

O GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ TEORII POWŁOK LEPKOSPĘŻYSTYCH

EUGENIUSZ BIEŁEWICZ (GDAŃSK)

Praca dotyczy zagadnienia izotropowych powłok lepkospężystych poddanych działaniu obciążenia zewnętrznego i ustalonego pola temperatury z uwzględnieniem geometrycznej nieliniowości. Omówione zostały tylko problemy quasi-statyczne.

Ścisłe potraktowanie tego problemu jest zadaniem bardzo trudnym, gdyż, jak wiadomo, nie istnieje w obecnej chwili całkowicie konsekwentna teoria liniowa powłok sprężystych [1].

Ponieważ celem pracy jest doprowadzenie zagadnienia do równań, które mogą być użyte do rozwiązywania praktycznych problemów — konieczne było wprowadzenie szeregu założeń upraszczających. Nie wykorzystano w pracy równań nieliniowej teorii powłok sprężystych znanych z monografii [2, 3 i 4], lecz przy użyciu zapisu tensorowego dokonano zwięzłego wyprowadzenia bardziej ogólnych równań podstawowych. Główne założenia upraszczające zostały sformułowane na początku pracy, a pozostałe omówiono w trakcie wyprowadzania podstawowych zależności. W stosunku do publikacji [5 i 7] praca zawiera ujęcie geometrycznej nieliniowości, a w odniesieniu do [6] uwzględnienie wpływu pola temperatury. Poza tym różnica polega na tensorowym zapisie zagadnienia. Rozważania zostały zilustrowane prostym przykładem.

W przyjęciu oznaczeń wzorowano się na monografii [8], która zawiera tensorowe ujęcie geometrii powierzchni oraz podstawy liniowej teorii powłok sprężystych. Dlatego też w pracy niniejszej pozostawiono bez szczegółowego objaśnienia wszystkie zasadnicze pojęcia teorii powierzchni i powłok. Użyte oznaczenia pokrywają się w zasadzie również z symboliką pracy [1].

Główne oznaczenia są następujące:

- E, G, ν stałe materiałowe,
- $\alpha(t)$ współczynnik rozszerzalności cieplnej,
- t grubość powłoki,
- L długość charakterystyczna powłoki (np. najmniejszy promień krzywizny lub długość jednej z krawędzi powłoki),
- $\lambda = t/L$,
- θ_1, θ_2 bezwymiarowe współrzędne na powierzchni środkowej powłoki,
- θ_3 współrzędna prostopadła do powierzchni środkowej,
 $-1/2 \leq \theta_3 \leq 1/2$,

- $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_3$ wektory podstawowe powierzchni środkowej powłoki przed odkształceniem,
 $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ tensory 1 i 2 formy powierzchni przed odkształceniem,
 $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$ tensory 1 i 2 formy powierzchni po odkształceniu,
 $n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}$ tensory sił wewnętrznych powłoki,
 $L\mathbf{v} = L(v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + w\mathbf{a}_3)$ wektor przemieszczenia punktów powierzchni środkowej powłoki,
 v_α, w bezwymiarowe współrzędne wektora przemieszczenia,
 p^α, p współrzędne wektora obciążenia zewnętrznego,
 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ symbol Ricciego,
 $\delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu}$
 $()_{,\alpha}$ symbol pochodnej cząstkowej,
 $()|_\alpha$ symbol pochodnej kowariantnej w metryce powłoki nieodkształconej,
 $()||_\alpha$ symbol pochodnej kowariantnej w metryce powłoki odkształconej.

Wskaźniki greckie przebiegają wartości 1, 2.

Główne założenia będące podstawą opuszczania pewnych wyrazów w poszczególnych zależnościach są następujące:

- 1) Odkształcenia są nieskończenie małe.
- 2) Tylko składowa przemieszczenia prostopadła do powierzchni środkowej powłoki ma wartość skończoną, ale małą w stosunku do wymiarów powłoki.
- 3) Obowiązuje założenie Kirchhoffa-Love'a (dotyczące prostej normalnej do powłoki).
- 4) Związki fizyczne mają postać liniową.
- 5) Grubość powłoki jest stała.

Z założeń tych wynika, że w stosunku do teorii liniowej należy w tensorze odkształceń uwzględnić wyrazy nieliniowe oraz równania równowagi napisać dla stanu odkształconego.

1. Związki geometryczne

Punkty powłoki opisane przed odkształceniem za pomocą równania

$$(1.1) \quad \mathbf{r}_0 = L(\mathbf{r} + \lambda\theta_3 \mathbf{a}_3)$$

po odkształceniu opisane będą następująco:

$$(1.2) \quad \mathbf{R} = L[\mathbf{r} + \mathbf{v} + \lambda\theta_3(\mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\omega})],$$

gdzie \mathbf{v} jest wektorem przemieszczenia powierzchni środkowej a $\boldsymbol{\omega} = \omega^\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha$, co wynika z założenia, że punkty leżące na prostej przed odkształceniem pozostają na prostej po odkształceniu (pierwsza część założenia Kirchhoffa-Love'a). Wektory podstawowe powłoki odkształconej przedstawione w układzie współrzędnych powłoki nieodkształconej są następujące:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha &= \mathbf{R}_{,\alpha} = L[\lambda_\alpha^e \mathbf{a}_e + \mu_\alpha \mathbf{a}_3 + \lambda\theta_3(v_\alpha^e \mathbf{a}_e + b_\alpha^e \omega_e \mathbf{a}_3)], \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{R}_{,3} = L\lambda(\mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

Związki (1.3) napisano przy użyciu oznaczeń

$$(1.4) \quad \lambda_{\alpha}^e = \delta_{\alpha}^e + v^e|_{\alpha} - b_{\alpha}^e w, \quad \mu_{\alpha} = w_{,\alpha} + b_{\alpha}^e v_e, \quad \nu_{\alpha}^e = -b_{\alpha}^e + \omega^e|_{\alpha}.$$

Wektory podstawowe A_{α} powierzchni środkowej powłoki otrzymamy z G_{α} przyjmując $\theta_3 = 0$.

Teraz bez trudu obliczymy tensory metryczne

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha} \cdot G_{\beta}, \quad G_{\alpha 3} = G_{\alpha} \cdot G_3 \quad \text{i} \quad A_{\alpha\beta} = A_{\alpha} \cdot A_{\beta}.$$

Odpowiednie tensory w stanie nieodkształconym są: $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha 3}$ i $a_{\alpha\beta}$, przy czym

$$(1.5) \quad g_{\alpha\beta} = L^2 [a_{\alpha\beta} - 2\lambda\theta_3 b_{\alpha\beta} + (\lambda\theta_3)^2 b_{\beta}^{\alpha} b_{\alpha\beta}], \quad g_{\alpha 3} = 0.$$

Tensor odkształcenia określono następująco:

$$(1.6) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}].$$

Podstawiając do (1.6) tensory $G_{\alpha\beta}$ i $g_{\alpha\beta}$ otrzymamy

$$(1.7) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{L^2}{2} [v_{\alpha}|_{\beta} - 2b_{\alpha\beta} w + v_{\beta}|_{\alpha} + (v^e|_{\alpha} - b_{\alpha}^e w) (\omega^{\mu}|_{\beta} - b_{\beta}^{\mu} w) a_{e\mu} + \\ + (w_{,\alpha} + b_{\alpha}^e v_e) (w_{,\beta} + b_{\beta}^{\mu} v_{\mu}) + \lambda\theta_3 (\lambda_{\alpha\mu} \nu_{\beta}^{\mu} + \lambda_{\beta\mu} \nu_{\alpha}^{\mu} + \mu_{\alpha} b_{\beta}^e \omega_e + \mu_{\beta} b_{\alpha}^e \omega_e + 2b_{\alpha\beta})].$$

Wprowadzimy teraz uproszczenia wynikające z założeń 1) i 2) tzn.

$$v_e \ll w, \quad w \ll 1.$$

Wówczas związek (1.7) przyjmuje postać

$$(1.8) \quad \gamma_{\alpha\beta} \approx \frac{L^2}{2} [v_{\alpha}|_{\beta} + v_{\beta}|_{\alpha} - 2b_{\alpha\beta} w + w_{,\alpha} w_{,\beta} + b_{\alpha\mu} b_{\beta}^{\mu} w w + \lambda\theta_3 (\omega_{\alpha}|_{\beta} + \omega_{\beta}|_{\alpha})].$$

Należy jeszcze wykorzystać drugą część założenia Kirchhoffa-Love'a, tzn.

$$(1.9) \quad \gamma_{\alpha 3} = \frac{1}{2} G_{\alpha 3} \approx \frac{\lambda L^2}{2} [\omega_{\alpha} + w_{,\alpha} + \lambda\theta_3 (\omega|_{\alpha} \omega_e)] = 0.$$

Pomijając $\lambda\theta_3 \omega^e|_{\alpha} \omega_e$ jako iloczyn małych wielkości otrzymamy związek

$$(1.10) \quad \omega_{\alpha} = -w_{,\alpha}$$

tak jak w teorii liniowej.

Po wykorzystaniu (1.10) równanie (1.8) przepiszemy następująco:

$$(1.11) \quad \gamma_{\alpha\beta} \approx L^2 (\alpha_{\alpha\beta} + \lambda\theta_3 \beta_{\alpha\beta}),$$

gdzie

$$(1.12) \quad \alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha}|_{\alpha} + v_{\beta}|_{\beta}) - b_{\alpha\beta} w + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} + b_{\alpha\mu} b_{\beta}^{\mu} w w, \\ \beta_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta}.$$

2. Równania równowagi

Zakładając, że siły wewnętrzne powłoki można zdefiniować tak, jak w teorii liniowej ([8], str. 379), postać równań równowagi pozostanie taka sama, jak w teorii liniowej, jedynie działania przewidziane równaniami należy wykonywać w metryce powłoki odkształconej. Napiszemy je zatem następująco:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} n^{\alpha\beta} |_{|\alpha} - B_{\alpha}^{\beta} m^{\lambda\alpha} |_{|\lambda} + p^{\beta} &= 0, \\ m^{\alpha\beta} |_{|\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + p &= 0, \quad (n^{\alpha\beta} + m^{\lambda\alpha} B_{\lambda}^{\beta}) \varepsilon_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned}$$

Równania te różnią się od równań teorii liniowej symbolem pochodnej kowariantnej w metryce powłoki odkształconej jak również wprowadzeniem tensora 2 formy powierzchni także dla odkształconej powierzchni środkowej.

W dalszym ciągu zajmiemy się wyrażeniem tych wielkości przez związki określone dla powłoki nieodkształconej. Przyjmując przybliżoną wartość wektorów podstawowych, co wynika z założonych uproszczeń

$$(2.2) \quad \mathbf{A}_{\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha} + w_{,\alpha} \mathbf{a}_3,$$

wyznamy wektor prostopadły do odkształconej powierzchni środkowej

$$(2.3) \quad \mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} = \frac{1}{\sqrt{w_{,\alpha} w^{\alpha} + 1}} (-w_{,\alpha} \mathbf{a}^{\alpha} + \mathbf{a}_3).$$

Stąd według wzoru geometrii powierzchni

$$(2.4) \quad B_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{w_{,\alpha} w^{\alpha} + 1}} (w |_{\alpha\beta} + w_{,\lambda} w_{,\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + b_{\alpha\beta}).$$

Pomijając iloczyny w ostatniej zależności napiszemy

$$(2.5) \quad B_{\alpha\beta} \approx w |_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}.$$

Przy obliczaniu pochodnej kowariantnej w metryce powłoki odkształconej symbole Christoffela należy wyznaczać ze wzoru

$$(2.6) \quad \bar{\Gamma}_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta,\gamma} + A_{\alpha\gamma,\beta} - A_{\beta\gamma,\alpha}),$$

gdzie

$$(2.7) \quad A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + 2a_{\alpha\beta}.$$

Związek (2.7) wynika z równania (1.6) z wykorzystaniem (1.11) i (1.12) przez przyjęcie $\theta_3 = 0$.

Podnosząc w (2.6) jeden wskaźnik napiszemy

$$(2.8) \quad \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = A^{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma\lambda}.$$

Zastosujemy w dalszym ciągu rozwinięcie tensora (2.7) w szereg Taylora wzorując się na sposobie podanym przez KILCZEWSKIEGO ([9], str. 63):

$$(2.9) \quad A^{\alpha\beta} \approx a^{\alpha\beta} + 2 \frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial a_{\xi\eta}} a_{\xi\eta} = a^{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta\xi\eta} a_{\xi\eta}.$$

Po podstawieniu (2.9) związek (2.8) przyjmie postać

$$(2.10) \quad \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + D_{\beta\gamma}^{\alpha},$$

gdzie $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ jest symbolem Christoffela powłoki nieodkształconej, a

$$(2.11) \quad D_{\beta\gamma}^{\alpha} = a^{\alpha\lambda} (a_{\lambda\beta, \gamma} + a_{\lambda\gamma, \beta} - a_{\beta\gamma, \lambda}) + C^{\alpha\lambda\xi\eta} a_{\xi\eta} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma\lambda}^{\alpha}.$$

Naśladując [9], str. 65, można wykazać, że wyrażenie (2.11) jest tensorem.

Wykorzystując (2.10) napiszemy np.

$$(2.12) \quad n^{\alpha\beta}|_a = n^{\alpha\beta}|_a + D_{\alpha\lambda}^{\alpha} n^{\lambda\beta} + D_{\alpha\lambda}^{\beta} n^{\alpha\lambda}.$$

Na podstawie wzorów (2.5) i (2.10) potrafimy zatem napisać równania (2.1) we współrzędnych powłoki nieodkształconej. Z przyjęcia, że odkształcenia są nieskończenie małe (założenie 1) wynika, że $a_{\alpha\beta} \ll a_{\alpha\beta}$, a to jest podstawą całkowitego pominięcia w równaniu (2.10) tensora $D_{\beta\gamma}^{\alpha}$ w porównaniu z

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = a^{\alpha\lambda} (a_{\lambda\beta, \gamma} + a_{\lambda\gamma, \beta} - a_{\beta\gamma, \lambda}).$$

W dalszym ciągu przyjmujemy zatem

$$(2.13) \quad \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} \approx \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha},$$

co w znacznym stopniu upraszcza równania (2.10).

3. Związki fizyczne

W zagadnieniu skończonych przemieszczeń związki fizyczne nie mogą mieć postaci liniowej. Tym niemniej w przybliżonych, nieliniowych teoriach powłok sprężystych często zakłada się liniowość związków fizycznych np. [2, 3 i 10]. Przyjęte założenie 4) jest przybliżeniem, którego dokładność może być oceniona jedynie na drodze doświadczalnej.

Zakładając również, że siły wewnętrzne powłoki można zdefiniować tak, jak w teorii liniowej, podstawą wyznaczenia związków fizycznych staje się zależność

$$(3.1) \quad n^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \sigma^{\alpha\beta} d\theta_3, \quad m^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{g}{a}} \sigma^{\alpha\beta} \lambda \theta_3 d\theta_3,$$

gdzie

$$(3.2) \quad a = |a_{\alpha\beta}|, \quad g = |g_{\alpha\beta}|, \quad \sigma^{\alpha\beta} = (\delta_{\mu}^{\beta} - \lambda \theta_3 b_{\mu}^{\beta}) \tau^{\alpha\mu}.$$

Tensor $\tau^{\alpha\mu}$ określimy z rozważań przestrzennego stanu naprężeń. Dla przestrzennego ciała o własnościach lepkosprężystych przyjmujemy liniowy związek fizyczny przez zastąpienie stałych materiałowych ciała sprężystego pewnymi operatorami różniczkowymi względem czasu. Napiszemy go w postaci następujących zależności między dewiatorami i tensorami kulistymi naprężeń i odkształceń:

$$(3.3) \quad \tau_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \tau_r^r = \frac{Q_1(D)}{P_1(D)} \left(\gamma_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \gamma_r^r \right),$$

$$\tau_i^i = \frac{Q_2(D)}{P_2(D)} [\gamma_i^i - 3a_{(t)} T],$$

gdzie τ oznacza czas, $D = \partial/\partial\tau$ jest operatorem pochodnej względem czasu, Q_1 , P_1 , Q_2 i P_2 są operatorami wielomianowymi względem D , τ^{ij} i γ_{ij} tensorami naprężeń i odkształceń oraz $T(\theta_a, \theta_3)$ jest polem temperatury.

Z dalszych rozważań wynika, że w ramach dokładności teorii powłok sens ma tylko przyjęcie liniowej zmienności temperatury w kierunku grubości powłoki, tzn.

$$(3.4) \quad T(\theta_a, \theta_3) = T_0(\theta_a) + \lambda\theta_3 T_1(\theta_a).$$

Przechodząc teraz do dwuwymiarowego stanu naprężeń przy założeniu $\tau^{33} = 0$ i wykorzystaniu $g^{\alpha 3} = 0$ otrzymamy

$$(3.5) \quad \tau^{\alpha\beta} = \frac{Q_1}{2P_1} \left[g^{\alpha\lambda} g^{\beta\varrho} + g^{\alpha\varrho} g^{\beta\lambda} + \frac{2(Q_2 P_1 - P_2 Q_1)}{2P_2 Q_1 + Q_2 P_1} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\varrho} \right] \gamma_{\lambda\varrho} + \frac{Q_2}{P_2} [a_{(t)} T g^{\alpha\beta}].$$

W teorii ciał lepkosprężystych często stosuje się założenie $\nu = \text{const}$. Upraszcza to zapis a niewiele wpływa na dokładność wyników, gdyż ν zmienia się w niewielkich granicach i wpływ tej stałej na wyniki jest na ogół niewielki. Wówczas (3.5) przepiszemy następująco:

$$(3.6) \quad \tau^{\alpha\beta} = \frac{Q_1}{2P_1} \left(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\varrho} + g^{\alpha\varrho} g^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\varrho} \right) \gamma_{\lambda\varrho} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} a_{(t)} g^{\alpha\beta} \frac{Q_1}{P_1} (T).$$

Wprowadzając (3.2) z podstawieniem (3.6) do (3.1) i uwzględniając

$$(3.7) \quad \sqrt{\frac{g}{a}} = \lambda L^3 (1 - \lambda\theta_3 b_r^r), \quad g^{\alpha\beta} = \frac{1}{L^2} (a^{\alpha\beta} + 2\lambda\theta_3 b^{\alpha\beta}),$$

uzyskamy po wykonaniu całkowania poszukiwany związek fizyczny dla tensorów sił wewnętrznych i odkształceń określonych na powierzchni środkowej nieodkształconej powłoki.

Po zastosowaniu uproszczeń przyjętych z teorii liniowej napiszemy:

$$(3.8) \quad n^{\alpha\beta} = \frac{t}{1-\nu} \frac{Q_1}{P_1} [H^{\alpha\beta\varrho\lambda}] - a_{\varrho\lambda} \frac{1+\nu}{1-2\nu} a_{(t)} \frac{Q_1}{P_1} [T_0 a^{\alpha\beta}],$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{t}{1-\nu} \frac{Q_1}{P_1} [H^{\alpha\beta\varrho\lambda} \beta_{\varrho\lambda}] - \frac{1+\nu}{1-2\nu} a_{(t)} \frac{Q_1}{P_1} [T_0 (b^{\alpha\beta} - b_r^r a^{\alpha\beta}) + T_1 a^{\alpha\beta}],$$

gdzie

$$(3.9) \quad H^{\alpha\beta\varrho\lambda} = \frac{1}{2} [a^{\alpha\varrho} a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\varrho} + \nu (\varepsilon^{\alpha\varrho} \varepsilon^{\beta\lambda} + \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\varrho})].$$

4. Równania przemieszczeniowe i równania metody mieszanej

Przed sprowadzeniem zagadnienia do układu kilku równań wprowadzimy uproszczenie do równań równowagi. Jak zostało wykazane w monografii [8] (str. 392) konsekwencją przyjęć (1.10) i (1.12) (drugi związek) jest pominięcie drugiego wyrazu w pierwszym równaniu (2.1). Równania równowagi przyjmą więc postać (z pominięciem ostatniego)

$$(4.1) \quad n^{\alpha\beta}|_{\alpha} + p^{\beta} = 0, \quad m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} (b_{\alpha\beta} + w|_{\alpha\beta}) + p = 0.$$

Równania zgodności przemieszczeń otrzymamy z równań Codazziego i Gaussa. Można im nadać postać

$$(4.2) \quad \delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \beta_{\alpha}^{\lambda} = 0, \quad \delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} [(b_{\beta}^{\lambda} + w|_{\beta}^{\lambda}) \beta_{\alpha}^{\mu} + a_{\alpha}^{\lambda\mu}|_{\beta}] = 0.$$

Jeżeli do (4.2) wprowadzimy podstawienie

$$(4.3) \quad a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mu} \varepsilon_{\lambda\nu} (-L^{\nu\mu})_{\alpha}, \quad \beta_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mu} \varepsilon_{\beta\nu} K^{\nu\mu},$$

otrzymamy

$$(4.4) \quad L^{\alpha\beta}|_{\alpha} = 0, \quad K^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + L^{\alpha\beta} (b_{\alpha\beta} + w|_{\alpha\beta}) = 0.$$

Równania (4.4) i jednorodne równania (4.1) mają analogiczną budowę. W teorii liniowej powłok jest to znana analogia geometryczno-statyczna, która pozwala na napisanie odpowiednio do równań przemieszczeniowych — równania dla funkcji naprężeń. W naszym przypadku (ze względu na istnienie wyrazu $w|_{\alpha\beta}$) analogia ta nie może być w ten sposób wykorzystana. Pozostaje więc tylko napisanie równań przemieszczeniowych i równań metody mieszanej. Równania przemieszczeniowe otrzymujemy przez podstawienie związków fizycznych (3.8) do równań równowagi (4.1).

Ostateczna postać tych równań jest następująca:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} Q_1 \left[\frac{1}{2} (v^{\alpha}|_{\beta\alpha} + v^{\beta}|_{\alpha\alpha}) + \frac{\nu}{1-\nu} v_{\alpha}|^{\alpha\beta} - (b^{\alpha\beta} w)|_{\alpha} - \frac{\nu}{1-\nu} (b_{\alpha}^{\alpha} w)|^{\beta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (w|_{\alpha}^{\alpha} w|_{\beta}^{\beta})|_{\alpha} + \frac{\nu}{2(1-\nu)} (w|_{\alpha}^{\alpha} w|_{\alpha})|^{\beta} + (b_{\mu}^{\mu} b^{\mu\beta} w w)|_{\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{1-\nu} (b_{\mu}^{\alpha} b_{\alpha}^{\mu} w w)|^{\beta} \right] = -\frac{1}{t} P_1 [p^{\beta}] + \frac{1+\nu}{1-2\nu} a_{(t)} Q_1 [T_0]^{\beta}, \\ Q_1 \left[\frac{\lambda^2}{12} (w|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} w|_{\beta\alpha}^{\beta\alpha}) - b_{\alpha}^{\beta} v^{\alpha}|_{\beta} + b_{\beta}^{\alpha} b_{\alpha}^{\beta} w - \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} w|_{\alpha} w|^{\beta} - \right. \\ \left. - b_{\mu}^{\alpha} b^{\mu\beta} b_{\alpha\beta} w w - v^{\alpha}|_{\beta} w|_{\alpha}^{\beta} + b_{\beta}^{\alpha} w|_{\alpha}^{\beta} w - \frac{\nu}{1-\nu} (b_{\alpha}^{\alpha} v^{\beta}|_{\beta} - b_{\alpha}^{\alpha} b_{\beta}^{\beta} w + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} w|^{\beta} w|_{\beta} + b_{\alpha}^{\alpha} b_{\mu}^{\beta} b_{\beta}^{\mu} w w + v^{\alpha}|_{\alpha} w|_{\beta}^{\beta} - b_{\alpha}^{\alpha} w w|_{\beta}^{\beta} \right] = \frac{1}{t} P_1 [p] - \\ - \frac{1+\nu}{1-2\nu} a_{(t)} Q_1 [T_0 b_{\alpha}^{\alpha}] - \frac{\lambda^2 (1+\nu)}{12 (1-2\nu)} a_{(t)} Q_1 \{ [T_0 (b^{\alpha\beta} - b_{\nu}^{\nu} a^{\alpha\beta}) + T_1 a^{\alpha\beta}] |_{\alpha\beta} \}. \end{aligned}$$

Przy podstawianiu pominięto iloczyny potrójne oraz wyraz $T_0 w|_{\alpha}^{\alpha}$, który jest rzędu dokładności związków fizycznych. Metodę mieszaną stosujemy dla powłok o małej wyniosłości. Można więc tutaj pominąć wyraz $b_{\alpha\mu} b_{\beta}^{\mu} w w$ w związku (1.12) oraz z równości symboli Christoffela na powierzchni środkowej powłoki i na płaszczyźnie ([8], str. 398) wynika, że różniczkowanie kowariantne jest przemienne. Równanie pierwsze (4.1) (jednorodne) spełniamy tożsamościowo przez przyjęcie funkcji naprężeń

$$(4.6) \quad n_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta\alpha}^{\alpha\lambda} \varphi|_{\lambda}^{\alpha}$$

a następnie piszemy równanie drugie (4.1) i drugie (4.2) z wykorzystaniem (4.6) i pierwszego związku (3.8). Otrzymujemy

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{12} \frac{t}{1-\nu} Q_1 [w|_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda}] - P_1 [\delta_{\beta\alpha}^{\alpha\lambda} (b_{\alpha}^{\beta} + w|_{\alpha}^{\beta}) \varphi|_{\lambda}^{\alpha}] &= P_1 [P] + \\ - \frac{\lambda^2}{12} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_{(\beta)} Q_1 \{ [T_0 (b^{\alpha\beta} - b_{\nu}^{\nu} a^{\alpha\beta}) + T_1 a^{\alpha\beta}] |_{\alpha\beta} \}, \\ P_1 [\varphi|_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda}] + (1+\nu) t Q_1 [\delta_{\beta\alpha}^{\alpha\lambda} (b_{\alpha}^{\beta} + w|_{\alpha}^{\beta}) w|_{\lambda}^{\alpha}] &= - \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \alpha_{(\beta)} t Q_1 [T_1 |_{\beta}^{\beta}]. \end{aligned}$$

Równania (4.5) lub (4.7) są zbyt skomplikowane, aby można było uzyskać rozwiązanie ścisłe.

Ze względu na nieliniowość zagadnienia nie ma tutaj zastosowania transformacja Laplace'a, a ewentualnie może być stosowana jako metoda przybliżona pod warunkiem, że wpływ wyrazów nieliniowych jest nieduży.

Jedną z najprostszych dróg wydaje się zastosowanie metody Bubnowa-Galerkina. W odniesieniu do równań (4.7) polegałoby to na przyjęciu rozwiązania następującego:

$$(4.8) \quad w = \sum_{k=1}^n a_k(\tau) w_k(\theta_{\alpha}), \quad \varphi = \sum_{k=1}^m b_k(\tau) \varphi_k(\theta_{\alpha}),$$

gdzie w_k, φ_k są to liniowo niezależne funkcje spełniające warunki brzegowe zadania, a_k, b_k funkcje czasu τ , które należy wyznaczyć.

Po podstawieniu (4.8) do (4.7), pomnożeniu kolejno przez w_k i φ_k oraz scałkowaniu po obszarze powłoki powstanie układ nieliniowych równań zwyczajnych dla funkcji a_k i b_k . Postać tych równań i trudności rozwiązania zależą oczywiście od przyjętego modelu ciała lepkosprężystego jak i ilości przyjętych wyrazów w (4.8).

Niech następujący przykład posłuży za ilustrację poprzednich rozważań. Powłoka kształtu paraboloidy hiperbolicznej o rzucie kwadratowym podparta jest na brzegach i poddana działaniu pola temperatury

$$T_0 = 0, \quad T_1 = \bar{T} \sin \pi \xi \sin \pi \eta,$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}.$$

Równanie powierzchni środkowej powłoki jest następujące:

$$\mathbf{r}_0 = L(\xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + c\xi\eta \mathbf{k}).$$

Zakładając, że jest to powłoka o małej wyniosłości, otrzymamy następujące przybliżone zależności:

$$a^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{\beta}^{\alpha} = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taka postać 1 i 2 formy powierzchni w znacznym stopniu ułatwia rachunki, gdyż symbole Christoffela są równe zeru. Dla prostoty założymy, że własności lepkosprężyste powłoki opisane są modelem Voigta, tzn.

$$Q_1(0) = 2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$P_1(0) = 1.$$

Po przejściu na pochodne w układzie ξ, η równania (4.7) przyjmą postać

$$(4.9) \quad \frac{\lambda^2}{12} \frac{t}{1-\nu} \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) [\nabla^4 w] + 2c\varphi_{,12} + 2w_{,12} \varphi_{,12} - w_{,11} \varphi_{,22} -$$

$$- w_{,22} \varphi_{,11} = \frac{\lambda^2}{12} \frac{1+\nu}{1-2\nu} t \alpha_{(t)} 2\pi^2 \sin \pi \xi \sin \pi \eta \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{T},$$

$$\nabla^4 \varphi - 2(1+\nu) t \left(2G + 2\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) [cw_{,12} + w_{,12} w_{,12} - w_{,11} w_{,22}] = 0,$$

gdzie

$$\nabla^4 w = w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222}.$$

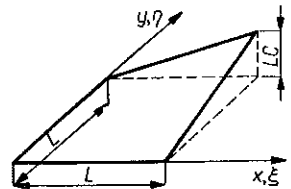
Warunki brzegowe przyjmiemy następująco:

dla $\xi = 0$ i $\xi = 1$

$$w = w_{,11} = 0, \quad \varphi_{,12} = \varphi_{,22} = 0,$$

dla $\eta = 0$ i $\eta = 1$

$$w = w_{,22} = 0, \quad \varphi_{,12} = \varphi_{,11} = 0.$$



Rys. 1

Dalsze rozważania ograniczymy do przypadku, gdy rozwiązanie można przybliżyć jednym wyrazem szeregu

$$(4.10) \quad w = a(\tau) \sin \pi \xi \sin \pi \eta,$$

$$\varphi = b(\tau) (1 - \cos 2\pi \xi) (1 - \cos 2\pi \eta).$$

Stosując dalej metodę Bubnowa-Galerkina otrzymamy

$$(4.11) \quad \frac{\lambda^2}{12} \frac{t\pi^2}{1-\nu} \left(2G + 2\eta \frac{d}{d\tau} \right) a - \pi^2 ab = \frac{\lambda^2}{12} \frac{1+\nu}{1-2\nu} t \alpha_{(t)} \left(G + \eta \frac{d}{d\tau} \right) \bar{T},$$

$$32b + (1+\nu) t \left(2G + 2\eta \frac{d}{d\tau} \right) (aa) = 0.$$

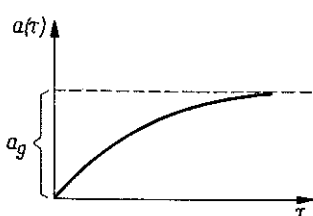
Stąd

$$2Gk_1 a + 2Gk_2 (a)^3 + 2\eta k_1 \frac{da}{d\tau} + 4\eta k_2 \frac{da}{d\tau} a^2 = k_3 \left(2G + 2\eta \frac{d}{d\tau} \right) \bar{T},$$

gdzie

$$k_1 = \frac{\lambda^2}{12} \frac{\pi^2}{1-\nu}, \quad k_2 = \frac{\pi^2(1+\nu)}{32}, \quad k_3 = \frac{\lambda^2}{24}.$$

Można tutaj zauważyć, że przyjęcie bardziej złożonego modelu ciała lepkosprężystego stworzył na etapie równań (4.11) bardzo poważne trudności rachunkowe



Rys. 2

Dla

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \tau - \bar{T}_0 (\tau - \tau_0) H(\tau - \tau_0),$$

gdzie $H(\tau)$ oznacza funkcję Heaviside'a, i warunku początkowego dla $\tau = 0$, $a(\tau) = 0$ można wykazać, że rozwiązanie równania ma obraz graficzny według rys. 2. Liczba a_g jest rozwiązaniem równania

$$k_1 a + k_2 a^3 = k_3 \bar{T}_0 \tau_0.$$

Równanie to ma jeden pierwiastek rzeczywisty. Widoczne jest, że dla wartości a_g funkcja osiąga ekstremum lokalne, a jednocześnie przez dyskusję zachowania się rozwiązania w nieskończoności (drogą zmiany zmiennych) otrzymuje się, że prosta $a = a_g$ jest asymptotą.

Literatura cytowana w tekście

1. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, Vol. IV, 1963.
2. X. M. МУШТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Казань 1957.
3. А. С. ВОЛЬМИР, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1956.
4. М. С. КОРНИШИН, *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек*, Москва 1956.
5. W. NOWACKI, *Thermal stresses in elastic and viscoelastic shells*, Symposium on Non-classical Shell Problems, Warszawa 1963.
6. Z. WУСНАВСКИ, *Some problems creep bending and creep buckling of viscoelastic shell panels in the range of large deflections*, Symposium on Non-classical Shell Problems, Warszawa 1963.
7. И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, И. А. НИКОЛАЕНКО, *Ползучесть и несущая способность оболочек*, Ак. Стр. и Арх. СССР, Научное сообщение, Москва 1960.
8. А. Е. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
9. И. А. КИЛЬЧЕВСКИЙ, *Основы аналитической механики оболочек*, Киев 1963.
10. J. LYELL SANDERS, Jr, *Nonlinear theories for thin shells*, Quart. of Appl. Math., 1, 1963.

Резюме

К ВОПРОСУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
ВЯЗКО-УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Работа касается квази-статических проблем изотропных вязко-упругих оболочек, подверженных действию внешней нагрузки и стационарного температурного поля.

В работе кратко выводятся основные уравнения задач, опираясь на ряд упрощающих предположений, из которых самыми важными суть: деформации являются малыми, только составляющая перемещения, перпендикулярная средней поверхности оболочки имеет конечное значение, но малое по отношению к размерам оболочки, принимается предположение Кирхгоффа-Лова, физические зависимости имеют линейную форму.

Summary

ON THE GEOMETRICALLY NONLINEAR THEORY OF VISCO-ELASTIC SHELLS

This paper is concerned with quasi-static problems of isotropic visco-elastic shells under the action of an external load and a steady temperature field.

The fundamental equations of the problem are derived in brief, making use of a number of simplifying assumptions, the most important of which are as follows.

1) The deformation is small except the displacement component normal to the middle surface of the shell the value of which is finite but small as compared with the dimensions of the shell, 2) The Kirchhoff-Love assumption is valid, 3) The physical relations are linear.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 października 1965 r.
