badali sprężysty pręt utwierdzony o długości l , ściskany siłą śledzącą, działającą na swobodny koniec (rys. 1). Założymy, że moment bezwładności przekroju pręta, moduł Younga i gęstość materiału są funkcjami zmiennej x . Do rozważań przyjmujemy klasyczne równanie małych drgań poprzecznych pręta z uwzględnieniem działania siły podłużnej:

$$(2.1) \quad [E(x)J(x)w''']'' + Pw'' + m(x)\ddot{w} = 0,$$

gdzie $E(x)J(x)$ jest to zmienna sztywność pręta, P siła ściskająca, $m(x)$ masa na jednostkę długości, w ugięcie zależne od położenia i czasu.

Do równania (2.1) dołączymy warunki brzegowe, uwzględniające śledzący charakter siły P :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w(0, t) &= 0, & w''(l, t) &= 0, \\ w'(0, t) &= 0, & w'''(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

W celu uproszczenia zapisu wprowadzimy bezwymiarową zmienną niezależną $z = x/l$ oraz przyjmiemy następujący sposób zmiany sztywności:

$$(2.3) \quad E(z)J(z) = E_0 J_0 g(z),$$

gdzie E_0 i J_0 oznaczają kolejno moduł Younga i moment bezwładności przekroju utwierdzonego ($z=0$), $g(z)$ — na razie nieokreślona dowolna funkcja, przy czym $g(0) = 1$.

Korzystając z zależności $m(z) = A(z)\rho(z)$, w której $A(z)$ jest zmiennym polem powierzchni przekroju, $\rho(z)$ zmienną gęstością, oraz (2.3) i zakładając rozwiązanie równania (2.1) w postaci

$$(2.4) \quad w(z, t) = f(z) e^{i\omega t}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.5) \quad (gf'')'' + \frac{Pl^2}{E_0 J_0} f''' - \frac{\omega^2 l^4}{E_0 J_0} A(z)\rho(z)f = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.6) \quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 0, \quad f''(1) = 0, \quad f'''(1) = 0.$$

Powierzchnia przekroju poprzecznego pręta $A(z)$ jest zależna od sposobu zmiany sztywności i dla różnych kierunków drgań jest inną funkcją momentu bezwładności $J(z)$.

Jeżeli przyjmiemy, że moduł Younga, moment bezwładności i gęstość zmieniają się następująco:

$$(2.7) \quad E(z) = E_0 \varphi(z), \quad J(z) = J_0 \psi(z), \quad \rho = \rho_0 \chi(z),$$

gdzie

$$E_0 = E(0), \quad J_0 = J(0), \quad \rho_0 = \rho(0),$$

to powierzchnia przekroju $A(z)$ w trzech najważniejszych przypadkach pokazanych na rys. 2 zmienia się według wzorów

$$(2.8) \quad \begin{aligned} A(z) &= A_0 \psi(z) \quad \text{w przypadku a} \\ A(z) &= A_0 \sqrt[3]{\psi(z)} \quad \text{w przypadku b} \\ A(z) &= A_0 \sqrt{\psi(z)} \quad \text{w przypadku c; } A_0 = A(0). \end{aligned}$$

Wprowadzając nowe oznaczenia na bezwymiarową siłę ściskającą oraz bezwymiarowy kwadrat częstości:

$$(2.9) \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_0 J_0}, \quad \alpha = \frac{A_0 \rho_0 l^4}{E_0 J_0} \omega^2$$

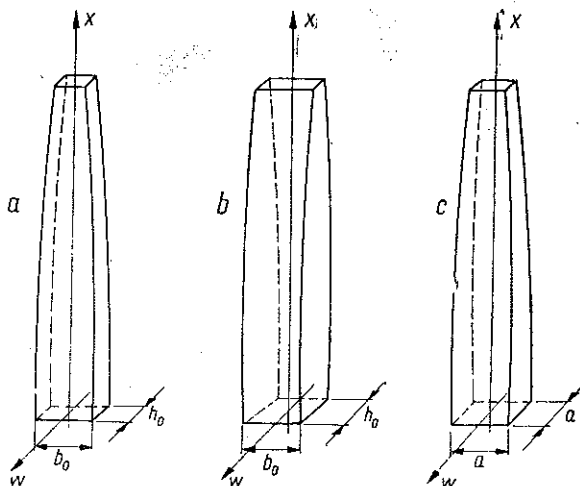
i wstawiając je łącznie z (2.7) i (2.8) do równania (2.5) otrzymujemy

$$(2.10) \quad (\varphi\psi f'')'' + \beta f''' - \alpha\psi^3 \chi f = 0,$$

gdzie

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{w przypadku a,} \\ 1/3 & \text{w przypadku b,} \\ 1/2 & \text{w przypadku c.} \end{cases}$$

Równanie (2.10) uwzględnia zarówno zmianę sztywności pręta, jak i niejednorodność modułu Younga oraz niejednorodność wynikającą ze zmiany gęstości materiału, przy czym założono, że niejednorodność modułu Younga jest niezależna od niejednorodności gęstości.



Rys. 2

Do dalszych rozważań przyjmiemy nieco mniej ogólne równanie od (2.10), mianowicie równanie:

$$(2.11) \quad (gf''')'' + \beta f''' - \alpha g^{\kappa} f = 0,$$

w którym, jak widać z (2.3) i (2.10),

$$(2.12) \quad g = \varphi\psi \text{ oraz } g^{\kappa} = \psi^{\nu}\chi,$$

gdzie κ oznacza pewną stałą dowolną. To ograniczenie nie przeszkodzi jednak w uwzględnieniu równocześnie lub kolejno zmienności E , J oraz ρ . Tworząc odpowiednie kombinacje funkcji φ , ψ , χ oraz stałej κ , i biorąc pod uwagę równanie (2.12) możemy uzyskać szereg przypadków szczególnych.

Przyjmując np. że gęstość materiału pręta jest stałą, musimy założyć $\chi = 1$; wówczas przy danej z góry funkcji $g(z)$ zmienność sztywności i modułu Younga podana jest wzorami

$$(2.13) \quad \psi = g^{\frac{\kappa}{\nu}}, \quad \varphi = g^{\frac{\nu - \kappa}{\nu}},$$

gdzie κ oznacza stałą dowolną oraz $\nu = 1, 1/3, 1/2$.

Gdy $\kappa = \nu$, otrzymujemy pręt jednorodny o zmiennej sztywności $J = J_0 g(z)$. Natomiast jeżeli przyjmiemy, że pręt jest przyrmatyczny, tzn. $\psi = 1$, to z (2.12) wynika

$$(2.14) \quad \varphi = g, \quad \chi = g^\kappa,$$

gdzie κ jest dowolną stałą; tzn. że mamy pręt o zmiennym module Younga $E = E_0 g(z)$ i zmiennej gęstości $\rho = \rho_0 g^\kappa$.

Gdy $\chi = 1$ stała $\kappa = 0$ i otrzymujemy pręt przyrmatyczny o zmiennym tylko module Younga.

Na koniec tych rozważań należy podać funkcję $g(z)$, która ze względu na stosowaną metodę małego parametru nie może się różnić zbyt wiele od jedności. Założymy, że

$$(2.15) \quad g(z) = (1 - \varepsilon z)^n,$$

gdzie n jest dowolną stałą, a parametr ε jest mały ($\varepsilon \ll 1$). Jego znaczenie fizyczne można określić wzorem

$$\varepsilon = 1 - \sqrt[n]{\frac{J_1}{J_0}} \quad (J_1 = J(1))$$

dla pręta przyrmatycznego $\varepsilon = 0$, a dla pręta, którego moment bezwładności na końcu swobodnym jest równy zeru, $\varepsilon = 1$.

3. Rozwiązanie ogólne. Związek siły ściskającej z częstością drgań

Przejdziemy teraz do efektywnego rozwiązania równania (2.11) metodą małego parametru przy danej funkcji $g(z)$ w postaci (2.15). Wpływ siły ściskającej na częstość uwzględnimy za pośrednictwem funkcji odwrotnej, tzn. $\beta = \beta(a)$, ze względu na przyjęte dalej kinetyczne kryterium stateczności (4.2), wygodniejsze w obliczeniach od warunku $[\partial a / \partial \beta]_{\varepsilon = \text{const}} = \infty$. Wobec tego wyrazimy funkcję ugięcia $f(z)$, funkcję $g(z)$ oraz bezwymiarową siłę krytyczną β za pomocą szeregów małego parametru:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} f &= f_0 + f_1 \varepsilon + f_2 \varepsilon^2 + \dots, \\ \beta &= \beta_0(a) + \beta_1(a) \varepsilon + \beta_2(a) \varepsilon^2 + \dots, \\ g &= (1 - \varepsilon z)^n = 1 - n z \varepsilon + \frac{1}{2} n(n-1) z^2 \varepsilon^2 + \dots, \\ g^\kappa &= (1 - \varepsilon z)^{\kappa n} = 1 - \kappa n z \varepsilon + \frac{1}{2} \kappa n(\kappa n - 1) z^2 \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

We wzorach (3.1) siła ściskająca pozostaje jeszcze jako funkcja częstości a i zadaniem naszym jest początkowo znalezienie związków $\beta_0(a)$, $\beta_1(a)$, $\beta_2(a)$, itd.; dopiero siła krytyczna będzie określona przez szereg:

$$(3.2) \quad \beta_{\text{kryt.}} = \beta_0^* + \beta_1^* \varepsilon + \beta_2^* \varepsilon^2 + \dots,$$

w którym współczynniki β_0^* , β_1^* , β_2^* itd. nie są już funkcjami częstości, lecz zależą tylko od parametrów n i κ . Obliczenie tych współczynników jest głównym celem pracy.

Po podstawieniu szeregów (3.1) do równania (2.11) i przyrównaniu współczynników przy wszystkich potęgach ε do zera otrzymujemy ciąg równań różniczkowych liniowych, zwyczajnych, o stałych współczynnikach na funkcje f_0, f_1, f_2 itd.:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f_0^{IV} + \beta_0 f_0'' - \alpha f_0 &= 0, \\ f_1^{IV} + \beta_0 f_1'' - \alpha f_1 &= n z f_0^{IV} + 2 n f_0''' - \beta_1 f_0'' - \alpha \kappa n z f_0, \\ f_2^{IV} + \beta_0 f_2'' - \alpha f_2 &= n z f_1^{IV} + 2 n f_1''' - \beta_1 f_1'' - \alpha \kappa n z f_1 - \frac{1}{2} n (n-1) z^2 f_0^{IV} - \\ &\quad - n (n-1) f_0'' + \frac{1}{2} \alpha \kappa n (\kappa n - 1) z^2 f_0 - 2 n (n-1) z f_0''' - \beta_2 f_0'', \\ &\dots \end{aligned}$$

Do równań (3.3) należy dołączyć warunki brzegowe wynikające z (2.6):

$$(3.4) \quad f_j(0) = f_j'(0) = f_j''(1) = f_j'''(1) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Całka ogólna pierwszego z równań (3.3), odpowiadająca prętowi przyrównanemu i jednorodnemu, może być napisana w formie

$$(3.5) \quad f_0(z) = A_1 \operatorname{sh} k_1 z + A_2 \operatorname{ch} k_1 z + A_3 \sin k_2 z + A_4 \cos k_2 z,$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} k_1^2 &= -\frac{1}{2} \beta_0 + \sqrt{\frac{1}{4} \beta_0^2 + \alpha}, & k_2^2 &= \frac{1}{2} \beta_0 + \sqrt{\frac{1}{4} \beta_0^2 + \alpha}, \\ \beta_0 &= k_2^2 - k_1^2, & \alpha &= k_1^2 k_2^2. \end{aligned}$$

Stałe całkowania A_i ($i = 1, \dots, 4$) wyznaczamy korzystając z warunków brzegowych (3.4). Przyrównując do zera wyznacznik główny otrzymanego układu równań jednorodnych na stałe A_i uzyskujemy przestępne równanie określające związek między β_0 i częstością α ($F(\beta_0, \alpha) = 0$ [8]):

$$(3.7) \quad F(k_1, k_2) = k_1^4 + k_2^4 + k_1 k_2 (k_2^2 - k_1^2) \operatorname{sh} k_1 \sin k_2 + 2 k_1^2 k_2^2 \operatorname{ch} k_1 \cos k_2 = 0.$$

Z układu tych równań wyznaczamy stosunki stałych $A_2/A_1, A_3/A_1, A_4/A_1$, (A_1 pozostaje dowolna). Całka ogólna drugiego z równań (3.3) ma postać

$$(3.8) \quad \begin{aligned} f_1(z) &= (B_1 z^2 + C_1 z + D_1) \operatorname{sh} k_1 z + (B_2 z^2 + C_2 z + D_2) \operatorname{ch} k_1 z + \\ &\quad + (B_3 z^2 + C_3 z + D_3) \sin k_2 z + (B_4 z^2 + C_4 z + D_4) \cos k_2 z, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} B_1 &= \bar{A} \bar{B} \frac{A_2}{A_1}, & B_2 &= \bar{A} \bar{B}, & B_3 &= -\bar{A} \bar{C} \frac{A_4}{A_1}, \\ B_4 &= \bar{A} \bar{C} \frac{A_3}{A_1}, & C_1 &= \bar{A} \left(-\frac{1}{2} k_1 \frac{A_2}{A_1} \beta_1 + \bar{D} \right), \\ C_2 &= \bar{A} \left(-\frac{1}{2} k_1 \beta_1 + \bar{D} \frac{A_2}{A_1} \right), & C_3 &= \bar{A} \left(-\frac{1}{2} k_2 \frac{A_4}{A_1} \beta_1 + \bar{E} \frac{A_3}{A_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \bar{A} \left(\frac{1}{2} k_2 \frac{A_3}{A_1} \beta_1 + \bar{E} \frac{A_4}{A_1} \right), & \bar{A} &= \frac{A_1}{k_1^2 + k_2^2}, \\
 \bar{B} &= \frac{1}{4} n k_1 (k_1^2 - \kappa k_2^2), & \bar{C} &= \frac{1}{4} n k_2 (k_2^2 - \kappa k_1^2), \\
 \bar{D} &= n \left[\frac{k_1^2 (3k_2^2 - k_1^2)}{4 (k_1^2 + k_2^2)} + \kappa \frac{k_2^2 (k_2^2 + 5k_1^2)}{4 (k_1^2 + k_2^2)} \right], \\
 \bar{E} &= n \left[\frac{k_2^2 (3k_1^2 - k_2^2)}{4 (k_1^2 + k_2^2)} + \kappa \frac{k_1^2 (k_1^2 + 5k_2^2)}{4 (k_1^2 + k_2^2)} \right];
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

D_1, D_2, D_3 i D_4 są to dowolne stałe całkowania.

Wykorzystanie warunków brzegowych (3.4) do funkcji $f_1(z)$ i proste wyeliminowanie stałych D_3 i D_4 prowadzi do układu dwóch równań liniowych niejednorodnych na stałe D_1 i D_2 :

$$\begin{aligned}
 k_1 (k_1 \operatorname{sh} k_1 + k_2 \sin k_2) D_1 + (k_1^2 \operatorname{ch} k_1 + k_2^2 \cos k_2) D_2 &= W_1, \\
 k_1 (k_1^2 \operatorname{ch} k_1 + k_2^2 \cos k_2) D_1 + (k_1^3 \operatorname{sh} k_1 - k_2^3 \sin k_2) D_2 &= W_2,
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 W_1 &= - \{ B_1 [(2+k_1^2) \operatorname{sh} k_1 + 4k_1 \operatorname{ch} k_1] + B_2 [(2+k_1^2) \operatorname{ch} k_1 + 4k_1 \operatorname{sh} k_1] + \\
 &+ B_3 [(2 - k_2^2) \sin k_2 + 4k_2 \cos k_2] + B_4 [(2 - k_2^2) \cos k_2 - 4k_2 \sin k_2] + \\
 &+ C_1 [2k_1 \operatorname{ch} k_1 + k_1^2 \operatorname{sh} k_1] + C_2 [k_2 \sin k_2 + 2k_1 \operatorname{sh} k_1 + k_1^2 \operatorname{ch} k_1] + \\
 &+ C_3 [2k_2 \cos k_2 - k_2^2 \sin k_2] + C_4 [-k_2 \sin k_2 - k_2^2 \cos k_2] \}, \\
 W_2 &= - \{ B_1 [k_1 (6+k_1^2) \operatorname{ch} k_1 + 6k_1^2 \operatorname{sh} k_1] + B_2 [k_1 (6+k_1^2) \operatorname{sh} k_1 + 6k_1^2 \operatorname{ch} k_1] + \\
 &+ B_3 [k_2 (6 - k_2^2) \cos k_2 - 6k_2^2 \sin k_2] + B_4 [-k_2 (6 - k_2^2) \sin k_2 - \\
 &- 6k_2^2 \cos k_2] + C_1 [3k_1^2 \operatorname{sh} k_1 + k_1^3 \operatorname{ch} k_1] + C_2 [k_2^2 \cos k_2 + k_1^3 \operatorname{sh} k_1 + \\
 &+ 3k_1^2 \operatorname{ch} k_1] + C_3 [-3k_2^2 \sin k_2 - k_2^3 \cos k_2] + C_4 [-2k_2^2 \cos k_2 + k_2^3 \sin k_2] \}.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Wyznacznikiem głównym układu równań (3.10) jest funkcja $F(k_1, k_2)$ i jak wynika z (3.7), jest ona równa zero; zatem układ (3.10) nie jest sprzeczny tylko wtedy, gdy

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{k_1 \operatorname{sh} k_1 + k_2 \sin k_2}{k_1^2 \operatorname{ch} k_1 + k_2^2 \cos k_2} = \frac{k_1^2 \operatorname{ch} k_1 + k_2^2 \cos k_2}{k_1^3 \operatorname{sh} k_1 - k_2^3 \sin k_2}.
 \tag{3.12}$$

Z otrzymanego w ten sposób warunku (3.12) wyliczamy poszukiwany współczynnik β_1 funkcji k_1, k_2, β_0, n i κ , a więc ostatecznie tylko jako funkcję częstości α, n i κ .

Całkę ogólną trzeciego równania (3.3) znajdziemy przyjmując z góry funkcję $f_2(z)$ w postaci (3.13). Nieznane stałe M_1, \dots, M_{16} wyznaczmy z układu 16 równań liniowych, uzyskanych po wstawieniu funkcji (3.13) (3.5) i (3.8) do równania (3.3) i porównaniu współczynników przy tych samych funkcjach niezależnych. Układ ten można rozwiązać bardzo łatwo obliczając z czterech pierwszych równań stałe

M_4, M_8, M_{12} i M_{16} , które po wstawieniu do następnych czterech równań pozwalają wyliczyć M_3, M_7, M_{11}, M_{15} itd.

Dowolne stałe całkowania N_1, \dots, N_4 należy wyznaczyć, korzystając z warunków brzegowych (3.4):

$$(3.13) \quad f_2(z) = (N_1 + M_1 z + M_2 z^2 + M_3 z^3 + M_4 z^4) \operatorname{sh} k_1 z + (N_2 + M_5 z + M_6 z^2 + \\ + M_7 z^3 + M_8 z^4) \operatorname{ch} k_1 z + (N_3 + M_9 z + M_{10} z^2 + M_{11} z^3 + \\ + M_{12} z^4) \sin k_2 z + (N_4 + M_{13} z + M_{14} z^2 + M_{15} z^3 + M_{16} z^4) \cos k_2 z,$$

$$8k_1 (k_1^2 + k_2^2) M_4 = nk_1^2 (k_1^2 - \varkappa k_2^2) B_2,$$

$$8k_1 (k_1^2 + k_2^2) M_8 = nk_1^2 (k_1^2 - \varkappa k_2^2) B_1,$$

$$-8k_2 (k_1^2 + k_2^2) M_{12} = nk_2^2 (k_2^2 - \varkappa k_1^2) B_4,$$

$$8k_2 (k_1^2 + k_2^2) M_{16} = nk_2^2 (k_2^2 - \varkappa k_1^2) B_3,$$

$$(3.14) \quad 6k_1 (k_1^2 + k_2^2) M_3 + 12 (5k_1^2 + k_2^2) M_8 = 10B_1 nk_1^3 + C_2 n (k_1^4 - \alpha \varkappa) - \\ - B_2 k_1^2 \beta_1 - \frac{1}{2} n (n-1) k_1^4 A_2 + \frac{1}{2} \alpha \varkappa n (\varkappa n - 1) A_2, \\ 6k_1 (k_1^2 + k_2^2) M_7 + 12 (5k_1^2 + k_2^2) M_4 = 10B_2 nk_1^3 + C_1 n (k_1^4 - \alpha \varkappa) - \\ - B_1 k_1^2 \beta_1 - \frac{1}{2} n (n-1) k_1^4 A_1 + \frac{1}{2} \alpha \varkappa n (\varkappa n - 1) A_1, \\ -6k_2 (k_1^2 + k_2^2) M_{11} - 12 (5k_2^2 + k_1^2) M_{16} = -10B_3 nk_2^3 + \\ + C_4 n (k_2^4 - \alpha \varkappa) + B_4 k_2^2 \beta_1 - \frac{1}{2} n (n-1) k_2^4 A_4 + \frac{1}{2} \alpha \varkappa n (\varkappa n - 1) A_4, \\ 6k_2 (k_1^2 + k_2^2) M_{15} - 12 (5k_2^2 + k_1^2) M_{12} = 10B_4 nk_2^3 + C_3 n (k_2^4 - \alpha \varkappa) + \\ + B_3 k_2^2 \beta_1 - \frac{1}{2} n (n-1) k_2^4 A_3 + \frac{1}{2} \alpha \varkappa n (\varkappa n - 1) A_3, \\ 4k_1 (k_1^2 + k_2^2) M_2 + 6 (5k_1^2 + k_2^2) M_7 + 96k_1 M_4 = 24B_2 nk_1^2 + \\ + 6C_1 nk_1^3 - 4B_1 k_1 \beta_1 - C_2 k_1^2 \beta_1 - 2n (n-1) k_1^3 A_1, \\ 4k_1 (k_1^2 + k_2^2) M_6 + 6 (5k_1^2 + k_2^2) M_3 + 96k_1 M_8 = 24B_1 nk_1^2 + \\ + 6C_2 nk_1^3 - 4B_2 k_1 \beta_1 - C_1 k_1^2 \beta_1 - 2n (n-1) k_1^3 A_2, \\ -4k_2 (k_1^2 + k_2^2) M_{10} - 6 (5k_2^2 + k_1^2) M_{15} + 96k_2 M_{12} = -24B_4 nk_2^2 - \\ - 6C_3 nk_2^3 - 4B_3 k_2 \beta_1 + C_4 k_2^2 \beta_1 + 2n (n-1) k_2^3 A_3, \\ 4k_2 (k_1^2 + k_2^2) M_{14} - 6 (5k_2^2 + k_1^2) M_{11} - 96k_2 M_{16} = -24B_3 nk_2^2 + \\ + 6C_4 nk_2^3 + 4B_4 k_2 \beta_1 + C_3 k_2^2 \beta_1 - 2n (n-1) k_2^3 A_4, \\ 2k_1 (k_1^2 + k_2^2) M_1 + 24M_8 + 24k_1 M_3 + 2 (5k_1^2 + k_2^2) M_6 = 12B_1 nk_1 + \\ + 6C_2 nk_1^2 - 2B_2 \beta_1 - 2C_1 k_1 \beta_1 - n (n-1) k_1^2 A_2 - k_1^2 \beta_2 A_2,$$

$$\begin{aligned}
 2k_1(k_1^2+k_2^2)M_5+24M_4+24k_1M_7+2(5k_1^2+k_2^2)M_2 &= 12B_2nk_1+ \\
 +6C_1nk_1^2-2B_1\beta_1-2C_2k_1\beta_1-n(n-1)k_1^2A_1-k_1^2\beta_2A_1, \\
 -2k_2(k_1^2+k_2^2)M_9+24M_{16}+24k_2M_{11}-2(5k_2^2-k_1^2)M_{14} &= 12B_3nk_2- \\
 -6C_4nk_2^2-2B_4\beta_1-2C_3k_2\beta_1+n(n-1)k_2^2A_4+k_2^2\beta_2A_4, \\
 2k_2(k_1^2+k_2^2)M_{13}+24M_{12}-24k_2M_{15}-2(5k_2^2+k_1^2)M_{10} &= -12B_4nk_2- \\
 -6C_3nk_2^2-2B_3\beta_1+2C_4k_2\beta_1+n(n-1)k_2^2A_3+k_2^2\beta_2A_3.
 \end{aligned}$$

I znowu wykorzystanie warunków brzegowych (3.4) do funkcji $f_2(z)$ prowadzi do układu dwóch równań liniowych niejednorodnych na stałe N_1 i N_2 :

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad k_1(k_1 \operatorname{sh} k_1+k_2 \sin k_2)N_1+(k_1^2 \operatorname{ch} k_1+k_2^2 \cos k_2)N_2 &= W_3, \\
 k_1(k_1^2 \operatorname{ch} k_1+k_2^2 \cos k_2)N_1+(k_1^3 \operatorname{sh} k_1-k_2^3 \sin k_2)N_2 &= W_4,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad W_3 &= -\{M_1[2k_1 \operatorname{ch} k_1+k_1^2 \operatorname{sh} k_1]+M_2[(2+k_1^2) \operatorname{sh} k_1+4k_1 \operatorname{ch} k_1]+ \\
 +M_3[(6+k_1^2) \operatorname{sh} k_1+6k_1 \operatorname{ch} k_1]+M_4[(12+k_1^2) \operatorname{sh} k_1+8k_1 \operatorname{ch} k_1]+ \\
 +M_5[k_2 \sin k_2+2k_1 \operatorname{sh} k_1+k_1^2 \operatorname{ch} k_1]+M_6[(2+k_1^2) \operatorname{ch} k_1+4k_1 \operatorname{sh} k_1]+ \\
 +M_7[(6+k_1^2) \operatorname{ch} k_1+6k_1 \operatorname{sh} k_1]+M_8[(12+k_1^2) \operatorname{ch} k_1+8k_1 \operatorname{sh} k_1]+ \\
 +M_9[(2k_2 \cos k_2-k_2^2 \sin k_2]+M_{10}[(2-k_2^2) \sin k_2+4k_2 \cos k_2]+ \\
 +M_{11}[(6-k_2^2) \sin k_2+6k_2 \cos k_2]+M_{12}[(12-k_2^2) \sin k_2+8k_2 \cos k_2]+ \\
 +M_{13}[-k_2 \sin k_2-k_2^2 \cos k_2]+M_{14}[(2-k_2^2) \cos k_2-4k_2 \sin k_2]+ \\
 +M_{15}[(6-k_2^2) \cos k_2-6k_2 \sin k_2]+M_{16}[(12-k_2^2) \cos k_2-8k_2 \sin k_2]\}, \\
 W_4 &= -\{M_1[3k_1^2 \operatorname{sh} k_1+k_1^3 \operatorname{ch} k_1]+M_2[k_1(6+k_1^2) \operatorname{ch} k_1+6k_1^2 \operatorname{sh} k_1]+ \\
 +M_3[3(2+3k_1^2) \operatorname{sh} k_1+k_1(18+k_1^2) \operatorname{ch} k_1]+M_4[12(2+k_1^2) \operatorname{sh} k_1+ \\
 +k_1(36+k_1^2) \operatorname{ch} k_1]+M_5[k_2^2 \cos k_2+3k_1^2 \operatorname{ch} k_1+k_1^3 \operatorname{sh} k_1]+ \\
 +M_6[k_1(6+k_1^2) \operatorname{sh} k_1+6k_1^2 \operatorname{ch} k_1]+M_7[3(2+3k_1^2) \operatorname{ch} k_1+ \\
 +k_1(18+k_1^2) \operatorname{sh} k_1]+M_8[12(2+k_1^2) \operatorname{ch} k_1+k_1(36+k_1^2) \operatorname{sh} k_1]+ \\
 +M_9[-3k_2^2 \sin k_2-k_2^3 \cos k_2]+M_{10}[k_2(6-k_2^2) \cos k_2- \\
 -6k_2^2 \sin k_2]+M_{11}[3(2-3k_2^2) \sin k_2+k_2(18-k_2^2) \cos k_2]+ \\
 +M_{12}[12(2-k_2^2) \sin k_2+k_2(36-k_2^2) \cos k_2]+M_{13}[-2k_2^2 \cos k_2+ \\
 +k_2^3 \sin k_2]+M_{14}[-k_2(6-k_2^2) \sin k_2-6k_2^2 \cos k_2]+M_{15}[3(2- \\
 -3k_2^2) \cos k_2-k_2(18-k_2^2) \sin k_2]+M_{16}[12(2-k_2^2) \cos k_2- \\
 -k_2(36-k_2^2) \sin k_2]\}.
 \end{aligned}$$

Z tych samych powodów, co układ równań (3.10), równania (3.15) nie są sprzeczne tylko wtedy, gdy

$$(3.17) \quad \frac{W_3}{W_4} = \frac{k_1 \operatorname{sh} k_1 + k_2 \sin k_2}{k_1^2 \operatorname{ch} k_1 + k_2^2 \cos k_2} = \frac{k_1^2 \operatorname{ch} k_1 + k_2^2 \cos k_2}{k_1^3 \operatorname{sh} k_1 - k_2^3 \sin k_2}.$$

Z równania (3.17) liniowego ze względu na β_2 można wyznaczyć współczynnik β_2 w funkcji $k_1, k_2, \beta_0, \beta_1, n$ i κ , a więc ostatecznie tylko częstości a, n i κ .

W niniejszej pracy ograniczymy się tylko do obliczenia trzech współczynników $\beta_0(a)$ (3.7), $\beta_1(a)$ (3.12) oraz $\beta_2(a)$ (3.17), ponieważ obliczenie np. $\beta_3(a)$ wymagałoby wyznaczenia już 24 stałych w funkcji $f_3(z)$ i stałoby się zbyt uciążliwe.

Dotychczas uzyskaliśmy szereg (3 pierwsze wyrazy),

$$(3.18) \quad \beta(a) = \beta_0(a) + \beta_1(a)\varepsilon + \beta_2(a)\varepsilon^2 + \dots,$$

który podaje związek między bezwymiarową siłą ściskającą β i bezwymiarową częstością a . W szeregu tym $\beta_0(a)$ jest podane w formie uwikłanej (3.7), a $\beta_1(a)$ i $\beta_2(a)$ mogą być podane w formie wyraźnej z równań (3.12) i (3.17).

Obecnie przejdziemy do sformułowania kryterium pozwalającego obliczyć siłę krytyczną i odpowiadającą jej częstość drgań oraz do wyznaczenia współczynników w szeregu (3.2).

4. Kinetyczne kryterium stateczności. Siła i częstość krytyczna

Postaramy się obliczyć taką wielkość siły ściskającej (siła krytyczna), przy której ustalone drgania pręta przechodzą w drgania nieustalone o rosnącej do nieskończoności amplitudzie. Tak więc zamiast rozwiązania periodycznego typu $e^{i\omega t}$ należy uzyskać funkcje typu $te^{i\omega t}$. Jak wiadomo, taki typ funkcji czasu otrzymujemy wtedy, gdy najmniejsza częstość drgań pręta zrówna się z częstością wyższą. W przypadku prętów przyrzutowych wystarczy założyć, że pierwiastek równania (3.7), określający częstość drgań pręta, jest pierwiastkiem podwójnym, czyli że [8]

$$\partial F / \partial \omega = 0.$$

W naszym przypadku warunkiem osiągnięcia siły krytycznej jest zerowanie się pierwszej pochodnej siły względem częstości przy zrównaniu się częstości najmniejszej z sąsiednią wyższą [1].

Jeżeli szereg (3.18) napiszemy ogólnie

$$(4.1) \quad \beta = \beta(a, \varepsilon),$$

to warunek pozwalający obliczyć siłę krytyczną i odpowiadającą jej częstość jest następujący:

$$(4.2) \quad [\partial \beta / \partial a]_{\varepsilon = \text{const}} = 0.$$

Bezwymiarowy kwadrat częstości a (wartość ustalona odpowiadająca sile krytycznej) będziemy w dalszym ciągu zakładali w postaci szeregu małego parametru:

$$(4.3) \quad a = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

w którym α_0 jest częstością drgań pręta pryzmatycznego i jednorodnego, α_1, α_2 itd. poprawki wynikające ze zmiany sztywności lub niejednorodności. Stosując warunek (4.2) do szeregu (3.18) otrzymujemy

$$(4.4) \quad \left[\frac{\partial \beta}{\partial a} \right]_{\varepsilon=\text{const}} = \frac{d\beta_0}{da} + \frac{d\beta_1}{da} \varepsilon + \frac{d\beta_2}{da} \varepsilon^2 + \dots = 0.$$

W równaniu (4.4) wszystkie pierwsze pochodne względem a są jeszcze funkcjami parametru ε [ponieważ częstość a jest rozwinięta na szereg (4.3)] i dlatego muszą być wyrażone również przez odpowiednie szeregi małego parametru ε .

Rozwijamy tu funkcje $d\beta_0/da, d\beta_1/da$ itd. na szeregi Taylora w otoczeniu punktu $a = \alpha_0$ (a więc dla $\varepsilon = 0$):

$$(4.5) \quad \frac{d\beta_0}{da} = \left[\frac{d\beta_0}{da} \right]_{\alpha_0} + \left[\frac{d}{da} \left(\frac{d\beta_0}{da} \right) \right]_{\alpha_0} (\alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{da^2} \left(\frac{d\beta_0}{da} \right) \right]_{\alpha_0} (\alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots)^2 + \dots,$$

czyli

$$\frac{d\beta_0}{da} = \left[\frac{d\beta_0}{da} \right]_{\alpha_0} + \left[\frac{d^2\beta_0}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 \varepsilon + \left\{ \left[\frac{d^2\beta_0}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{d^3\beta_0}{da^3} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2 \right\} \varepsilon^2 + \dots$$

Podobnie

$$(4.6) \quad \frac{d\beta_1}{da} = \left[\frac{d\beta_1}{da} \right]_{\alpha_0} + \left[\frac{d^2\beta_1}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 \varepsilon + \left\{ \left[\frac{d^2\beta_1}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{d^3\beta_1}{da^3} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2 \right\} \varepsilon^2 + \dots$$

Wstawiając szeregi (4.5) oraz dalsze do równania (4.4) otrzymujemy równanie

$$(4.7) \quad \left[\frac{d\beta_0}{da} \right]_{\alpha_0} + \left\{ \left[\frac{d\beta_1}{da} \right]_{\alpha_0} + \left[\frac{d^2\beta_0}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 \right\} \varepsilon + \left\{ \left[\frac{d\beta_2}{da} \right]_{\alpha_0} + \left[\frac{d^2\beta_1}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 + \left[\frac{d^2\beta_0}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{d^3\beta_0}{da^3} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2 \right\} \varepsilon^2 + \dots = 0,$$

z którego po przyrównaniu do zera współczynników przy wszystkich potęgach ε dostajemy wzory na obliczenie kolejnych parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, itd.

Ograniczmy się tu do podania kilku pierwszych:

$$(4.8) \quad \left[\frac{d\beta_0}{da} \right]_{\alpha_0} = 0, \quad \alpha_1 = - \frac{\left[\frac{d\beta_1}{da} \right]_{\alpha_0}}{\left[\frac{d^2\beta_0}{da^2} \right]_{\alpha_0}},$$

$$\alpha_2 = - \frac{\left[\frac{d\beta_2}{da} \right]_{\alpha_0} + \left[\frac{d^2\beta_1}{da^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{d^3\beta_0}{da^3} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2}{\left[\frac{d^2\beta_0}{da^2} \right]_{\alpha_0}}.$$

Wyznaczyliśmy w ten sposób (ograniczając się do dwóch wyrazów szeregu) poszukiwaną częstość drgań pręta niepryzmatycznego, przy której następuje utrata stateczności.

Zupełnie podobnie rozwijając na szeregi Taylora w punkcie $\alpha = \alpha_0$ współczynniki przy wszystkich potęgach ε we wzorze (3.18) i uwzględniając (4.3) otrzymujemy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \beta_0(\alpha) &= \beta_0(\alpha_0) + \left[\frac{d\beta_0}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 \varepsilon + \left\{ \left[\frac{d\beta_0}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\beta_0}{d\alpha^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2 \right\} \varepsilon^2 + \dots, \\ \beta_1(\alpha) &= \beta_1(\alpha_0) + \left[\frac{d\beta_1}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 \varepsilon + \left\{ \left[\frac{d\beta_1}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\beta_1}{d\alpha^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2 \right\} \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Po podstawieniu wzorów (4.9) do równania (3.18) siłę ściskającą wyrazimy przez szereg

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \beta &= \beta_0(\alpha_0) + \left\{ \beta_1(\alpha_0) + \left[\frac{d\beta_0}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 \right\} \varepsilon + \left\{ \beta_2(\alpha_0) + \left[\frac{d\beta_1}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 + \left[\frac{d\beta_2}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\beta_0}{d\alpha^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2 \right\} \varepsilon^2 + \left\{ \beta_3(\alpha_0) + \left[\frac{d\beta_2}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 + \left[\frac{d\beta_3}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\beta_1}{d\alpha^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1^2 + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{d\beta_0}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \alpha_3 + \left[\frac{d^2\beta_0}{d\alpha^2} \right]_{\alpha_0} \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\beta_0}{d\alpha^3} \alpha_1^3 \right\} \varepsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

Porównując szeregi (4.10) i (3.2) oraz uwzględniając wzory (4.8), znajdujemy wyrazy w szeregu (3.2), określającym siłę krytyczną:

$$(4.11) \quad \beta_0^* = \beta_0(\alpha_0), \quad \beta_1^* = \beta_1(\alpha_0), \quad \beta_2^* = \beta_2(\alpha_0) - \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{d\beta_1}{d\alpha} \right]_{\alpha_0}^2}{\left[\frac{d^2\beta_0}{d\alpha^2} \right]_{\alpha_0}}.$$

Ponieważ funkcję $\beta_0(\alpha)$ mamy podaną tylko w postaci uwikłanej (3.7) $F(\beta_0, \alpha) = 0$, więc ostatecznie wzory pozwalające obliczyć trzy wyrazy szeregu (3.2) i dwa wyrazy szeregu (4.3) są następujące:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} F(\beta_0, \alpha_0) &= 0, \quad \beta_1^* = \beta_1(\alpha_0), \quad \beta_2^* = \beta_2(\alpha_0) + \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial \beta_0} \right]_{\alpha_0}}{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha_0}} \left\{ \left[\frac{d\beta_1}{d\alpha} \right]_{\alpha_0} \right\}^2, \\ \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right]_{\alpha_0} &= 0, \quad \alpha_1 = \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial \beta_0} \right]_{\alpha_0}}{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha_0}} \left[\frac{d\beta_1}{d\alpha} \right]_{\alpha_0}. \end{aligned}$$

5. Ogólne obliczenia numeryczne

Podstawą do obliczeń będą dane zamieszczone w pracy Z. KORDAS i M. ŻYCKOWSKIEGO [8], stanowiące rozwiązanie układu równań (4.12)₁ i (4.12)₄, a podające siłę krytyczną i częstotliwość krytyczną drgań dla pręta pryzmatycznego i jednorodnego. Autorzy podają wartości:

$$k_{10} = 2,20665, \quad k_{20} = 4,99201,$$

przy czym $k_{10} = k_1(a_0)$, $k_{20} = k_2(a_0)$.

Obliczenie pierwszej poprawki do siły krytycznej β_1^* nie nastęrcza dużych trudności; w równaniu (3.12) podstawiamy $W_1(k_{10}, k_{20})$ i $W_2(k_{10}, k_{20})$, a stąd wyznaczamy $\beta_1^* = \beta_1(a_0)$:

$$(5.1) \quad \beta_1^* = -n(9,45354 - 0,57208\kappa).$$

Większe trudności pojawiają się już przy obliczeniu pierwszej poprawki do częstotliwości krytycznej, gdzie należy znaleźć $[d\beta_1/da]_{\alpha_0}$.

Z równania (3.11) należy obliczyć $\beta_1(k_1, k_2)$ i następnie pochodną $[d\beta_1/da]_{\alpha_0}$; prowadzi to jednak do zbyt skomplikowanych rachunków. Dlatego przeprowadzimy obliczenia w sposób przybliżony. Zauważmy najpierw, że rozwikłana (formalnie) z równania (3.12) funkcja $\beta_1(a)$ ma postać

$$(5.2) \quad \beta_1 = \beta_1[\beta_0(k_1, k_2), k_1, k_2],$$

gdzie parametry $k_1 = k_1(a)$, $k_2 = k_2(a)$ (3.6) są zależne i spełniają równanie (3.7). W ten sposób β_1 jest tylko funkcją a lub jednego z parametrów k_1 albo k_2 i pierwszą pochodną po a można obliczyć ze wzoru

$$(5.3) \quad \frac{d\beta_1}{da} = \frac{d\beta_1}{dk_1} \frac{dk_1}{da}.$$

Korzystając ze wzorów (3.6) otrzymujemy

$$(5.4) \quad \frac{dk_1}{da} = \frac{1}{2k_1} \frac{d(k_1^2)}{da}, \quad \frac{d(k_1^2)}{da} = \frac{\partial(k_1^2)}{\partial\beta_0} \frac{d\beta_0}{da}, \quad \frac{\partial(k_1^2)}{\partial a} = \frac{1}{k_1^2 + k_2^2},$$

a wobec warunku (4.8)

$$(5.5) \quad \left[\frac{d\beta_1}{da} \right]_{\alpha_0} = \frac{1}{[2k_1(k_1^2 + k_2^2)]_{\alpha_0}} \left[\frac{d\beta_1}{dk_1} \right]_{\alpha_0} = \left[\frac{1}{2k_{10}(k_{10}^2 + k_{20}^2)} \frac{d\beta_1}{dk_1} \right]_{k_{10}}.$$

Jeżeli za zmienną niezależną przyjmiemy parametr k_2 , to możemy tę samą pochodną (5.5) wyrazić wzorem

$$(5.6) \quad \left[\frac{d\beta_1}{da} \right]_{\alpha_0} = \left[\frac{1}{2k_{20}(k_{10}^2 + k_{20}^2)} \frac{d\beta_1}{dk_2} \right]_{k_{20}}.$$

Z porównania wzorów (5.5) i (5.6) wynika, że

$$(5.7) \quad \left[\frac{dk_1}{dk_2} \right]_{\alpha_0} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Do obliczeń numerycznych przyjęto niewielki przyrost parametru k_1 , $\Delta k_1 = 0,00335$; ze wzoru (5.7) (lub (3.7)) obliczono odpowiadający przyrost parametru k_2 , $\Delta k_2 = 0,00148$, a następnie z równania (3.12) wyznaczono wartość funkcji $\beta_1(k_{11}, k_{21})$ dla wartości $\beta_{11} = 2,21000$ i $\beta_{21} = 4,99349$.

Obliczając odpowiednie pochodne ze wzorów

$$(5.8) \quad \left[\frac{d\beta_1}{dk_1} \right]_{k_{10}} \approx \frac{\beta_1(k_{11}, k_{21}) - \beta_1(k_{10}, k_{20})}{k_{11} - k_{10}},$$

$$\left[\frac{d\beta_1}{dk_2} \right]_{k_{20}} \approx \frac{\beta_1(k_{11}, k_{21}) - \beta_1(k_{10}, k_{20})}{k_{21} - k_{20}}$$

i wstawiając je do równań (5.5) i (5.6) otrzymujemy

$$(5.9) \quad \left[\frac{d\beta_1}{da} \right]_{\alpha_0} = n(-0,03111 + 0,07470\kappa).$$

W celu podania poprawki α_1 musimy, korzystając ze wzorów (3.6) i (3.7), obliczyć $[\partial F / \partial \beta_0]_{\alpha_0}$ i $[\partial^2 F / \partial \alpha^2]_{\alpha_0}$:

$$(5.10) \quad \frac{\partial F}{\partial \beta_0} = \frac{\partial F}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial \beta_0} + \frac{\partial F}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial \beta_0}.$$

Po łatwych przekształceniach dostajemy wzór

$$(5.11) \quad \frac{\partial F}{\partial \beta_0} = \frac{1}{4k_1 k_2} \left[\left(k_1 \frac{\partial F}{\partial k_2} - k_2 \frac{\partial F}{\partial k_1} \right) + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \left(k_2 \frac{\partial F}{\partial k_1} + k_1 \frac{\partial F}{\partial k_2} \right) \right],$$

w którym druga część jest dla $\alpha = \alpha_0$ równa zero. Wynika to z warunku (4.8):

$$(5.12) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right]_{\alpha_0} = \left[\frac{1}{2k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)} \left(k_2 \frac{\partial F}{\partial k_1} + k_1 \frac{\partial F}{\partial k_2} \right) \right]_{\alpha_0} = 0.$$

Równocześnie ze wzoru (5.12) otrzymujemy związek dla $\alpha = \alpha_0$

$$(5.13) \quad \frac{\partial F}{\partial k_2} = - \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial F}{\partial k_1},$$

który podstawiony do równania (5.11) upraszcza znacznie ten wzór:

$$(5.14) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial \beta_0} \right]_{\alpha_0} = - \left[\frac{1}{2k_{10}} \frac{\partial F}{\partial k_1} \right]_{k_{10}, k_{20}}$$

Po wykonaniu obliczeń numerycznych znajdziemy $[\partial F / \partial \beta_0]_{\alpha_0} = 130,384$. Podobnie obliczymy drugą pochodną:

$$(5.15) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{4 [k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)]} \left\{ k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2) \left[k_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial k_1^2} + 2k_1 k_2 \frac{\partial^2 F}{\partial k_1 \partial k_2} + k_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial k_2^2} \right] - \left[k_2^3 (5k_1^2 + k_2^2) \frac{\partial F}{\partial k_1} + k_1^3 (5k_2^2 + k_1^2) \frac{\partial F}{\partial k_2} \right] \right\},$$

której wartość liczbową wynosi $[\partial^2 F / \partial a^2]_{a_0} = 0,06005$. Korzystając z tych danych liczbowych możemy podać pierwszą poprawkę do częstości krytycznej:

$$(5.16) \quad a_1 = n(-67,549 + 162,195\kappa).$$

Mamy w ten sposób wszystkie dane z wyjątkiem $\beta_2(a_0)$ wielkości potrzebne do obliczenia drugiej poprawki do siły krytycznej β_2^* .

Z układu 16 równań liniowych (3.14) wyznaczamy kolejno stałe M_1, \dots, M_{16} jako funkcje parametrów n i κ przy ustalonych parametrach $k_1 = k_{10}$ i $k_2 = k_{20}$, po czym podstawiamy je do wzoru (3.15) i z liniowego równania na β_2 (3.17) obliczamy $\beta_2(a_0)$:

$$(5.17) \quad \beta_2(a_0) = n(-2,60871 + 0,51430\kappa) + n^2(3,17358 - 0,22646\kappa - 0,39868\kappa^2).$$

W końcu korzystając z danych (5.17), (5.14), (5.15), (5.9) i ze wzoru (4.12)₃ mamy:

$$(5.18) \quad \beta_2^* = n(-2,6087 + 0,5143\kappa) + n^2(4,2243 - 5,2723\kappa + 5,6592\kappa^2).$$

Otrzymane wyniki pozwalają na wyrażenie siły krytycznej w postaci szeregu małego parametru zawierającego trzy wyrazy oraz kwadratu częstości w postaci szeregu zawierającego dwa wyrazy:

$$(5.19) \quad P_{\text{kryt}} = P_{\text{kryt}}^{(0)} \{1 - [n(0,4715 - 0,0285\kappa)] \varepsilon + [n(-0,1301 + 0,0257\kappa) + n^2(0,2107 - 0,2629\kappa + 0,2822\kappa^2)] \varepsilon^2 + \dots\},$$

$$(5.20) \quad \omega_{\text{kryt}}^2 = [\omega_{\text{kryt}}^{(0)}]^2 \{1 + [n(-0,5566 + 1,3366\kappa)] \varepsilon + \dots\},$$

gdzie

$$(5.21) \quad P_{\text{kryt}}^{(0)} = 20,0509 \frac{E_0 J_0}{l^2}, \quad [\omega_{\text{kryt}}^{(0)}]^2 = 121,34387 \frac{E_0 J_0}{A_0 \varrho_0 l^4}.$$

6. Przykłady liczbowe

Jako pierwszy przykład omówimy pręt o stałej gęstości i stałym module Younga, a tylko zmiennym przekroju (sztywności) i to w taki sposób, aby otrzymać pręty liniowo zbieżne. W każdym z trzech przypadków podanych na rys. 2 parametry n i κ charakteryzujące taki pręt są inne:

1) przypadek a

$$n = 1, \quad \kappa = 1,$$

$$(6.1) \quad P_{\text{kryt}} = P_{\text{kryt}}^{(0)} (1 - 0,4430\varepsilon + 0,1256\varepsilon^2 + \dots),$$

$$\omega_{\text{kryt}}^2 = [\omega_{\text{kryt}}^{(0)}]^2 (1 + 0,7800\varepsilon + \dots);$$

2) przypadek b

$$n = 3, \quad \kappa = \frac{1}{3},$$

$$(6.2) \quad P_{\text{kryt}} = P_{\text{kryt}}^{(0)} (1 - 1,3860\varepsilon + 1,0260\varepsilon^2 + \dots),$$

$$\omega_{\text{kryt}}^2 = [\omega_{\text{kryt}}^{(0)}]^2 (1 - 0,1111\varepsilon + \dots);$$

3) przypadek c

$$n = 4, \quad \kappa = \frac{1}{2},$$

$$(6.3) \quad P_{\text{kryt}} = P_{\text{kryt}}^{(0)} (1 - 1,8288\varepsilon + 1,9280\varepsilon^2 \dots),$$

$$\omega_{\text{kryt}}^2 = [\omega_{\text{kryt}}^{(0)}]^2 (1 + 0,4468\varepsilon + \dots).$$

Jako drugi przykład przyjmijmy pręt przyrmatyczny o stałej gęstości ρ_0 , lecz zmiennym module Younga

$$(6.4) \quad E = E_0 (1 - \varepsilon z)^n$$

Stała κ jest tutaj równa zero, a odpowiednie wzory na siłę krytyczną i częstość są następujące:

$$(6.5) \quad P_{\text{kryt}} = P_{\text{kryt}}^{(0)} [1 - 0,4715n\varepsilon + (-0,1301n + 0,2107n^2)\varepsilon^2 + \dots],$$

$$\omega_{\text{kryt}}^2 = [\omega_{\text{kryt}}^{(0)}]^2 (1 - 0,5566n\varepsilon + \dots).$$

Wreszcie należy zauważyć, że wzory (6.1) są słuszne również dla pręta przyrmatycznego o liniowo zmiennym module Younga $E = E_0 (1 - \varepsilon z)$ i liniowo zmiennej gęstości $\rho = \rho_0 (1 - \varepsilon z)$.

Analiza wyników pozwala stwierdzić, że siła krytyczna zawsze maleje przy zmniejszaniu sztywności pręta, natomiast częstość drgań przy utracie stateczności pręta może rosnać lub maleć ze zmniejszaniem się sztywności, zależnie od sposobu wybożenia i sposobu zmiany sztywności; jednak dla prętów wszechstronnie liniowo zbieżnych i jednorodnych częstość drgań rośnie; jest to zgodne z zachowaniem się częstości drgań własnych pręta nieobciążonego [14].

7. Uwagi końcowe

Uzyskane w niniejszej pracy rozwiązania podające siłę krytyczną i częstość krytyczną dla prętów nieprzyrmatycznych i niejednorodnych obciążonych siłą śledzącą pozwalają na pewną ogólną orientację w kierunku zmiany tych wielkości w stosunku do prętów przyrmatycznych. Zastosowana metoda małego parametru nie daje rozwiązań dokładnych w całym przedziale zmienności parametru ε , tzn. w przedziale (0, 1) i podane rozwiązania mają dość dobrą dokładność (do 5% błędu) zapewne tylko dla ε należących do przedziału (0; 0,25) w przypadku wzoru (6.3) i w nieco większych przedziałach w innych podanych przykładach. Ocena błędu jest tu możliwa tylko na podstawie wielkości pierwszego opuszczonego wyrazu szeregu (szereg jest naprzemienny).

Niemniej jednak rozwiązania podane w pracy ujmują dość szeroką klasę prętów nieprzyrmatycznych jednorodnych lub przyrmatycznych niejednorodnych, przy czym możemy uwzględnić zarówno niejednorodność modułu Younga jak i niejednorodność gęstości materiału.

Na zakończenie pragnę wyrazić swoją głęboką wdzięczność prof. dr M. ŻYCKOWSKIEMU za pomoc i wskazówki udzielane mi w czasie wykonywania tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. M. ВЕСК, *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedruckten Stabes*, Z.A.M.P. 3, 3 (1952), 225.
2. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Г. И. Ф. М. Л., Москва 1961.
3. К. С. Дейнеко, М. Я. Леонов, *Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня*, Прикл. Мат. Мех., 6, 19 (1955), 738–744.
4. Г. Ю. Джанелидзе, *Об устойчивости стержня при действии следящей силы*, Тр. Лен. Пол. Инст., nr 192 (1958), 21–27.
5. A. GAJEWSKI, *Zastosowanie rachunku zaburzeń w problemach stateczności prętów i płyt o zmiennej sztywności* (w druku).
6. T. GAŁKIEWICZ, *Zastosowanie metody małego parametru do określenia siły krytycznej ściskającego pręta o zmiennym przekroju poprzecznym*, Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej nr 10, Mech. z. 4, 1956, 99–111.
7. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czas. Techniczne, 9 (1960), 1–8.
8. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1963), 7–31.
9. Z. KORDAS, *Stateczność pręta opływanego równoległym strumieniem płynu przy uwzględnieniu oporu czołowego*, Rozpr. Inżyn., 1, 13 (1965), 19–41.
10. Б. Л. Николаи, *О критерии устойчивости упругих систем*, Тр. Одесс. инст. инж., 1939.
11. A. PFLÜGER, *Zur Stabilität des tangential gedruckten Stabes*, Z. angew. Math. Mech., 5, 35 (1955), 191.
12. В. Я. Реут, *О теории упругой устойчивости*, Тр. Одесс. инст. инж., 1939.
13. M. SOKOŁOWSKI, *Zastosowanie metody małych parametrów w zagadnieniach płyt*, Arch. Mech. Stos., 3, 5 (1953), 415–436.
14. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe*, Warszawa 1964.
15. M. WNUK, M. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ osłabienia pręta na siłę prytyczną w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 3, 7 (1959), 311–336.
16. H. ZIEGLER, *Ein nichtkonservatives Stabilitätsproblem*, Z. angew. Math. Mech., 8/9, 31 (1951), 265.
17. Л. М. Зорий, М. Я. Леонов, *Обзор развития теории устойчивости равновесия упругих стержней*, Инст. Маш. и Авт., 7, 7 (1961).
18. Л. М. Зорий, М. Я. Леонов, *Влияние трения на устойчивость неконсервативных систем*, Инст. Маш. и Авт., 7, 7 (1961), 127–136.
19. L. M. ZORIJ, M. JA. LEONOW, *Effect of friction on the critical load of compressed rod*, Doklady Akad. Nauk. 2, 145 (1962), 295–297.
20. M. ŻYCZKOWSKI, *Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych*, Rozpr. Inżyn., 2, 2 (1954), 231–289.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ И НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ, СЖИМАЕМЫХ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

Основываясь на известном дифференциальном уравнении колебаний стержня, нагруженного сжимающей силой, исследуется его устойчивость в случае, когда сжимающая сила является неконсервативной следящей силой, а односторонне защемленный стержень является неоднородным и непризматическим. Для вычисления критической силы и соответствующей

частоты, использовался кинетический критерий устойчивости, который в нашем случае приводит к условию, что первая производная силы по отношению к частоте равняется нулю.

Задача решается методом малого параметра, разлагая в ряды (3.1) функцию прогиба и сжимающую силу (зависимой от частоты). В третьей части работы даются общие выражения для трех членов ряда (3.1), определяющего сжимающую силу в зависимости от частоты колебаний стержня. В четвертой части, после учета кинематического критерия устойчивости и после разложения, установленной, соответствующей критической силе, частоты колебаний — в ряд малого параметра, получено формулы для выражения рядов, определяющих критическую силу и частоту колебаний.

В дальнейших частях работы приводятся несколько числовых примеров для стержней с переменным поперечным сечением, переменным модулем Юнга и с переменной плотностью.

S u m m a r y

THE STABILITY OF CERTAIN NON-PRISMATIC AND NONHOMOGENEOUS BARS COMPRESSED BY A TANGENTIAL FORCE (by a force preserving its position in relation to the bar)

On the basis of the familiar differential equation of vibration of a bar loaded by a compressive force, its stability is investigated if the compressive force is a non-conservative force preserving its position in relation to the bar and the bar, which is clamped at one end, is non-prismatic and nonhomogeneous. To calculate the critical force and the corresponding frequency the kinetic criterion of stability is used which leads, in our case, to the condition of the first derivative of the force with respect to the frequency becoming zero.

The problem is solved by means of the perturbation method by expanding in power series (3.1) the deflection function and the compressive force (depending on the frequency). In the third part of the paper general expressions are given for three terms of the series (3.1) which expressing a relation between the compressive force and the vibration frequency of the bar. In the fourth part, taking into consideration the kinetic criterion of stability and expanding the steady frequency corresponding to the critical force, in a series of the small parameter, equations are obtained for the terms of the series expressing the critical force and the series expressing the frequency of vibration.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
KATEDRA FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lutego 1966 r.