ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
4, 14 (1966)

WEWNĘTRZNE MOMENTY W CIAŁACH STAŁYCH I KONTINUUM ZE STRUKTURĄ WEWNĘTRZNĄ (*)

B. MORANDI (RZYM)

W latach 1951–1958 francuscy i hinduscy fizycy opublikowali kilka prac dotyczących dynamiki siatek krystalicznych. Zwróciły one uwagę uczonych na możliwość istnienia w ciałach stałych elementarnych wewnętrznych momentów i związanym z tym niedostatkiem opisu, jaki daje klasyczna teoria sprężystości. Ta ostatnia zakłada, że momenty wewnętrzne są równe zeru, co z kolei związane jest z założeniem, że wypadkowa sił i moment sił na każdej wewnętrznej powierzchni ciała są rezultatem samego tylko, rozłożonego w sposób ciągły, wektora naprężenia.

W tym samym czasie, jednak całkowicie niezależnie i ze znacznie mniejszym rozgłosem, zwrócono uwagę na makroskopowe efekty wywołane w ciałach stałych i płynach wewnętrznym krętem oraz ogólnie na zagadnienie ruchów, których nie dopuszcza zwykłe kontinuum. Zagadnienia tego typu początkowo były oddzielone od poprzednich również ze względu na to, że odnosiły się do innych dziedzin nauki.

Podczas kontrowersji zapoczątkowanej rezultatami francuskimi, z których wynikała konieczność ponownego rozpatrzenia stanu wiedzy o stałych sprężystości dla kryształów, i w wyniku serii eksperymentów, które miały potwierdzić te rezultaty, nowe znaczenie uzyskała teoria braci COSSERATÓW. Pięćdziesiąt lat wcześniej i z daleko większą ścisłością rozważali oni zagadnienie wewnętrznych momentów i wewnętrznych obrotów, lecz ich pomysły zostały całkowicie zarzucone i zapomniane.

Po «odkryciu» teorii braci Cosseratów w 1958 r. studia nad momentami i ruchami wewnętrznymi zyskały większy rozmach głównie dzięki R. A. TOUPINOWI i innym Amerykanom, publikującym swe prace w «Archive (na początku Journal) for Rational Mechanics and Analysis». Czasopismo to wydawane przez C. TRUESDELLA jest jednym z najbardziej interesujących w dziedzinie mechaniki kontinuum.

W najnowszym podejściu studia te polegają głównie na określeniu i badaniu modeli kontinuum bardziej złożonego niż kontinuum klasyczne, bo posiadającego ciągłą strukturę wewnętrzną. Używając języka klasycznej teorii pól tensorowych modele te mogą opisywać zjawiska (nawet szersze niż momenty i obroty wewnętrzne) związane z dyskretną strukturą materii.

Znaczenie tych modeli nie polega jednakże na tym, że wiążą się z wprowadzeniem subtelności drugiego przybliżenia klasycznej teorii sprężystości lub z lepszym opisem

(*) Z angielskiego przełożył Z. WESOŁOWSKI.

zachowania się fal sprężystych. Znaczenie to polega przede wszystkim na wyczerpującym zbadaniu podstaw mechaniki kontinuum i ich epistemologicznych założeń, wyjaśnieniu związku pomiędzy właściwościami cząstek i klasyczną teorią pola oraz pomiędzy sformułowaniem aksjomatycznym, a metodą operatorową. Zagadnienia te pojawiają się również w innych gałęziach nowoczesnej fizyki.

Innym interesującym aspektem studiów nad kontinuum z mikrostrukturą są jego powiązania (częściowo znane i częściowo łatwe do przewidzenia) z różnymi gałęziami fizyki matematycznej, w których zaznaczył się ostatnio znaczny rozwój. Można tutaj wspomnieć zagadnienia związane z siłami dalekiego zasięgu i lokalizacją energii, własnościami powierzchni i napięciem powierzchniowym, teorią dielektryków i energią wzajemnego oddziaływania różnych ciał; magnetohydrodynamikę, teorię nadpłynności, tłumienie fal, przemiany fazowe, teorię dyslokacji z teorią granicy sprężystości kryształów i na koniec ogólną teorię siatek krystalicznych z powiązaniami z ogólną teorią względności itd. Wymieniamy tutaj te zagadnienia, by uzasadnić celowość opracowania niniejszego przeglądu i pokazać konieczność (i trudności) znacznego ograniczenia jego zakresu. Część wymienionych zagadnień zostanie omówiona dalej.

2. Charakter i zakres przeglądu

Ze względów metodologicznych, które będą dalej wyjaśnione, i dla krótkości przegląd ten nie uwzględnia atomistycznych teorii sprężystych właściwości ciał stałych (teorie molekularne, strukturalne i kwantowe).

W rzeczywistości na wszystkie propozycje i modele dotychczas rozpatrywane miały wpływ modele korpuskularne, a szczególnie dynamiczna teoria siatek krystalicznych M. Borna [1]. Ostatnio podano pełne wyjaśnienie, w jaki sposób omawiane tu zagadnienia należą do mechaniki makroskopowej. Jeśli w przyszłości znajdą one zastosowanie przy właściwej atomistycznej interpretacji własności mechanicznych ciał stałych, to zaistnieje potrzeba znalezienia języka odpowiedniego dla obiektywnego opisu zjawisk.

W pracy niniejszej damy pierwszeństwo nie rozważaniom opartym na pojęciu energii (wyrażenie na pracę, struktura potencjału sprężystości), a rozważaniom opartym na uogólnionych siłach, ponieważ te ostatnie są dogodniejsze dla uzyskania gotowych informacji. Ten punkt widzenia pozostawi nieco w cieniu kilka ostatnich zastosowań, jest jednak właściwszy przy syntetycznej klasyfikacji starszych prac, do których się później nie powraca.

Przegląd ten jest jedynie przeglądem ogólnym. Ryzyko, że zbyt długi przegląd krytyczny może stać się przestarzały już podczas pisania, powoduje, że własne rozważania autora zostają odłożone do innych prac. Ponieważ z drugiej strony jedynym celem takiego przeglądu jest, by zajmujący się zagadnieniem uniknęli opierania się na błędnych pracach, wydało się konieczne podanie krótkiej opinii o indywidualnych publikacjach. Tam gdzie jest to możliwe opinia ta jest oparta na opinii najbardziej nowoczesnych i kompetentnych autorów.

3. Teoria ośrodków spolaryzowanych i zewnętrzny moment masowy

Jest znanym faktem, że klasyczna teoria sprężystości nie może być bez istotnych zmian zastosowana do opisu ośrodka spolaryzowanego elektrycznie lub magnetycznie. Klasycznemu modelowi kontinuum obce są siły wewnętrzne działające na dużą odległość, energie związane z oddziaływaniem na siebie wielu ciał, trudności określenia gęstości energii oraz pojawianie się nowego rodzaju przemieszczeń (polaryzacji). Mechanika ośrodka spolaryzowanego i ośrodka niespolaryzowanego podążały innymi drogami, zarówno jeśli chodzi o metody jak i autorów. Teoria ośrodka spolaryzowanego nie będzie tutaj omawiana. Wyjątek stanowi praca Toupina [24], ponieważ okazuje się, że ma ona pewne znaczenie również dla ośrodków niespolaryzowanych. W oparciu o tę pracę i cytowany dalej traktat Truesdella i Toupina [30], jak również o podaną tutaj bibliografię, można zbudować teorię naprężeń momentowych w ośrodku spolaryzowanym.

Najprostszym (lecz nie najważniejszym) aspektem mechanicznego zachowania się spolaryzowanego ośrodka zanurzonego w polu zewnętrznym jest pojawienie się oprócz sił masowych również momentów masowych (lub momentów objętościowych), które burzy symetrię tensora naprężenia. Odpowiednie rozważania zapoczątkowane traktatem Maxwella [2] (poza starą teorią quasi-sprężystego eteru Mac-Cullagha [3]) obejmują efekty związane z asymetrycznym tensorem naprężenia. Działanie pola zewnętrznych momentów masowych na klasyczne kontinuum może być uwzględnione przez przypisanie im lokalnych obrotów kontinuum, a nie przez rozpatrywanie sił dalekiego zasięgu i wewnętrznych momentów.

Równania równowagi i warunki brzegowe dla tego przypadku

$$e^{ijk}\,t_{jk}+\varrho l^{i}=0,\qquad t^{ji}\,n_{j}=t^{i},$$

gdzie t^{ii} jest tensorem naprężenia, t^{i} wektorem naprężenia, a l^{i} zewnętrznym momentem masowym, nie wprowadzają istotnych zmian do klasycznej teorii sprężystości; przypadek ten był rozpatrywany wielokrotnie [4].

Kompletna bibliografia dotycząca tego zagadnienia nie jest tutaj podana, ponieważ jego znaczenie jest ograniczone ze względu na praktyczną niemożliwość przyłożenia zewnętrznego momentu masowego do ośrodka niespolaryzowanego. Innym powodem są wątpliwe zalety odrębnego rozpatrywania tego zagadnienia, a nie w powiązaniu z teorią naprężeń momentowych, gdzie również założenie o istnieniu zewnętrznych momentów masowych jest ogólnie przyjęte. Wspominamy tutaj o tym głównie dlatego, że w przyszłości wielu autorów myliło to zagadnienie z zagadnieniem momentów wewnętrznych i zagadnieniem kontinuum ze strukturą wewnętrzną.

Należy przypomnieć dobrze znany fakt (lecz nie zawsze brany pod uwagę przez późniejszych autorów), że wprowadzenie momentów masowych obok sił masowych jest jedynie jednym z możliwych sposobów uwzględnienia oddziaływań dalekiego zasięgu. Wszystkie oddziaływania mogą być również reprezentowane przez tensor naprężenia (za pośrednictwem tensora Maxwella). Celem wprowadzenia sił i momentów masowych jest uniknięcie określenia mechanizmu oddziaływań zewnętrznych na ciało.

4. Teoria Cosseratów

W 1893 roku DUHEM [5] zaproponował rozpatrywanie ciała jako zbioru nie tylko punktów, ale również związanych z tymi punktami kierunków, dopuszczając możliwość zmian tych kierunków, przy czym zmiany te są niezależne od przemieszczeń elementów materialnych. Autor ten zasadniczo zapoczątkował termodynamiczne rozważania nad ośrodkiem, którego potencjał sprężysty jest funkcją również orientacji elementów materialnych, a w wyrażeniu na pracę wirtualną pojawiały się wewnętrzne elementarne momenty. Te ostatnie można zauważyć w tak wczesnych pracach jak prace Lorda KELVINA, HELMHOLTZA i VOIGHTA.

W 1909 roku Francuzi E. i F. COSSERAT [6] systematycznie rozpatrywali model kontinuum, którego każdy punkt posiada poza trzema zwykłymi stopniami swobody również trzy obrotowe stopnie swobody. Innymi słowami, każdy punkt ośrodka pokrywa się z wierzchołkiem trójścianu, który może przyjmować różne orientacje niezależnie od obrotów samego kontinuum.

W przeciwieństwie do wielu autorów nowoczesnych bracia Cosserat rozważają zawsze odkształcenia skończone. Biorąc pod uwagę pochodzącą od KIRCHHOFFA i HERTZA krytykę konceptu siły i wychodząc z zasady najmniejszego działania budują oni swoją teorię w sposób dedukcyjny i dochodzą do ośrodka sprężystego jedno- dwu- i trójwymiarowego. W każdym z tych przypadków występują wewnętrzne momenty elementarne; np. w teorii sprężystej powierzchni są to znane z teorii powłok momenty rozłożone na krzywej podziału powierzchni.

Bardziej ogólnym uzyskanym przez braci Cosserat rezultatem, z którego mogą brać początek szczególne przypadki, są równania równowagi i warunki brzegowe dla ośrodka trójwymiarowego, kiedy nie są narzucone żadne ograniczenia na obroty trójścianów.

Równania zachowania pędu i warunki brzegowe nie różnią się od podanych przez CAUCHY'EGO

$$t_{ij,j}+\varrho f_i = j^{-1}\dot{P}_i, \qquad t_{ji}n_j = t_i,$$

gdzie t_{ij} jest tensorem naprężenia, f siłą masową, ϱ gęstością w konfiguracji aktualnej, P_i gęstością pędu w konfiguracji odniesienia, n_i zewnętrzną normalną w konfiguracji aktualnej oraz j jest wyznacznikiem funkcyjnym równym ϱ_0/ϱ (1).

Antysymetryczna część tensora naprężenia spełnia związki (2)

$$\mu_{ji,j}+e_{ijk}t_{jk}+\varrho l_i = j^{-1}(\dot{Q}_i+e_{ijk}\dot{x}_jP_k), \qquad \mu_{ji}n_j = m_i.$$

(1) Bracia Cosserat nie używali zapisu tensorowego w postaci podanej tutaj. Ponieważ używali oni jedynie prostokątnych kartezjańskich współrzędnych, nie rozróżniamy tutaj indeksów kowariantnych i kontrawariantnych. Dodatkowo przyjmujemy założenie o normalnej zewnętrznej. Poza tym (w szczególności jeśli chodzi o konfigurację aktualną i odniesienia) podane równania są wiernym odbiciem równań podanych w § 63 książki E. i P. COSSERATÓW.

(2) Użyto pseudo-tensorowej (osiowej) reprezentacji, ponieważ w tym przypadku liczba indeksów jest taka sama jak w kartezjańskim tensorze, używanym przez Cosseratów; bardziej ogólne sformułowanie (tensory biegunowe, dowolne współrzędne) tych równań jest podane dalej, gdzie poza wielkościami zdefiniowanymi wyżej występuje wewnętrzny kręt odniesiony do jednostki objętości w konfiguracji odniesienia oraz diwergencja tensora μ^{ij}, który później został nazwany tensorem naprężeń momentowych lub tensorem mikromomentów.

Wektor osiowy m_i jest momentem powierzchniowym. Oddziaływanie przez wewnętrzny element powierzchniowy nie może być przedstawione zwykłym wektorem naprężenia, lecz jest równoważne wektorowi t_i i elementarnemu momentowi m_i; obie wielkości są funkcjami położenia i normalnej do elementu powierzchniowego. Z wyrażenia na m_i jest widoczne, że m_i, jest j-tą składową momentu działającego na element powierzchniowy normalny do osi x_i.

Składowymi normalnymi momentu (składowe skręcające) są składowe dla $i = j$; a składowymi stycznymi (składowe zginające) są składowe dla $i \neq j$.

Warunkiem wystarczającym, aby wyrazy prawej strony równania Cosseratów znikały, jest $P_i = \varrho_0 \dot{x}_i$ oraz znikanie krętu Q_i (kręt ten później nazywano spinem). W tym przypadku uproszczone równanie

$$\mu_{ji,j} + e_{ijk}\, t_{jk} + \varrho l_i = 0$$

pokazuje, że antysymetryczna część tensora naprężenia nie jest równa zeru, nawet jeśli zewnętrzny moment masowy jest równy zeru, lecz równoważy niestały rozkład naprężeń momentowych.

Ostatnie równanie nazywać będziemy «endostatycznym» równaniem Cosseratów ze względu na jego znaczenie w opisanym tutaj przypadku szczególnym. Określenie to wyraża niewystępowanie wewnętrznego pędu i krętu. Równanie endostatyczne prawdziwe jest również dla stałego w czasie $Q \neq 0$.

Chociaż inne rezultaty Cosseratów są równie ważne (np. wyrażenie na pracę podane w § 54 i 64), wspomniano tutaj tylko równanie dla momentów, ponieważ dla niego wielokrotnie podawano w latach 1950-1960 sformułowanie nieprawidłowe lub mniej ogólne i jest prawdopodobne, że takie sformułowanie może pojawić się w przyszłości.

Teoria Cosseratów poszła w całkowite zapomnienie na okres prawie lat pięćdziesięciu, chociaż natychmiast po ogłoszeniu była ona dyskutowana przez HELLINGERA i HEUNA [7] w słynnej Niemieckiej Encyklopedii Matematycznej i opracowywana w artykułach dotyczących mechaniki (CHWOLSON i APPELL). Autorzy teorii poświęcili się innym pracom i obaj zmarli przed ponownym odkryciem ich teorii (3). Zaoszczędzono by wiele wysiłku i kontrowersji, gdyby ich praca była znana.

5. Asymetria naprężenia i dyskusje nad propozycjami Lavala i Ramana

Duże zainteresowanie spowodowała seria prac J. LAVALA (od 1951 r.) dotycząca warunków niezmienniczości energii względem obrotu w dynamicznej teorii siatek krystalicznych. W pracach tych wykazywano, że liniowa teoria sprężystości w przypadku najmniejszej symetrii (układ trójskośny) ze względu na centralny charakter

(3) Eugene COSSERAT (urodzony w 1866 r.) był profesorem Wydziału Nauk i dyrektorem obserwatorium astronomicznego w Tuluzie; F. COSSERAT zmarł przedwcześnie; był on głównym inżynierem Wschodniej Kolei Francuskiej.

oddziaływań między atomami siarki powinna opierać się na 45 stałych niezależnych zamiast na 21, jak to ma miejsce w zwykłej teorii sprężystości kryształów.

Dzięki interwencji hinduskiego laureata Nagrody Nobla C. V. RAMANA [9] twierdzenia te uzyskały rozgłos. C.V. Raman odrzucając podejście atomistyczne i twierdząc, że «formułuje na nowo fenomenologiczne równania teorii sprężystości» żądał asymetrii tensora naprężenia i konieczności uwzględnienia wszystkich dziewięciu składowych gradientu deformacji jako argumentów potencjału sprężystości, jeśli odkształcenie nie jest jednorodne. Przeliczono wtedy na nowo liczbę niezależnych stałych sprężystości dla każdego układu krystalograficznego, która wahała się od 45 dla układu trójskośnego do 3 dla ciała izotropowego. W rezultacie szczegółowej analizy dostępnych danych eksperymentalnych dla kryształów wywnioskowano, że teoria została potwierdzona.

Podczas gdy w artykułach Y. LE CORRE [10] pojawiły się coraz śmielsze twierdzenia wraz z rezultatami przeprowadzonych *ad hoc* doświadczeń, które potwierdzały twierdzenia, dalsze prace Lavala [11] wskazywały, że jest 45 statycznych i 36 dynamicznych stałych sprężystości i że istnieją wewnętrzne momenty masowe wywołane samymi tylko obciążeniami mechanicznymi. Odstępstwa od klasycznej teorii sprężystości zostały wyjaśnione skończonym zakresem oddziaływań i skończonymi rozmiarami elementarnego kryształu, które nie pozwalają na przyjęcie, że lokalne odkształcenie jest jednorodne.

Począwszy od 1957 r. propozycje Lavala były rozpatrywane przez N. JOELA i W. A. WOOSTERA [12]. Po dopuszczeniu możliwości istnienia momentów wewnętrznych w kryształach posiadających jedynie aktywność optyczną otrzymali oni z warunków niezmienności względem obrotu zmniejszenie liczby niezależnych stałych z 45 do 39. Opracowali oni również nowe tablice stałych sprężystości odkrywając na nowo 2 stałe dla izotropii, przeprowadzili specjalny eksperyment potwierdzający ich wnioski oraz przedyskutowali równania równowagi nie podając jednak w ogóle jasnych rozważań nad momentami powierzchniowymi.

W tym samym czasie poza doświadczeniami opisanymi we wspomnianych pracach przeprowadzono również i przedyskutowano inne eksperymenty [13] zawsze prowadzące do wniosku, że teoria Ramana i Lavala znajduje potwierdzenie eksperymentalne. Specjaliści rozpoczęli poważne rozważania nad sprzecznościami w nagromadzonych danych doświadczalnych.

W rzeczywistości podane prawie we wszystkich cytowanych pracach argumenty okazują się dzisiaj sprzeczne i całkowicie werbalne. Wystarczy zauważyć, że poza Joelem i Woosterem żaden z autorów nie pisze ani razu równań równowagi, każdy po prostu powtarza, że antysymetryczna część tensora naprężenia jest różna od zera, nie wykazując nawet dlaczego jest ona różna. Żaden z nich (łącznie z ostatnimi) nie rozpatruje ponownie podstaw mechaniki kontinuum (np. nie podaje się żadnej definicji naprężenia). W rezultacie zachodzi całkowite pomieszanie pojęć momentu powierzchniowego i momentu masowego i oczywiście żaden z eksperymentów, na które się powoływano lub który przeprowadzono, nie mógł być sprawdzianem teorii. Co więcej, wszyscy autorzy identyfikują *teorię sprężystości* z *liniową teorią sprężystości* i nie podają definicji prawdziwych dla odkształceń skończonych.

Prace powyższe w żadnym przypadku nie rzuciły nowego światła na wewnętrzne momenty. Omówiliśmy je dlatego, że nawet po ich ostatecznym odrzuceniu niezmiennie umieszczane są w spisach literatury i powodują, że autorzy innych prac, z reguły znacznie bardziej zaawansowanych, idą na znaczne kompromisy dla pogodzenia ich rozważań z opisaną «teorią 45 stałych» (por. np. [26 i 27]).

Już w 1956 r. TIFFEN i STEVENSON [15] użyli jedynego możliwego sposobu obalenia twierdzeń Ramana dając nowe rozważania dotyczące definicji naprężenia i natury oddziaływań powierzchniowych. Napisali oni endostatyczne równanie Cosseratów i wyrażenie na pracę sił i momentów wewnętrznych. Ich artykuł zawiera również dyskusję modyfikacji klasycznej liniowej teorii sprężystości w przypadku, kiedy działają momenty masowe.

Do tej samej postaci równania Cosseratów doszli krytykując Joela i Woostera, MC CLINTOCK, ANDRE, SCHWERDT i STOECKLY [16]. Chociaż niejasno, ich praca omawia (również jako jedna z pierwszych) sprzężenie pomiędzy naprężeniami momentowymi a skręcaniem riemannowskiej przestrzeni z asymetryczną koneksją. Związek powyższego z teorią ciągłych dyslokacji zostanie omówiony dalej.

Ze względu na ograniczenia niniejszej pracy (podane we wstępie) nie podajemy tutaj wszystkich autorów, którzy krytykowali Lavala i Ramana z punktu widzenia teorii siatek krystalicznych. Pierwszymi byli prawdopodobnie LOEWDIN (krytyka z punktu widzenia kwantowej teorii kohezji) i HUNINGTON [17] (siły elektromagnetyczne). Należy tutaj podkreślić, że niektórzy autorzy [18] powtarzali i dyskutowali później eksperymenty, które miały «potwierdzać» twierdzenia Lavala i Ramana znajdując w nich pomyłki. Na drodze eksperymentalnej twierdzenia te zostały więc również odrzucone, jak można było zresztą się spodziewać w oparciu o same tylko rozważania teoretyczne.

W tym samym czasie niezależnie od kontrowersji związanej z twierdzeniem Lavala i Ramana inni autorzy, również nie znając rezultatów Cossertów, rozważali asymetrię tensora naprężenia. Na pierwszym miejscu należy tutaj wymienić pracę S. BODASZEWSKIEGO [19] z 1953 r. która, chociaż znacznie bardziej analityczna niż wszystkie prace dyskutowane wyżej, dzieli z nimi pewien «mistycyzm» o asymetrycznym tensorze naprężenia (podstawą jest tutaj raczej asymetria, a nie momenty, które ją powodują) i nieodróżnianie rzeczywistego materiału od kontinuum, które go opisuje. Poza podaniem związków naprężenie-odkształcenie rozważa się również hydrodynamikę i reologię, a nawet warunki pękania; żaden z otrzymanych rezultatów nie wydaje się jednak być pewny.

Znacznie większą wartość ma praca G. GRIOLI [20]. Mimo przyjęcia asymetrii naprężenia jako podstawy rozważań jest ona jedyną pracą mającą znaczenie do dziś (z prac omawianych w tym punkcie). W pracy tej otrzymano kompletną i bezbłędną teorię skończonych odkształceń kontinuum z naprężeniami momentowymi, ale bez struktury wewnętrznej (kontinuum to będziemy dalej nazywać «Ośrodkiem Cosseratów z zależnymi obrotami»). Znaleziono tutaj raz jeszcze endostatyczne równania Cosseratów, ich wyrażenie na pracę, przedyskutowano postać energii swobodnej podając wreszcie związki naprężenie-odkształcenie i ich zlinearyzowaną postać.

Praca ta nie bierze pod uwagę rezultatów Cosseratów i ich prostego metodologicznego sformułowania, jednak jej rezultaty zostały użyte później przez autorów, którzy odkryli na nowo i uogólnili teorię Cosseratów.

6. Wprowadzenie mikrostruktury do mechaniki kontinuum

W ostatnich kilku latach inne metody dołączyły się do metod opisanych wyżej. Reprezentowane są one w pracach badających zagadnienie makroskopowego opisu ruchów wewnętrznych (przemieszczenia i obroty w kryształach niezależne od przemieszczeń i obrotów siatki). Zagadnienie to prowadzi wprost do rozpatrywania momentów wewnętrznych. Kompletne powiązanie między tymi dwoma podejściami zostanie omówione dopiero po podaniu wszystkich rezultatów braci Cosseratów.

Dawno wiedziano, że makroskopowe odkształcenie w siatce krystalicznej opisuje ruch tylko tych atomów, które leżą w środkach symetrii siatki (por. np. trzeci rozdział wspomnianej wyżej książki Borna i Huanga [1], gdzie względne przemieszczenie innych atomów nazwano «odkształceniem wewnętrznym». Możliwość niezależnych obrotów molekuł była znana już Poissonowi [21] i pojawiała się wiele razy w najbardziej różnych dziedzinach. Zagadnienie wewnętrznego krętu teorii fenomenologicznej występuje np. w dyskusji o symetryzacji tensora momentu energii, która już powstała w czasie formułowania elektrodynamiki relatywistycznej [22].

Zagadnienia ostatniego typu prowadzą do punktu widzenia mechaniki makroskopowej. W przypadkach gdzie trzeba wziąć pod uwagę strukturę materii, znaczenie zyskują raczej metody mechaniki statystycznej [por. TRUESDELL i TOUPIN [30], § 1 (4)], a nie modele molekularne.

Do tej gałęzi należy praca H. GRADA [23] z 1952 r., która mimo że poświęcona w istocie mechanice płynów jest prawdopodobnie aż do 1964 r. najważniejszym przyczynkiem do teorii kontinuum z mikrostrukturą. Zaczynając od uogólnienia klasycznej mechaniki statystycznej dyskutuje się w niej postulaty implikowane przez przejście do mechaniki kontinuum. W ten sposób dochodzi się do naprężeń momentowych i do równania zachowania krętu (równanie to odpowiada ogólnej postaci równań Cosseratów). Należy zauważyć, że ani zewnętrzny ani wewnętrzny kręt nie mogą istnieć samodzielnie, ponieważ są związane za pośrednictwem antysymetrycznej części tensora naprężenia. Również równanie energii otrzymane przez Grada może być powiązane z równaniem Cosseratów.

Można tutaj wymienić również opublikowaną w 1956 r. pracę TOUPINA o sprężystych dielektrykach [24] poświęconą szczególnemu rodzajowi wewnętrznej struktury kontinuum (polaryzacja). W rzeczywistości praca ta rozważa zagadnienia nie objęte niniejszym przeglądem, miała jednak znaczny wpływ na zagadnienia omawiane tutaj. Wprowadza ona do literatury o mikrostrukturach i momentach niespotykaną dotychczas ścisłość metodologiczną i metody analityczne. Rozważa ona

(4) Przypominamy, że równanie Grada uwzględnia dyfuzję cząstek posiadających pęd i kręt, podczas gdy siły i momenty masowe (których się nie uwzględnia) mogą być traktowane jako suma wyrazów, które reprezentują źródła pędu i krętu.

odkształcenia skończone. Można przewidzieć znaczenie tej pracy w dalszych badaniach dotyczących zakresu sił i wewnętrznych momentów.

Przytoczymy teraz grupę prac różnych autorów, opublikowaną w latach 1961–1963, które można uważać za wyraz usiłowania wprowadzenia mikrostruktury (w szczególności obrotów wewnętrznych) do teorii kontinuum. W części tych prac można znaleźć sporadyczne powoływanie się na pracę Cosseratów, jednak bez przyswojenia z niej ani wyników, ani metody. W rezultacie prace te są w ogólności zacofane w stosunku do pracy Cosseratów, chociaż oczywiście można w nich znaleźć pewne oryginalne wyniki i obserwacje.

W latach 1960–61 ukazała się seria artykułów Hindusów RAJAGOPALA i KRISHNANA [25], którzy w przeszłości weryfikowali eksperymentalnie istnienie 45 stałych, obecnie jednak całkowicie uznali krytykę LAVALA prac TIFFENA i STEVENSONA. Wychodząc z warunku niezmienności względem obrotu w siatkach krystalicznych zamierzają oni określić dokładny związek pomiędzy korpuskularnymi teoriami sprężystości kryształów, a teoriami kontinuum. Chociaż wspominają wielokrotnie wewnętrzną strukturę, nie otrzymują jednak w makroskopowej teorii nic poza endostatycznym równaniem Cosseratów. Można to wytłumaczyć często spotykanym nierozróżnianiem fenomenologii rzeczywistego ciała stałego od aksjomatycznych własności modelu użytego dla jego opisu. Powoduje to, że przy analitycznym sformułowaniu dodaje się werbalne stwierdzenie, że wewnętrzne obroty są równe zeru.

Podobny błąd popełniają AÉRO i KUVSHINSKI [26] przy wprowadzeniu wewnętrznych obrotów do liniowej teorii kontinuum z naprężeniami momentowymi. W pierwszej pracy z 1960 r. pewne niedokładności we wstępnym uwzględnieniu «oddziaływań obrotowych» pomiędzy cząstkami nie powodują ujemnych konsekwencji, ponieważ mikrostruktura istnieje tylko w słowach. W rzeczywistości rozpatruje się teorię kontinuum ze związanymi obrotami. Jeszcze raz znaleziono endostatyczne równanie Cosseratów oraz liniowe równania konstytutywne sprężystego ośrodka izotropowego (w tym samym czasie GRIOLI [20] opublikował je dla odkształceń skończonych). Za pomocą dedukcji z równań Grioli wykazano później [32], że równania te są poprawne. W drugiej pracy opublikowanej w 1963 r. wobec braku omówienia podstaw teorii (oczywistej wobec otrzymania w szczególnym przypadku «teorii Lavala o 45 stałych») otrzymuje się nieprawdziwe rezultaty. Poza nieuwzględnieniem wpływu wewnętrznych obrotów na termodynamikę używa się endostatycznego równania Cosseratów, które wyklucza takie obroty. Na powyższych wynikach polegać więc nie można.

Anglicy DAHLER i SCRIVEN [27] po otrzymaniu równań Grada w nocie z 1961 r. (zawierającej zdumiewające powoływanie się na cudze prace; między innymi np. wymienia się jako uznających teorię Lavala autorów, którzy wykazali jej sprzeczność) opublikowali w 1963 r. pierwszą część teorii «kontinuum ze strukturą» w zasadzie opartej na mechanice statystycznej. W oparciu o metodę Grada [23] pomniejszając wkład braci Cosseratów (którzy jakoby mieli tylko nakreślić zarys teorii i napisać jedynie równanie endostatyczne), rozważali *explicite* siły masowe oraz momenty i otrzymali równania ruchu (w zapisie diadowym), które różnią się od równań Grada jedynie rozkładem oddziaływań na siły kontaktowe i inne.

Całkowicie oryginalny jest natomiast ich kinematyczny opis mikrostruktury przez wprowadzenie wielodiadowych gęstości polaryzacji, które makroskopowo reprezentują momenty mas i elementarnych rozkładów mas (porównaj opisana dalej teoria GREENA i RIVLINA). Szczególnie wyczerpująco opisano efekty zmiany polaryzacji najniższego rzędu — wektorowej (moment dipolowy) i diadowy, którego część jest momentem kwadropolowym, po czym podano interesujące termodynamiczne i statyczne rozważania nad równowagą kontinuum z mikrostrukturą. Rozważania nad równaniami konstytutywnymi zostały odłożone do drugiej części pracy.

7. Ponowne odkrycie teorii braci Cosseratow i przypadek obrotów związanych

Endostatyczne równanie Cosseratów zostało przytoczone w 1952 r. w traktacie TRUESDELLA [28] o podstawach teorii sprężystości. Ogólnie jednak biorąc ponowne odkrycie teorii Cosseratów nastąpiło w 1958 r. Poza artykułem GUNTHERA o związku pomiędzy teorią Cosseratów a teorią ciągłych dyslokacji (opisanym dalej w niniejszej pracy) w tym roku ukazała się praca FRICKSENA i TRUESDELLA rozważająca pręty i powłoki (5).

Praca ta obejmuje jedynie opis kinematyczny dla przypadku trójwymiarowego i dostarcza nowego podejścia za pomocą matematycznego formalizmu pola dwupunktowego. Poza innymi proponuje się nazwę «wektory kierunkowe» (directors) dla trzech ortogonalnych wektorów jednostkowych, które określają orientację trójścianu Cosseratów. Proponuje się również uogólnienie ośrodka Cosseratów na przypadek, kiedy obok zmiany kątów możliwa jest zmiana długości wektorów kierunkowych.

Poprzednie rezultaty zostały zebrane w 1960 r. przez TRUESDELLA i TOUPINA w ich traktacie o klasycznych teoriach pola. Istotnym dodatkiem w tej pracy (w zakresie zagadnień omawianych tutaj) jest dyskusja epistemologicznych podstaw mechaniki kontinuum i jej związek z teoriami molekularnymi. Dyskusja ta jest przeprowadzona z punktu widzenia mechaniki statystycznej i koncepcji fizyki szerzonej przez BRIDGMANA. Jeśli nawet można nie zgadzać się z pewnymi twierdzeniami dotyczącymi prawdziwości teorii molekularnych, to trzeba uznać, że podejście na podstawie postulatów do mechaniki kontinuum (a więc również do kontinuum z mikrostrukturą) usunęło sprzeczności pomiędzy teoriami molekularnymi a mechaniką kontinuum (istniejące w prawie wszystkich pracach okresu 1950–1960) i pomiędzy pojęciami o skończonym lub infinitezymalnym charakterze elementu objętościowego. Uważając że całkowe (nie wariacyjne) sformułowanie zasad fizycznych jest ogólniejsze od sformułowań różniczkowych, dyskutuje się szczegółowo równania ruchu kontinuum z naprężeniami momentowymi. Lokalne równania opierają się na ogólnych prawach zachowania.

Istotny postęp szczególnie w dziedzinie ośrodka z naprężeniami momentowymi bez mikrostruktury nastąpił w 1962 r. Największy udział ma tutaj praca R. A. TOUPINA [31], której wysoki poziom ścisłości matematycznej jest taki sam, jaki obserwuje-

(5) Nie podajemy tutaj bibliografii tego zagadnienia. Należy jednak podkreślić, że jedno i dwuwymiarowa teoria Cosseratów pozwala na ścisły opis skręcania prętów i powłok.

my w innych pracach tego autora. Równania pola (dla pędu, krętu i energii) otrzymano z ogólnych równań zachowania. Są one zgodne z ogólnymi równaniami Cosseratów, jeśli zauważyć, że pęd na jednostkę masy jest tutaj prędkością. Dopuszcza się ponadto istnienie dopływu i źródeł energii niemechanicznej.

Po wyjaśnieniu rozkładu biegunowego tensora rzędu trzeciego (np. tensora naprężenia momentowego) na tensory nieredukowane i po dyskusji jego reprezentacji dualnej w przestrzeni trójwymiarowej rozważa się klasę materiałów idealnie odwracalnych. Energia wewnętrzna tych materiałów jest funkcją gęstości entropii, dziewięciu składowych gradientu odkształcenia $x^i_{,\alpha} = \partial x^i/\partial X^\alpha$ i 18 niezależnych składowych materialnego gradientu odkształcenia

$$\varepsilon = \varepsilon\,(x^i_{,\alpha}, \quad x^i_{,\alpha\beta}, \eta),$$

gdzie X^α są materiałami współrzędnymi, pokrywającymi się ze współrzędnymi w stanie naturalnym, a x^i współrzędnymi aktualnymi. Przyjmuje się, że spin nie tylko jest stały w czasie, ale także, że jest równy zeru.

Najważniejszym otrzymanym rezultatem jest twierdzenie, że w takim ośrodku tensor naprężeń momentowych, a przynajmniej jego część dewiatorowa (w reprezentacji osiowej), jest różna od zera oraz że ośrodek Cosseratów, w którym obroty trójścianów są równe obrotom kontinuum (i spin równy zeru), jest szczególnym przypadkiem materiału rozważanego. Materiał, którego energia jest funkcją pierwszych i drugich gradientów deformacji, został nazwany materiałem stopnia 2. Jeśli N jest najwyższym rzędem gradientu, od którego zależy energia idealnie sprężystego materiału, to ten materiał nazywa się materiałem stopnia N (6).

Treść tego podstawowego artykułu uzupełnia wyprowadzenie w oparciu o zasadę prac przygotowanych równań poprzednio znalezionych i pokazanie, że materiał stopnia drugiego jest dyspersyjny (prędkość fali sprężystej zależy od jej częstotliwości).

W tym samym zeszycie zamieszczona jest praca MINDLINA i TIERSTENA [32] rozważająca efekty naprężeń momentowych w liniowej teorii sprężystości. Rozpatrywany ośrodek jest idealnie sprężystym, izotropowym ośrodkiem Cosseratów ze związanymi obrotami. Rezultaty podane są w zapisie diadowym. Dyskusja linearyzowania konstytutywnych równań Toupina (i Griolego) prowadzi do zdefiniowania charakterystycznej długości l, która jest funkcją stosunku nowego modułu giętno-skrętnego do zwykłego modułu ścinania. Stała l powoduje różnicę w rozwiązaniach dla ciał bez i z naprężeniami momentowymi. Różnica jest istotna, jeśli charakterystyczne wymiary ciała i długości fal są porównywalne z l. Dyskutuje się propagację płaskich (dyspersyjnych) fal, drgania płyty, koncentrację naprężeń, centra odkształceń, podaje się twierdzenie o jednoznaczności i opisuje możliwe do przeprowadzenia eksperymenty.

---

(6) Por. NOLL, Arch. Rat. Mech. Anal., 2 (1958) 197. Krótka wskazówka dotycząca tych ośrodków należy już do B. SAINT-VENANTA, Compt. Rend. Acd. Sci, Paris 68 (1869), 569. Były one studiowane przez T. JAMARILLO, A Generalisation of the Energy Function of Elasticity Theory, Univ. of Chicago, 1929.

Poza krótką notą HAYARTA [33] o równaniach konstytutywnych ośrodka Cosseratów należy wymienić tutaj również pracę TOUPINA i GAZISA [34], gdzie zastosowano teorię skończonych odkształceń materiału stopnia drugiego do zagadnienia odkształceń powierzchniowych jednorodnego kryształu. W ogólności nie istnieje stan naturalny wolny od naprężeń i «hipernaprężeń» (uogólniona siła $\partial\varepsilon/\partial x^i_{,\alpha\beta}$, która redukuje się do naprężeń momentowych dla ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami). W rezultacie pojawia się odkształcenie w cienkiej warstwie w pobliżu powierzchni, to samo, które znaleziono w eksperymentach nad dyfrakcją elektronów o małej energii.

8. Uogólnienie kontinuum Cosseratów i nowe modele mikrostruktury

Przedyskutujemy teraz kilka propozycji modeli kontinuum, które dopuszczają bardziej złożone wewnętrzne naprężenia niż obrót trójścianów Cosseratów. Były one sformułowane w kilku ostatnich latach i albo uogólniają kinematykę ośrodka Cosseratów, albo znajdują ją jako przypadek szczególny. Pierwszy rodzaj rozszerzenia wiąże się z ogólną geometrią różniczkową używaną w teorii dyslokacji ciągłych. Ten punkt widzenia sugerowany przez GUENTHERA [35] jednego z odkrywców teorii Cosseratów został przyjęty przez KROENERA [36].

Sześć stopni swobody ośrodka Cosseratów (trzy przemieszczenia i trzy obroty) można określić również za pomocą odkształceń i gradientów obrotów związanych wzajemnie równaniami nierozdzielności. Jeśli usunąć te ostatnie, otrzymuje się ośrodek z 15 stopniami swobody (odkształcenia i krzywizny określone przez przemieszczenia i obroty). W tym ośrodku krzywizny mogą być powiązane z gęstością dyslokacji. Sięgając do znanej (BILBY) identyfikacji gęstości dyslokacji z tensorem Cartana

$$\tfrac{1}{2}(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta})$$

KROENER pokazuje, że niespójne kontinuum Cosseratów jest identyczne z ośrodkiem opisanym przez koneksję afiniczną Γ_{ijk} (15 składowych) w nieriemannowskiej geometrii z asymetryczną koneksją. Odpowiednimi uogólnionymi siłami są: 6 składowych naprężenia i 9 składowych naprężenia momentowego, które opisują «makroskopowo mikroskopowe fluktuacje naprężenia spowodowane ciągłymi dyslokacjami».

Rozważa się również zagadnienia związane z całkowaniem równań ośrodka ciągłego podanych przez EINSTEINA. Dyskutuje się też model «para i dia-sprężystego» kontinuum, gdzie punktowe defekty siatki są scharakteryzowane pod względem mechanicznym jako sprężyste dipole i siły podwójne i wykazuje bliski związek między tą teorią a ogólną teorią względności.

Z naszego punktu widzenia najbardziej ważnym rezultatem rozważań tego typu jest jednak pojawienie się plastyczności w teorii mikrostruktur (poprzez dyslokacje). Uogólnienie, które poszło w zupełnie innym kierunku omawianym wcześniej przez ERICKSENA i TRUESDELLA [29], jest objęte pracą R. D. MINDLINA [37] z 1964 r. rozważającą mikrostrukturę. Praca nie ogranicza się do liniowej teorii sprężystości, lecz idzie znacznie dalej.

Mindlin zakłada, że odkształcalna «mikroobjętość» jest zanurzona w każdej cząstce materialnej i że może opisać elementarny kryształ, molekułę polimeru lub krystalit. Model matematyczny składa się ze zwyczajnego spójnego kontinuum sprężystego, którego każdy punkt jest sam sprężystym kontinuum, które z kolei może ulegać w «mikroośrodku» jednorodnej «mikrodeformacji» (jednak niejednorodnej w «makroośrodku»).

Mikroośrodek pokrywa się z odkształcalnymi wektorami kierunkowymi Ericksena i Truesdella, ponieważ każde jednorodne odkształcenie jest jednoznacznie określone ruchem trzech liniowo niezależnych wektorów. Jeśli założyć, że mikroośrodek jest sztywny, to odpowiada on trójścianowi Cosseratów. Jeśli nie ma różnicy w odkształceniu mikro- i makroośrodka, otrzymuje się materiał stopnia drugiego. Jeśli wprowadzić oba założenia, otrzymuje się ośrodek Cosseratów ze związanymi obrotami (w liniowej wersji).

Równania ruchu otrzymuje się z zasady Hamiltona po przyjęciu, że gęstość energii (na jednostkę makroobjętości) jest funkcją zwykłego symetrycznego tensora makroodkształcenia, gradientów mikro przemieszczeń i względnego odkształcenia obu ośrodków (42 zmienne). Ta konstytutywna hipoteza prowadzi do 903 niezależnych współczynników, które redukują się do 18 dla centrosymetrycznej izotropii. Dla tego ostatniego przypadku opracowano teorię długich fal płaskich i znaleziono dla dyspersji (z gałęzią optyczną i akustyczną) stosunki analogiczne do tych, które występują w teorii długich fal w siatkach krystalicznych [1] i obserwowane są w dyfuzji neutronów. Następnie przedyskutowano różne szczególne zagadnienia i odpowiednie postacie równań.

W jeszcze innym kierunku poszły dalsze uogólnienia zaproponowane w 1964 r. przez Greena i Rivlina [38] w dwu artykułach o wielkiej ścisłości i ogólności. Oznaczając przez v_i kartezjańskie współrzędne dowolnego pola prędkości w zwykłym kontinuum, przyjmuje się, że pochodna pracy względem czasu (na jednostkę masy) sił masowych wynosi $\dot{L} = F_i v_i$. Wyrażenie typu $\dot{L} = F_{ij} v_{ij}$, gdzie F_i jest antysymetryczne, może przedstawiać pracę pola zewnętrznych sił masowych na prędkościach kątowych (antysymetryczna część gradientu prędkości). Jeśli F_{ij} ma część symetryczną, to wyrażenie to przedstawia pochodną względem czasu pracy sił podwójnych (częściowo momenty i częściowe samozrównoważone) związanych ze wszystkimi gradientami prędkości; takie siły występują np. w ośrodku z mikrostrukturą Mindlina.

Green i Rivlin rozważają wyrażenie na pochodną pracy względem czasu, które zawiera gradienty prędkości rzędu i z którymi jest sprężona 2^β biegunowa siła masowa reprezentowana przez tensor rzędu $\beta+1$:

$$\dot{L} = F_{ii_1, i_2, \ldots, i_\beta} v_{i, i_1 i_2, \ldots, i_\beta}.$$

Podobnie definiuje się wielobiegunowe naprężenia, których moc wynosi $\dot{L} = \sigma_{ji_1 i_2, \ldots, i_\beta i} v_{i, i_1 i_2, \ldots, i_\beta}$. Dodatkowy indeks oznacza powierzchnię, na którą działa siła. Definiuje się również złożone wielobiegunowe siły, które sprzężone są z uogólnionymi przemieszczeniami (funkcja gradientów prędkości różnych rzędów) w ten sposób, że praca jest skalarem.

Równań ruchu nie otrzymuje się z równań zachowania, lecz dedukuje się z postulowanej nierówności produkcji entropii przez narzucenie na równanie energii niezmienniczości względem sztywnych ruchów ciała. Ostatecznie «uogólniony materiał sprężysty» definiuje się za pomocą równań konstytutywnych zakładając, że energia i naprężenia są funkcjami entropii i gradientów przemieszczenia do dowolnego rzędu włącznie.

Idea innego uogólnienia wprowadzonego w drugiej pracy Greena i Rivlina sięga pracy Truesdella i Toupina [30] (por. również polaryzacje DAHLERA i SCRIVENA [27]).

Przy przejściu od ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami do ośrodka ogólnego obroty trójścianów stają się niezależne od obrotów kontinuum, a gradienty prędkości zostają zastąpione bardziej ogólnymi wielobiegunowymi przemieszczeniami. Na przykład dla wielobiegunowych sił masowych czasowa pochodna pracy wynosi

$$\dot{L} = F_{ij_1 j_2 \dots j_\gamma} v_{ij_1 j_2 \dots j_\gamma}.$$

W specjalnych przypadkach część indeksów v może być indeksami różniczkowymi (gradienty zwykłej prędkości). Przyjmując w poprzednim wyrażeniu $\gamma = \alpha + \beta$ otrzymuje się

$$\dot{L} = F_{ij_1 \dots j_B;\, i_1 \dots i_\alpha} v_{ij_1 \dots j_\beta;\, i_1 \dots i_\alpha}.$$

GREEN i RIVLIN opracowali systematycznie teorię tych prędkości i przemieszczeń wielobiegunowych oraz odpowiednich sił masowych, sił powierzchniowych i naprężeń (mechanika wielobiegunowego kontinuum). Każde równanie podane jest w zmiennych przestrzennych i materialnych (jednak zawsze w prostokątnych kartezjańskich). Podobnie jak w pracy pierwszej otrzymuje się równania ruchu z równania energii, nierówności produkcji entropii i warunków niezmienniczości względem nałożonego ruchu sztywnego. Wprowadzenie nowych stopni swobody spowodowało konieczność nowego zdefiniowania energii kinetycznej, która jest jednorodną kwadratową funkcją wszystkich wielobiegunowych prędkości. Klasyczne równania (równowaga czworościanu) są spełnione przez «jednobiegunowe» zwyczajne siły i naprężenie nawet, jeśli istnieją siły wielobiegunowe. Rezultat ten znany był wcześniej dla kontinuum Cosseratów w przypadku istnienia naprężeń momentowych.

Następnie poprzez równania konstytutywne definiuje się ciało sprężyste zakładając, że energia i wielobiegunowe naprężenie są funkcjami entropii oraz jedno- i wielobiegunowych przemieszczeń aż do pewnego rzędu włącznie oraz ich pierwszych gradientów. Wykazuje się, że gradienty wyższych rzędów nie mogą występować w równaniach konstytutywnych. Na koniec dla jedno- i dwubiegunowych przemieszczeń znajduje się infinitezymalną teorię sprężystości, która praktycznie pokrywa się z teorią Mindlina.

W «dodatku» buduje się teorię ośrodka składającego się z cząstek materialnych, gdzie wielobiegunowe przemieszczenia określają położenia cząstek względem środka ciężkości. Teoria ta stanowi uzasadnienie dla definicji wprowadzonych dla kontinuum, gdzie podstawą był układ aksjomatów.

9. Monografia Toupina z 1964 r.

Artykuł Toupina *Teorie sprężystości z naprężeniami momentowymi* [39] może być właściwym zamknięciem niniejszego przeglądu. Poza zwykłą ścisłością rozważań praca ta dla przynajmniej dwóch powodów jest podstawową dla teorii naprężeń momentowych i mikrostruktury. Po pierwsze skompletowano tutaj w nowoczesny sposób ogólną teorię braci Cosseratów (nie związane obroty) i przedyskutowano szczegółowo rezultaty i metodę dedukcyjną. Po drugie artykuł zawiera krótkie omówienie historyczne (z którego korzystano wiele razy w niniejszej pracy) i dyskusję związków pomiędzy różnymi modelami kontinuum z naprężeniami momentowymi. Nie omówiono jedynie teorii Greena i Rivlina, która została opublikowana w tym samym czasie co monografia Toupina. Przede wszystkim zdefiniowano bardzo ogólny formalizm kinematycznego opisu różnych modeli, gdzie skończone odkształcenia kontinuum są opisane w krzywoliniowych współrzędnych, a materialne współrzędne ξ^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ nie koniecznie pokrywają się z przestrzennymi współrzędnymi w konfiguracji odniesienia.

Mikrostruktura jest opisana wektorami kierunkowymi $\underset{a}{d^i}(\xi, t)$ $(a, i = 1, 2, 3)$ wprowadzonymi przez Ericksena i Truesdella. Jeśli odkształcają się one swobodnie, to opisują mikroośrodek Mindlina, jeśli natomiast wektory $\underset{a}{d^i}$ są ortogonalne i jednostkowe, to reprezentują trójścian Cosseratów. Pokrótce mówi się również o mikrostrukturze bardziej złożonej opisanej polami tensorowymi $\underset{a}{\Phi^{ijk}}(\xi, t)$ $(a = 1, 2, ..., n)$.

Stosując wariacyjną procedurę Cosseratów rozszerzoną na odkształcalne wektory kierunkowe definiuje się gęstość działania

$$L = L(x^i, t, \underset{\alpha}{d^i}, \dot{x}^i, \underset{\alpha}{\dot{d}^i}, x^i_{,\alpha}, \underset{a}{d^i_{,\alpha}}, \xi^\alpha),$$

gdzie $x^i = x^i(\xi^\alpha, t)$ określa położenie ξ w chwili t, a

$$x^i_{,\alpha} = \partial x^i(\xi^\alpha, t)/\partial\xi^\alpha, \qquad \dot{x}^i = \partial x^i(\xi^\alpha, t)/\partial t.$$

Równania ruchu są równaniami Eulera dla zasady Hamiltona

$$\delta \int_I \int_P L(\xi, t)\, dV dt = 0$$

dla dowolnych niezależnych wariacji δx^i i $\delta \underset{a}{d^i}$, gdzie P jest dowolną częścią ośrodka sprężystego, a I dowolnym przedziałem czasowym. Postulując niezmienniczość L względem «przemieszczeń euklidesowych» (sztywne ruchy kontinuum łącznie z odpowiednim sztywnym obrotem wektorów kierunkowych) pokazuje się, że warunkami koniecznymi i dostatecznymi niezmienniczości są równania zachowania pędu, krętu i energii.

Odnosząc równania ruchu do konfiguracji aktualnej otrzymuje się dla pędu zwykłe równanie Cauchy'ego i zamiast równania Cosseratów dla krętu bardziej ogólne równanie, które można nazwać równaniem Toupina. Część antysymetryczna tego równania (dla podstawienia $1/2\,(a_{ij} - a_{ji}) = a_{[ij]}$ zamiast a_{ij})

$$m_{ij}{}^{k}{}_{,k} - t_{[ij]} + l_{[ij]} = j^{-1}\,(\dot{Q}_{[ij]} + \dot{x}_{[i}\,P_{j]}), \qquad m_{ij}{}^{k} n_k = h_{[ij]}$$

jest równaniem Cosseratów (bez ograniczenia do kartezjańskich prostokątnych współrzędnych), w którym zamiast tensorów osiowych (p. 4) użyto tensorów biegunowych. Moment masowy i spin są reprezentowane przez antysymetryczne tensory drugiego rzędu, a naprężenie momentowe przez tensor trzeciego rzędu, antysymetryczny względem dwu pierwszych indeksów $m_{ij}{}^{k} = m_{ji}{}^{k}$. Okazuje się, że antysymetryczna część tego równania odpowiada przypadkowi sztywnego układu wektorów kierunkowych, a więc trójścianowi Cosseratów.

Równanie Toupina ma jednak część symetryczną. Jej interpretacja jest trudniejsza. Ze względu na miejsce, które potrzebne byłoby do zdefiniowania wszystkich symboli, ograniczymy się tutaj do podania interpretacji jedynie części wyrazów. Na przykład tensor, który w równaniach Cosseratów przedstawia spin, ma w równaniu Toupina również część symetryczną. Jeśli przyjąć, że

$$\partial L/\partial \dot{\underset{a}{d}} = \overset{ab}{\nu}\,\dot{\underset{a}{d}}{}^{i}, \qquad \dot{\overset{ab}{\nu}} = 0,$$

to ta część symetryczna opisuje szybkość zmiany czynnika postaci («form factor») jednorodnego mikroośrodka Mindlina.

Podobnie zamiast antysymetrycznej względem i oraz j dywergencji $m_{ij}{}^{k}$ tensora naprężeń momentowych w równaniu Toupina występuje dywergencja $h_{ij}{}^{k}{}_{,k}$ tensora nazwanego tensorem hiper-naprężenia. Wielkość $m_{ij} = h_{[ij]}{}^{k}\, n_k$ jest momentem powierzchniowym, a odpowiednia część symetryczna reprezentuje powierzchniowe samozrównoważone siły podwójne.

W przypadku ośrodka drugiego rzędu ten tensor hiper-naprężenia zdefiniowany ogólnie jako

$$h_{ij}{}^{k} = -j^{-1}\,\underset{a}{d}{}^{i}\,\frac{\partial L}{\partial \underset{a}{d}{}^{j}{}_{,\alpha}}\,x^{k}{}_{,\alpha}$$

jest omawianym w p. 7 wyrażeniem $\partial\varepsilon/\partial x^{i}{}_{,\alpha\beta}$.

Ten model kontinuum z energią sprężystą

$$E(P) = \int_P \varepsilon\,(x^{i}{}_{,\alpha}, x^{i}{}_{,\alpha\beta}, \xi)\,dV.$$

Toupin rozważa ponownie dopuszczając możliwość zależności energii kinetycznej od wektorów kierunkowych. Dowodzi, że ośrodek Cosseratów ze związanymi obrotami nawet przy spinie różnym od zera jest przypadkiem szczególnym ośrodka drugiego rzędu i że jego energia jest funkcją tensora odkształcenia i jego gradientu. W ośrodku tym w przeciwieństwie do ogólnego materiału drugiego rzędu nie ma ani dyspersji ani odkształcenia brzegu. Toupin uważa, że nie należy poświęcać mu dalszych studiów.

W ostatniej części pracy Toupina, poświęconej odkształceniom brzegu, podano opracowaną właśnie teorię TOUPINA i GAZISA [34]. Wykazano, że dla prawie wszystkich jednorodnych i izotropowych materiałów drugiego rzędu istnieje stan naturalny określony z dokładnością do ruchu sztywnego. W stanie tym istnieje jednak hipernaprężenie, którego występowanie powoduje odkształcenie warstwy powierzchniowej w pobliżu powierzchni swobodnej, co jest jakościowo zgodne z doświadczalnymi danymi dla kryształów.

Literatura cytowana w tekście

1. M. BORN, K. HUANG, *Dynamical Theory of Crystal Lattices*, Oxford 1956.

2. J. C. MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford 1873 (paragraph 641/3rd ed.).

3. J. MAC-CULLAGH, Trans. R. Irish Acad. Sci., 21, 17 (1839).

4. A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity*, 1st ed., Cambridge 1892; Combebiac, M., Bull. Soc. Math. France **30**, 108 and 242 (1902); C. Somigliana, Rend. Accad. Lincei **19**, 1° sem., 43 (1910).

5. P. DUHEM, Ann. École Norm. (3) **10**, 187 (1893); **21**, 99 and 375 (1904); 22, 143 (1905); 23, 169 (1906) «Récherches sur l'élasticité», Paris 1906.

6. E. and F. COSSERAT, *Theorie des corps deformables*, Hermann, Paris 1909.

7. E. HELLINGER, Enzy. d. Math. Wiss. IV, 4,30; K. Heun., Enzy. d. Math. Wiss. IV, 2,11 (1914). M.J. Sudria, Summary, Mém. Sci. Phys. 29, Paris 1935, actually omits the very parts which are of interest here.

8. J. LAVAL, Rapp. Discuss. IX^e Cons. Physique Solvay 273 (1951); Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 232, 1947 (1951) and **238**, 1773 (1954); Bull. Soc. Franc. Minéral. Crist. **77**, 219 (1954).

9. C. V. RAMAN and K. S. VISWANATHAN, Proc. Indian Acad. Sci. A **42**, 1 and A 42, 51 (1955); C. V. RAMAN, and D. KRISHNAMURTI, Proc. Indian Acad. Sci. A **42**, 111 (1955).

10. Y. LE CORRE, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **236**, 1903 (1953); Bull. Soc. Franc. Minéral. Crist. **76**, 464 (1953); **77**, 1363 (1954) and **78**, 33 (1955); J. Phys. Radium **17**. 934 (1956); **19**, 541 (1958) and **19**, 704 (1958).

11. J. LAVAL, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **242**, 2502 (1956); J. Phys. Radium **18**, 247 **18**, 289; **18**, 369 (1957); **19**, 509 (1958); **24**, 1 (1963).

12. N. JOEL, W. A. WOOSTER, Nature **180**, 430 (1957); **182**, 1078 and 1149 (1958); Acta Cryst. **11**, 575 (1958); **13**, 516 (1960) and **14**, 571 (1961).

13. ZUBOV and FIRSOVA, Kristallografiya **1**, (1956); KRISHNAN, CHANDRASEKHARAN and RAJAGOPAL, Nature **182**, 518 (1958); Golden Jubilee Res. Vol. Ind. Inst. Sci., 150 (1959); Proc. Nat. Inst. Sci. India A **26**, 311 (1960).

14. R. F. S. HEARMON, Advances in Physics **5**, 323 (1956).

15. R. TIFFEN and A. C. STEVENSON, Quart. J. Mech. Appl. Math., **9**, 306 (1956).

16. MC CLINTOCK, ANDRE, SCHWERDT, STOECKLY, Nature **182**, 652, (1958); see BILBY, BULLOUGH and SMITH, Roy. Proc. Soc. A **231**, 263 (1955).

17. P. O. LOEWDIN, Advances in Physics **5**, 17, 1 (1956); H.B. Huntington in Seitz and Turnbull, Solid State Physics **7**, 213 (1958).

18. JAFFE and SMITH, Phys. Rev. **121**, 1604 (1961); Aleksandrov and Ryzhova, Soviet Physics, Crystallography **6**, 228 (1961); Soviet Physics Doklady **7**, 99 (1962).

19. S. BODASZEWSKI, Arch. Mech. Stos., **5** (1953), 351.

20. G. GRIOLI, Ann. Mat. Pura Appl., IV, **50** (1960).

21. A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1927 (Appendix B); see here further historical references.

22. W. PAULI, *Relativätstheorie*, Enzy. D. Math. Wiss., V. 19 (1921), Paragraph 35, with related bibliography; see also E. HENRIOT, Mém. Sci. Phys., **30**, 1–2 (1936).

23. H. GRAD, Commun. Pure Appl. Math., **5**, 4, 455 (1952).

24. R. A. TOUPIN, J. Rat. Mech. Anal., **5**, 6, 849 (1956).

25. E. S. RAJAGOPAL and R. S. KRISHNAN, Proc. 1st Symp. Solid State Phys. Bangalore 1960; E. S. RAJAGOPAL, Ann. Physik **6**, 177; 6, 182; **6**, 192 (1960); R. S. KRISHNAN and E. S. RAJAGOPAL, Ann. Physik **8**, 122 (1961).

26. E. L. AÉRO and E. V. KUVSHINSKI, Soviet Physics, Solid State **2**, 1272 (1961); **5**, 1892 (1964) (oryginals in the Russian language date back to 1960 and 1963).

27. J. S. DAHLER, L. E. SCRIVEN, Nature **192**, 36 (1961); Proc. Roy Soc. A 275, 1363, 504 (1963).

28. C. J. TRUESDELL, Rat. Mech. Anal., **1**, 125 (1925).

29. J. L. ERICKSEN and C. TRUESDELL, Arch. Rat. Mech. Anal., **1**, 295 (1958).

30. C. TRUESDELL and R. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, in Handbuch der Physik III/1, Springer Verlag, Berlin 1960.

31. R. A. TOUPIN, Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 5, 385 (1962).

32. R. D. MINDLIN and H. F. TIERSTEN, Arch., Rat. Mech. Anal., **11**, 5, 415 (1962).

33. R. HAYART, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **254**, 3312 (1962).

34. R. TOUPIN and D. GAZIS, Proc. Ist Intern. Cong. on Lattice Dynamics Copenhagen 1963.

35. W. GUENTHER, Abh. Braunschweigische Wiss. Ges. **10**, 195 (1958).

36. E. KROENER, Arch. Rat. Mech. Anal. **4**, 4, 273 (1960); see B. A. BILBY, in Sneddon and Hill, Progress in Solid Mechanics **1**, 347 (1960).

Literatura podstawowa

E. and F. COSSERAT, *Theorie des corps deformables* [6].

H. GRAD, *Statistical Mechanics*, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals [23].

R. A. TOUPIN, *The Elastic Dielectric* [24].

C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories* [30]; paragraphs 1–7, 60, 157, 166, 200–207, 231, 232, 240, 241, 253, 292, 293.

E. KROENER, *Allgemeine Kontinuumstheorie der Vorsetzungen und Eigenspannungen* [36].

R. A. TOUPIN, *Elastic Materials with Couple-stresses* [31].

R. D. MINDLIN and H. F. TIERSTEN, *Effects of couple-stresses in linear elasticity* [32].

J. S. DAHLER and L. E. SCRIVEN, *Theory of structured Continus* I [27].

R. D. MINDLIN, *Microstructure in Linear Elasticy* [37].

A. E. GREEN and R. S. RIVLIN, *Simple Force and Stress Multipoles* [38].

R. A. TOUPIN, *Theories of Elasticity with Couple-stress* [39].

A. E. GREEN and R. S. RIVLIN, *Multipolar Continuum Mechanics* [38].

Резюме

ВНУТРЕННИЕ МОМЕНТЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И КОНТИНУУМ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Работа является критическим образом, изданных до 1964 г. публикаций, касающихся нерассматриваемого в классической теории вопроса моментных напряжений и описания движений, связанных с атомарной структурой материи. Обращено внимание на теорию братьев Е. и Ф. Кассера и эти оба вопроса вошли в изучение новых и более разработанных с математической точки зрения, моделей континуума, обладающего «внутренней структурой». Эти изучения в свою очередь развили новые точные исследования основных принципов механики континуума.

Summary

INTERNAL COUPLES IN SOLIDS AND STRUCTURED CONTINUA

This paper is a survey of works published until 1964 about couple-stresses, not considered by the classical theory of elasticity, and the capability of the latter to describe motions connected with the atomistic structure of matter. Since the re-discovery of the French scientists, E. and F. Cosserat both the problems have been unified in the study of new and more elaborate mathematical models of a continuum with an "internal structure", involving in turn a new accurate survey of fundamental principles of mechanics of continua.

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 stycznia 1966 r.