

STAN GRANICZNY RUROCIĄGU CIENKOŚCIENNEGO W PRZYPADKU
CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO I ZGINANIA

MIECZYŚLAW MROWIEC (KRAKÓW)

1. Wstęp

Metoda nośności granicznej znajduje coraz szersze zastosowanie w obliczeniach konstrukcji obciążonych statycznie i wykonanych z materiałów sprężysto-plastycznych m.in. dlatego, że gwarantuje z jednej strony bardziej realną ocenę pewności konstrukcji, a z drugiej umożliwia zmniejszenie zużycia materiałów konstrukcyjnych.

Celem niniejszej pracy jest określenie stanu granicznego rurociągu cienkościennego wykonanego z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, na który działa jednocześnie ciśnienie wewnętrzne i moment zginający. Tak postawiony problem odpowiada w większości przypadków rzeczywistemu stanowi obciążenia rurociągów ułożonych na podporach, służących do transportu płynów.

Zagadnienie nośności granicznej przy obciążeniach złożonych sprowadza się w ogólnym przypadku do wyznaczenia n -wymiarowej powierzchni granicznej w przestrzeni obciążeń zewnętrznych [17]. W szczególnym przypadku rurociągu cienkościennego celem naszym będzie, oprócz określenia rozkładu naprężeń, wyznaczenie krzywej granicznej w układzie: ciśnienie wewnętrzne p , moment gnący M_g . Krzywa taka w pełni zobrazuje pracę rurociągu przy jednoczesnym działaniu obciążeń i umożliwia określenie stopnia zbliżenia wyteżenia w danym przekroju poprzecznym rurociągu do stanu granicznego [16 i 18].

Nowsze poradniki techniczne dotyczące projektowania rurociągów [1 i 8] zalecają stosowanie obliczeń opartych na teorii nośności granicznej, jednakże same dostarczają jedynie bardzo skromnego materiału w tym zakresie. Zazwyczaj podawane wzory dotyczą bądź czystego zginania, bądź też działania samego ciśnienia wewnętrznego. Podobne ujęcie można znaleźć w pracach M. N. RUCZIMSKIEGO [12] i W. S. TURKINA [14 i 15].

Rozpatrywany rurociąg cienkościenny, poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego i jednocześnie zginany, stanowi problem nośności granicznej powłoki walcowej przy obciążeniu nie wykazującym obrotowej symetrii. Jednakże teoria nośności granicznej powłok walcowych nie wykracza w zasadzie poza problemy obrotowo-symetryczne (por. A. A. ILIUSZIN [5], P. G. HODGE Jr. [3 i 4]). A. A. GWOZDIEW rozpatrzył w monografii [2] dość złożony problem obciążenia rury cienkościennej (jednoczesne rozciąganie, skręcanie, zginanie i ścinanie) stosując zasadę wariacyjną teorii plastyczności; ciśnienie wewnętrzne nie zostało jednak uwzględnione.

Interesującym nas przypadkiem jednoczesnego zginania i ciśnienia wewnętrznego zajął się M. I. JERCHOW [7] uogólniając w ten sposób pracę Gwozdiewa. Przyjął on, podobnie jak Gwozdiew, równomierny rozkład naprężeń na grubości rury (stan błonowy), i wykorzystał wyprowadzony przez siebie uprzednio [6] związek między siłami i momentami w powłoce. Jednakże takie przyjęcie na ogół nie jest dopuszczalne, a stan giętny w ściance rury może posiadać istotny wpływ na jej nośność.

W przekroju rury jednocześnie zginanej i poddanej ciśnieniu od wewnątrz najbardziej wyteżony jest punkt, w którym rozciągające naprężenia obwodowe spotykają się ze ściskającymi naprężeniami osiowymi podchodzącymi od momentu zginającego. Tak więc odcinek rury w ten sposób obciążonej można zastąpić łukiem kolistym, poddanym jedynie działaniu ciśnienia wewnętrznego, ale o zmiennej granicy plastyczności lub o zmiennym przekroju (grubości ścianki); wartość mniejsza odpowiada dodatkowemu działaniu ściskających naprężeń osiowych, większa — naprężeń rozciągających.

Analizie nośności granicznej takiego łuku poświęcona została praca autora [11]. Stwierdzono, iż w miejscu najsłabszym tworzy się skutek obwodowego rozciągania pierwszy przegub plastyczny, po czym pojawia się wpływ obwodowego zginania, tak że drugi przegub plastyczny jest już wynikiem jednoczesnego rozciągania i zginania.

Obecna praca, w przeciwieństwie do pracy Jerchowa [7], uwzględniać więc będzie zginanie obwodowe ścianki rury i przedstawi rozkład naprężeń bardziej zbliżony do rzeczywistego.

Wspomnimy jeszcze, że analizie nośności sprężystej rurociągów (cienkościennego i grubościennego) poświęcono prace M. ŻYCKOWSKIEGO i autora [9 i 10].

2. Założenia

W niniejszej pracy przyjęto następujące założenia:

1. Rozpatruje się rurociąg cienkościenny. Praktycznie przyjmuje się, że stosunek średnicy zewnętrznej D_z do średnicy wewnętrznej D_w jest mniejszy od 1,1, w związku z czym w dalszych rozważaniach rurociąg potraktowano jako powłokę walcową, dla której $\sigma_r = \tau_{zr} = \tau_{\theta r} = 0$.

2. Rurociąg jest obciążony w sposób statyczny momentem gnącym M_g oraz ciśnieniem działającym od wewnątrz p .

Dopuszczymy również możliwość działania siły podłużnej N_z (np. w przypadku zamknięcia dnami); jej udział będziemy charakteryzowali zdefiniowanym później bezwymiarowym współczynnikiem ψ .

3. Pomija się wpływ ciśnienia hydrostatycznego czynnika wypełniającego rurociąg przyjmując, iż ciśnienie działające od wewnątrz $p = \text{const}$.

4. Pomija się naprężenia cieplne oraz zależność granicy plastyczności od temperatury. Pominięcie naprężeń cieplnych można częściowo uzasadnić stosowaniem kompensacji w rurociągach.

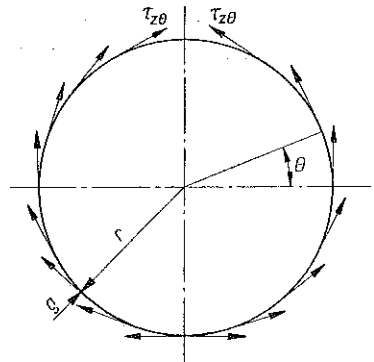
5. Rurociąg o osi prostoliniowej nie podlega utracie stateczności; wykluczamy ponadto wpływ spłaszczenia przekroju poprzecznego (efekt Braziera).

6. Materiał rurociągu jest idealnie sprężysto-plastyczny bez wzmocnienia plastycznego i podlega hipotezie Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH).

7. Przyjmuje się, że nośność graniczna rurociągu zostaje osiągnięta przy uplastycznieniu wszystkich punktów niebezpiecznego przekroju poprzecznego rurociągu.

Założenie to jest niewątpliwie założeniem przybliżonym. Wprowadzie w dwu przypadkach granicznych: czystego zginania i działania samego tylko ciśnienia wewnętrznego, nośność graniczna zostaje istotnie wyczerpana dopiero przy pełnym uplastycznieniu, to jednak w przypadku złożonym, nie wykazującym symetrii, możliwy będzie zapewne schemat zniszczenia, nie wymagający całkowitego uplastycznienia. Wydaje się jednak, że założenie powyższe nie spowoduje większych błędów, a znacznie uprości rozważania.

8. Pomija się wpływ siły poprzecznej zakładając czyste zginanie. Przybliżone uwzględnienie wpływu siły poprzecznej na nośność graniczną jest możliwe; wystarczy w tym celu założyć, że naprężenia styczne $\tau_{z\theta}$, pochodzące od siły poprzecznej, rozkładają się równomiernie w całym przekroju poprzecznym rurociągu (rys. 1), wprowadzić do warunku plastyczności HMH wielkość $3\tau_{z0}^2$ oraz dokonać takiego przekształcenia, aby wpływ siły poprzecznej T_{z0} był ujęty w granicy plastyczności



Rys. 1. Rozkład naprężeń $\tau_{z\theta}$

$$\sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_z \sigma_\theta = Q_r^2 - 3 \frac{T^2}{16r^2 g^2}$$

lub

$$(2.1) \quad \sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_z \sigma_\theta = \bar{Q}_r^2,$$

gdzie

$$T = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tau_{z\theta} r g \cos \theta d\theta = 4rg \tau_{z0}$$

oznacza siłę poprzeczną, Q_r granicę plastyczności [kg/cm²], \bar{Q}_r umowną granicę plastyczności, ujmującą wpływ siły poprzecznej [kG/cm²], r średni promień rury [cm], g grubość ścianki rury [cm] oraz θ kąt jaki tworzy dowolnie obrany promień rurociągu z osią odniesienia (współrzędna walcowa).

9. Zakłada się spełnienie równań równowagi w postaci całkowitej, mianowicie dla sił podłużnych i momentów zginających w poprzecznym przekroju ścianki rurociągu.

3. Statycznie dopuszczalne pole naprężeń

Zgodnie z przyjmowaną zazwyczaj definicją [13] nośnością graniczną nazywa się układ obciążeń zewnętrznych, pod wpływem których konstrukcja traci zdolność do przenoszenia obciążeń i przy rosnącej intensywności obciążeń zewnętrznych

staje się układem geometrycznie zmiennym. Jest to stan konstrukcji, przy którym dalsza jej eksploatacja jest już niemożliwa.

Całkowite ujęcie problemu nośności granicznej sprowadza się w konsekwencji do wyznaczenia krzywej granicznej i wymaga rozpatrzenia zarówno strony statycznej jak i kinematycznej zagadnienia. W przybliżeniu problem ten można rozważać

rozpatrując go jedynie od strony statycznej lub kinematycznej.

Opierając się na podstawowych twierdzeniach teorii nośności granicznej oraz na wniosku wynikającym z tych twierdzeń, że rzeczywisty mnożnik obciążenia granicznego μ_G jest nie mniejszy od statycznie dopuszczalnego mnożnika obciążeń μ_S , możemy przyjąć, że rozwiązanie problemu nośności granicznej metodą statyczną daje wyniki obarczone błędem na korzyść pewności konstrukcji.

W niniejszej pracy rozwiązanie problemu nośności granicznej rurociągu cienkościennego oprzemy zatem na tej ostatniej metodzie. Rozwiązanie statyczne powinno spełniać warunki statyczne czyli równania

równowagi wewnętrznej i naprężeniowe warunki brzegowe, jak również warunki dla stanu plastycznego (nie wykroczenie poza warunek plastyczności).

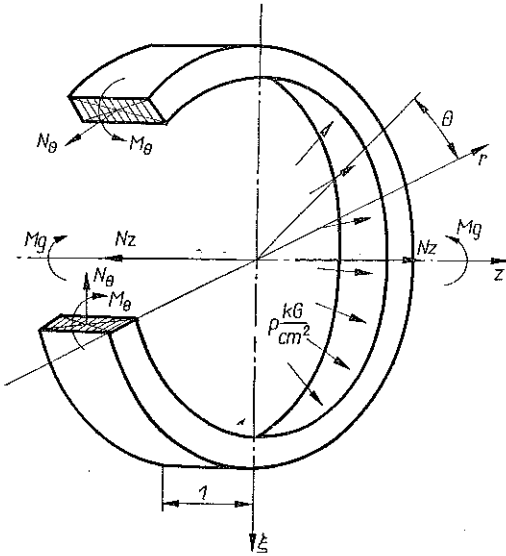
Rozpatrzmy odcinek rurociągu o szerokości jednostkowej (rys. 2) poddany jednocześnie ciśnieniu p działającemu wewnątrz i momentowi gnącemu M_g . Odcinek ten stanowi zamknięty pierścień (łuk) kolisty.

Pod wpływem obciążeń w dowolnym przekroju poprzecznym tego pierścienia określonym kątem θ wystąpią: jednostkowa siła podłużna obwodowa $N_\theta(\theta)$ [kg/cm] oraz jednostkowy moment gnący obwodowy $M_\theta(\theta)$ $\left[\frac{\text{kG cm}}{\text{cm}} \right]$.

W zakresie sprężystym $N_\theta = pr$, $M_\theta \approx 0$.

Jednakże wskutek nierównomiernego rozkładu naprężeń σ_z najbardziej wyteżony jest punkt $\theta = \pi/2$ i przyjmujemy, że tam powstanie pierwszy przegub plastyczny. Zgodnie z wynikami pracy [11] założymy, że w przegubie tym występuje siła podłużna N_0 o wartości chwilowo nieznaney, natomiast nie występuje obwodowy moment zginający $M_\theta(\pi/2) = 0$.

Tak więc po rozcięciu pierścienia w przekroju $\theta = \pi/2$ i przyłożeniu tam siły N_0 otrzymujemy łuk statycznie wyznaczalny (rys. 3), w którym siła podłużna N_θ i moment zginający M_θ dla dowolnego przekroju poprzecznego wynoszą



Rys. 2. Odcinek rurociągu obciążony ciśnieniem p i momentem gnącym M_g

$$(3.1) \quad N_\theta(\theta) = N_0 \sin \theta + pr \int_0^{\pi/2} \sin(\alpha - \theta) d\alpha = pr - (pr - N_0) \sin \theta,$$

$$M_\theta(\theta) = N_0 r(1 - \sin \theta) - pr^2 \int_0^{\pi/2} \sin(\alpha - \theta) d\alpha = -r(pr - N_0)(1 - \sin \theta).$$

We wzorach tych α oznacza zmienną całkowania.

Wprowadzając do wzorów (3.1) (po ich odpowiednim przekształceniu) następujące wielkości bezwymiarowe: $q = pr/Q_r g$ bezwymiarowe ciśnienie działające wewnątrz rurociągu, $t = g/r$ bezwymiarową

grubość rurociągu oraz $\eta = \frac{N_0}{Q_r g} = \frac{N_0}{Q_r t r}$

bezwymiarową (chwilowo niewiadomą) siłę podłużną w przegubie, przedstawimy rozkłady obwodowych sił podłużnych i momentów gnących w postaci bezwymiarowej:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} N_\theta(\theta) &= Q_r g [q - (q - \eta) \sin \theta], \\ M_\theta(\theta) &= -Q_r g r (q - \eta) (1 - \sin \theta). \end{aligned}$$

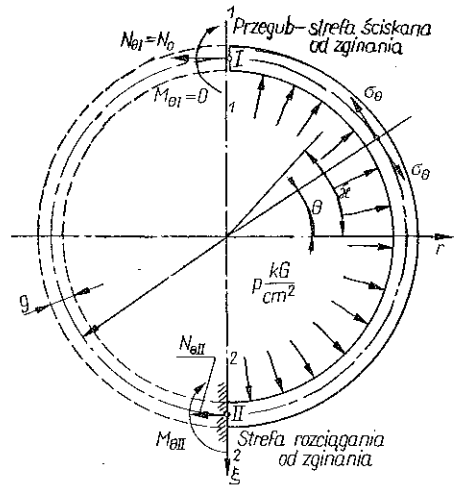
Wyrazimy obecnie siłę podłużną obwodową $N_\theta(\theta)$ i moment gnący obwodowy $M_\theta(\theta)$ przez naprężenie obwodowe σ_θ .

Założymy, że przy ustalonym kącie θ na całej grubości rury wystąpi stałe naprężenie osiowe σ_z ; rozkład $\sigma_z = \sigma_z(\theta)$ nie jest jeszcze znany. Natomiast naprężenia σ_θ na ogół nie mogą być stałe na całej grubości, gdyż wtedy nie równoważyłoby momentu obwodowego M_θ . Z warunku plastyczności HMM dla płaskiego stanu naprężenia wynika

$$(3.3) \quad \sigma_{\theta 1,2} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{Q_r^2 - \frac{3}{4} \sigma_z^2}.$$

Aby zrównoważyć zarówno siłę podłużną N_θ jak i moment gnący M_θ przyjmujemy, że na grubości ścianki powstaną dwie strefy (rys. 4); w strefie wewnętrznej, większej $\sigma_\theta = \sigma_{\theta 1}$ (strefa rozciągania obwodowego), natomiast w strefie zewnętrznej $\sigma_\theta = \sigma_{\theta 2}$ (strefa ściskania obwodowego). Granicę między strefami określimy wielkością ξ , przy czym $\xi = \xi(\theta)$.

Ponadto przyjmujemy, że również rozkład naprężeń $\sigma_z = \sigma_z(\theta)$ może być nieciągły (tak jest np. przy czystym zginaniu plastycznym). Współrzędną, odpowiadającą nieciągłości σ_z , oznaczymy przez φ_0 (rys. 4); przy czystym zginaniu $\varphi_0 = 0$, natomiast przy samym tylko ciśnieniu wewnętrznym $\varphi_0 = \pi/2$ i nieciągłość naprężeń σ_z zanika.



Rys. 3. Schemat obciążenia pierścienia kołowego zamkniętego

Przy założeniu skokowo zmiennego rozkładu tych naprężeń siła podłużna obwodowa w dowolnym przekroju łuku kolistego, wyrażona przez naprężenia obwodowe σ_θ (rys. 4), wynosi

$$(3.4) \quad N_\theta(\theta) = \sigma_{\theta 1} g - (\sigma_{\theta 1} - \sigma_{\theta 2}) \xi,$$

a moment gnący obwodowy w dowolnym przekroju łuku kolistego liczony względem środka ciężkości tego przekroju jest równy

$$(3.5) \quad M_\theta(\theta) = -\frac{g - \xi}{2} (\sigma_{\theta 1} - \sigma_{\theta 2}) \xi.$$

Wykorzystując warunek równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych, otrzymujemy układ równań

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta 1} g - (\sigma_{\theta 1} - \sigma_{\theta 2}) \xi &= pr - (pr - N_\theta) \sin \theta = f_1(\theta), \\ \frac{g - \xi}{2} (\sigma_{\theta 1} - \sigma_{\theta 2}) \xi &= r(pr - N_\theta) (1 - \sin \theta) = f_2(\theta). \end{aligned}$$

Po podstawieniu w równania (3.6) za $\sigma_{\theta 1,2}$ odpowiednich wartości określonych równaniem (3.3) i uporządkowaniu otrzymujemy układ równań algebraicznych

o niewiadomych $\sigma_z = \sigma_z(\theta)$ i $\xi = \xi(\theta)$. Rugując niewiadomą ξ z pierwszego równania

$$(3.7) \quad \xi = \frac{g}{2} + \frac{g\sigma_z - 2f_1(\theta)}{4\sqrt{Q_r^2 - \frac{3}{4}\sigma_z^2}},$$

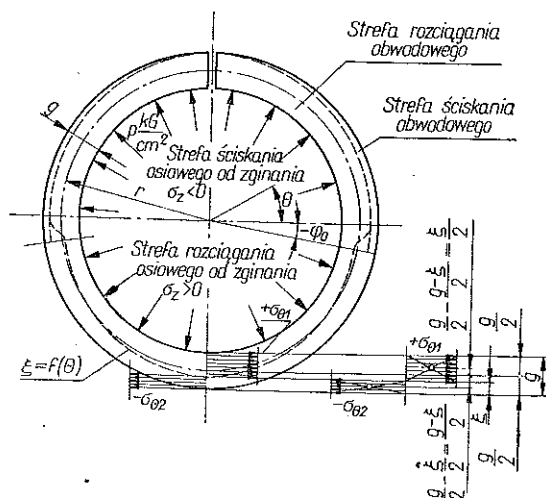
dochodzimy do następującego równania ze względu na σ_z :

$$(3.8) \quad g^2\sigma_z^2 - g\sigma_z f_1(\theta) - g^2 Q_r^2 + f_1^2(\theta) = -4f_2(\theta)\sqrt{Q_r^2 - \frac{3}{4}\sigma_z^2},$$

gdzie $f_1(\theta)$ i $f_2(\theta)$ są funkcjami znanymi, określonymi równaniami (3.6).

Równanie (3.8) można sprowadzić do pełnego równania czwartego stopnia, praktycznie nierozwiązalnego w postaci ogólnej.

Podamy jednak rozwiązanie przybliżone o dość dużej dokładności. Pominiemy mianowicie wyrażenie $3\sigma_z^2/4$ pod pierwiastkiem w stosunku do Q_r^2 . Przy niewielkim zginaniu w stosunku do ciśnienia wewnętrznego naprężenia σ_z są małe i kwadrat ten istotnie można pominąć. Przy niewielkim ciśnieniu wewnętrznym w stosunku do zginania naprężenia σ_z są wprawdzie duże, ale funkcja $f_2(\theta)$ przybiera wtedy małe



Rys. 4. Przyjęty rozkład naprężeń obwodowych i podział stref w poprzecznym przekroju rurociągu

wartości i prawa strona równania (3.8) jest w obu przypadkach bliska zera. Numerycznie sprawdzono, że błąd omawianego przybliżenia nie przekracza 5%.

Otrzymujemy teraz do rozwiązania równanie kwadratowe

$$(3.9) \quad g^2 \sigma_z^2 - g \sigma_z f_1(\theta) - [g^2 Q_r^2 - f_1^2(\theta) - 4Q_r f_2(\theta)] = 0$$

o pierwiastkach

$$(3.10) \quad \sigma_{z1,2} = \frac{f_1(\theta)}{2g} \pm \sqrt{Q_r^2 - \frac{3f_1^2(\theta)}{4g^2} - \frac{4Q_r f_2(\theta)}{g^2}}$$

Podstawiając obecnie w równanie (3.10) na miejsce $f_1(\theta)$ i $f_2(\theta)$ prawe strony równań (3.6), wprowadzając zarazem w te równania wartości bezwymiarowe, po przekształceniach i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(3.11) \quad \frac{\sigma_z}{Q_r} = \frac{q}{2} - \frac{q-\eta}{2} \sin \theta \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} \times \\ \times \sqrt{1 + \frac{3q \sin \theta}{2 \left(1 - \frac{3}{4} q^2\right)} (q-\eta) - \frac{4(1-\sin \theta)}{t \left(1 - \frac{3}{4} q^2\right)} (q-\eta) - \frac{3 \sin^2 \theta}{4 \left(1 - \frac{3}{4} q^2\right)} (q-\eta)^2}.$$

Zakładając, że wyrażenie $q - \eta$ jest małe wobec jedności, po rozwinięciu w szereg potęgowy wyrażenia pod drugim pierwiastkiem otrzymujemy

$$(3.12) \quad \frac{\sigma_z}{Q_r} \approx \frac{q}{2} - \frac{q-\eta}{2} \sin \theta \pm \\ \pm \left[\sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} + \frac{3q(q-\eta)}{4 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}} \sin \theta - \frac{2(q-\eta)(1-\sin \theta)}{t \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}} \right]$$

Przyjęcie, iż wyrażenie $q - \eta$ jest małe wobec jedności, uzasadnione jest o tyle, że w obu przypadkach granicznych: przy czystym zginaniu i przy czystym ciśnieniu wewnętrznym $q - \eta = 0$, bowiem przy obciążeniu rury tylko momentem gnącym $q = 0$ i $\eta = 0$, natomiast przy obciążeniu tylko ciśnieniem od wewnątrz $q = \eta$, gdyż rozkład sił podłużnych jest stały.

Celem skrócenia dalszych zapisów równanie (3.11) określające bezwymiarowe naprężenia osiowe przedstawimy w postaci ogólnej

$$(3.13) \quad \frac{\sigma_z}{Q_r} = A + B \sin \theta \pm (C + D \sin \theta),$$

gdzie

$$(3.14) \quad A = \frac{q}{2}, \quad B = \frac{q-\eta}{2}, \quad C = \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} - \frac{2(q-\eta)}{t \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}, \\ D = \frac{3q(q-\eta)}{4 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}} + \frac{2(q-\eta)}{t \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}.$$

Przy omówionym już założeniu, że rozkład naprężeń σ_z jest nieciągły w równaniach (3.12) i (3.13) dla $\varphi_0 < \theta < \pi/2$, należy zostawić znak minus, natomiast dla $-\pi/2 < \theta < \varphi_0$ znak plus. Przy czystym zginaniu rury $\varphi_0 = 0$, a przy obciążeniu rury czystym ciśnieniem wewnętrznym, należy zachować w całym przedziale znak minus, co można uzyskać przez przyjęcie $\varphi_0 = -\pi/2$. Kąt φ_0 określa granicę nieciągłości naprężeń osiowych.

4. Równanie krzywej nośności granicznej

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia niewiadomej η (siły w przegubie N_0) z warunku danej siły podłużnej w rurociągu N oraz do określenia krzywej nośności granicznej $M_g = M_g(p)$.

Siła osiowa wynosi

$$(4.1) \quad N_z = gr \int_0^{2\pi} \sigma_z d\theta = 2gr Q_r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma_z}{Q_r} d\theta = 2\psi\pi r^2 p.$$

We wzorze (4.1) bezwymiarowy współczynnik ψ określa charakter pracy rurociągu. Dla rurociągu wydłużającego się o idealnej kompensacji (100%) $\psi = 0$, dla rurociągu zamkniętego dnami $\psi = 0,5$, a dla rurociągu utwierdzonego na obu końcach, nie posiadającego możliwości swobodnych odkształceń, $0 \leq \psi \leq 0,5$ (w zakresie sprężystym; w tym ostatnim przypadku $\psi = \nu$ [9]).

Traktując N_z lub ψ za wielkości znane, możemy określić z tego równania statycznie niewyznaczalną bezwymiarową siłę podłużną w przegubie η .

Podstawiając do wzoru (4.1) za $p = Q_r gq/r$ po uproszczeniu otrzymujemy

$$(4.2) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma_z}{Q_r} d\theta = \psi\pi q.$$

Po podstawieniu do równania (4.2) zamiast σ_z/Q_r funkcji (3.13) otrzymamy

$$(4.3) \quad \psi\pi q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [A + B \sin \theta \pm (C + D \sin \theta)] d\theta.$$

Całkując to równanie w odpowiednich granicach wyznaczonych kątem φ_0 i porządkując, otrzymujemy

$$(4.4) \quad \psi\pi q = \pi A + 2C\varphi_0 - 2D \cos \varphi_0;$$

po podstawieniu (3.14) określamy stąd niewiadomą $q - \eta$:

$$(4.5) \quad q - \eta = \frac{(1 - 2\psi) tq\pi \sqrt{1 - \frac{3}{4}q^2 + 4t\varphi_0 \left(1 - \frac{3}{4}q^2\right)}}{8\varphi_0 + 3tq \cos \varphi_0 + 8 \cos \varphi_0},$$

a wzór (3.7) pozwala teraz określić rozkład strefy nieciągłości $\xi = \xi(\theta)$; po podstawieniu $f_1(\theta)$, (3.6), i sprowadzeniu do postaci bezwymiarowej znajdziemy

$$(4.6) \quad \frac{\xi}{g} = \frac{\sigma_z}{4Q_r \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_z}{Q_r}\right)^2}} + \frac{1}{2} - \frac{q - (q - \eta) \sin \theta}{2 \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_z}{Q_r}\right)^2}}.$$

Z kolei wyrażamy moment gnący osiowy $M_g(N_0, p)$ przez naprężenia osiowe σ_z . Otrzymamy stąd poszukiwane równanie krzywej granicznej:

$$(4.7) \quad M_g = -gr^2 \int_0^{2\pi} \sigma_z \sin \theta \, d\theta = -2gr^2 Q_r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma_z}{Q_r} \sin \theta \, d\theta.$$

Znak minus przy momencie gnącym pochodzi z przyjętego na rys. 2 układu osi odniesienia.

Podstawiając do wzoru (4.7) analogicznie jak w przypadku wyznaczania siły osiowej na miejsce σ_z/Q_r wyrażenie (3.13) po scałkowaniu i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(4.8) \quad M_g = -2gr^2 Q_r \left(\frac{\pi}{2} B - 2C \cos \varphi_0 + D\varphi_0 - \frac{D}{2} \sin 2\varphi_0 \right).$$

Dzieląc równanie (4.8) przez $2gr^2 Q_r$ oraz podstawiając zamiast B , C i D odpowiednie wielkości określone wzorem (3.14) otrzymujemy ogólną postać równania krzywej granicznej w wielkościach bezwymiarowych

$$(4.9) \quad m = \frac{4}{\pi} \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} - \frac{4 \cos \varphi_0}{t} - \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right) \left(\frac{3}{4} q + \frac{2}{t} \right) \right] \frac{(1 - 2\psi) t q \pi + 4 t \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}{8\varphi_0 + 8\cos \varphi_0 + 3tq \cos \varphi_0},$$

gdzie

$$(4.10) \quad m = \frac{M_g}{\pi Q_r gr^2};$$

m oznacza bezwymiarowy moment gnący osiowy.

We wzorze (4.9) zmienną jest q , natomiast ψ i φ_0 — parametrami, przy czym ψ przyjmujemy za wielkość znaną, a φ_0 podlega jeszcze wyznaczeniu. Określenie więc jednoznacznie krzywej granicznej zależy od wyznaczenia nieznanego parametru φ_0 przy danych ψ i q . Wartość ta powinna z jednej strony zapewniać maksimum momentu gnącego m przy ustalonym ciśnieniu q (zgodnie z zasadami wariacyjnymi teorii plastyczności), a z drugiej strony określony wzorem (4.6) stosunek ξ/g zależny od φ_0 poprzez $q - \eta$ (4.5), musi być zawarty w przedziale $0 < \xi/g < 1$, by założona nieciągłość naprężeń σ_0 leżała wewnątrz pierścienia. Problem doboru φ_0 nastęrcza więc pewne trudności, zostanie on szczegółowo omówiony w oddzielnej pracy wraz z wyprowadzeniem prostych wzorów aproksymacyjnych dla krzywej granicznej $m = f(q)$.

5. Przykłady rozkładu naprężeń w przekroju rurociągu oraz rozgraniczenia stref rozciągania i ściskania obwodowego

Dla lepszego zobrazowania częściowo założonego a częściowo obliczonego przez nas statycznie dopuszczalnego pola naprężeń w stanie granicznym podamy dwa przykłady przebiegu funkcji $\sigma_z = f(\theta)$, $\sigma_\theta = f(\theta)$ oraz $\xi = f(\theta)$.

W pierwszym przykładzie przyjmujemy mały wpływ ciśnienia działającego od wewnątrz w stosunku do zginania zakładając $q = 0,2$; parametr φ_0 dobieramy przy tym równy $\varphi_0 = 0$, zakładając, iż oś nieciągłości naprężeń σ_z pokrywa się tu jeszcze z główną środkową osią przekroju rurociągu.

W drugim przypadku założymy, że wpływ zginania jest mały w stosunku do ciśnienia wewnętrznego, mianowicie $q = 0,9$; parametr φ_0 przyjmujemy tu równy $\varphi_0 = -\pi/2$ (brak nieciągłości naprężeń σ_z).

Przykład 1. Wyrażenie $q - \eta$ dla $\varphi_0 = 0$ zgodnie ze wzorem (4.5) przyjmie postać

$$(5.1) \quad q - \eta = \frac{(1 - 2\psi) t q \pi \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}{8 + 3qt}$$

Wielkość ta podstawiona do (3.12) pozwala na wyznaczenie zmienności naprężeń osiowych $\sigma_z = f(\theta)$, mianowicie

$$(5.2) \quad \frac{\sigma_z}{Q_r} = \frac{q}{2} - \frac{(1 - 2\psi) t q \pi \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}{8 + 3qt} \sin \theta \pm \left\{ \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} + \frac{3(1 - 2\psi) q^2 t \pi \sin \theta}{4(8 + 3qt)} - \frac{\left[2(1 - 2\psi) t q \pi \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} \right] (1 - \sin \theta)}{t(8 - 3qt) \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}} \right\}$$

Znak \pm przed nawiasem związany jest z wielkością kąta θ i tak do $0 \leq \theta \leq \pi/2$ odnosi się znak minus, do $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ znak plus.

Zmianę naprężeń obwodowych $\sigma_{\theta 1,2} = f(\theta)$ określa wzór

$$(5.3) \quad \frac{\sigma_{\theta 1,2}}{Q_r} = \frac{\sigma_z}{2Q_r} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_z}{Q_r} \right)^2},$$

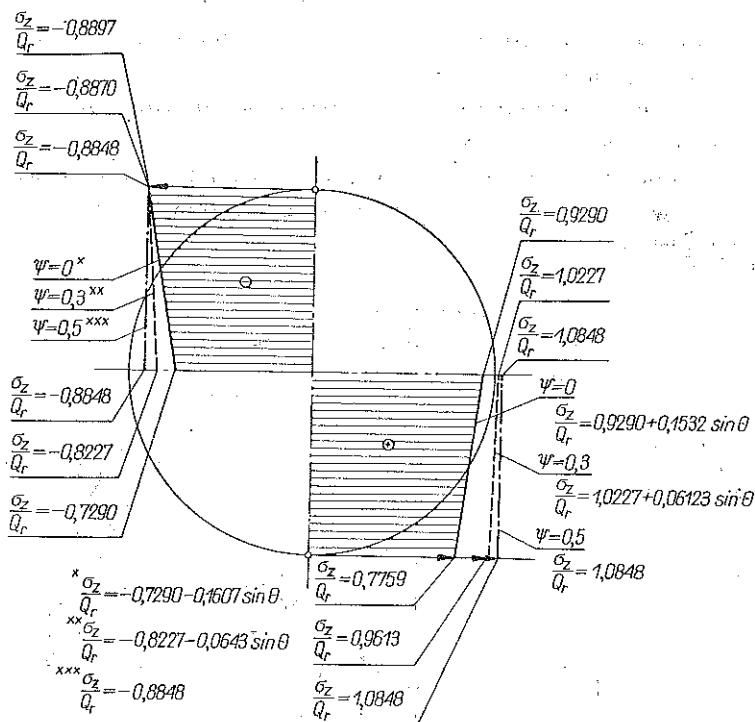
w którym znak \pm uzależniony jest od parametru ξ , który określa linię, rozgraniczającą strefę rozciągania obwodowego od strefy ściskania obwodowego.

Linię tę, pochodzącą od nałożenia się działania momentu gnącego obwodowego i siły podłużnej obwodowej, określa wzór (4.6), przy czym wielkość ξ liczona jest od zewnętrznej ścianki rury (rys. 4).

Sprawdzeniem wyliczanych wartości σ_z , $\sigma_{\theta 1,2}$ i ξ jest spełnienie następujących równań:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_{01}}{Q_r} - \left(\frac{\sigma_{01} - \sigma_{02}}{Q_r} \right) \frac{\xi}{g} &= q - (q - \eta) \sin \theta, \\ \frac{t\xi}{2g} \left(1 - \frac{\xi}{g} \right) \left(\frac{\sigma_{01} - \sigma_{02}}{Q_r} \right) &= (q - \eta) (1 - \sin \theta). \end{aligned}$$

Funkcje $\sigma_z = f(\theta)$, $\sigma_\theta = f(\theta)$ i $\xi = f(\theta)$ zostały przedstawione wykreslnie na rys. 5 i 6, przy czym przyjęto: $t = 0,1$; $\psi = 0$ (brak siły osiowej), a dodatkowo na rys. 5, $\psi = 0,3$ i $\psi = 0,5$.



Rys. 5. Wykres naprężeń $\sigma_z/Q_r = f(\theta)$ dla $\psi = 0$; $\psi = 0,3$; $\psi = 0,5$ w przypadku przeważającego obciążenia rurociągu momentem gnącym ($\varphi_0 = 0$; $q = 0,2$; $t = 0,1$)

Przykład 2. Wyrażenie $q - \eta$ dla $\varphi_0 = -\pi/2$ na podstawie wzoru (4.5) przyjmuje postać

$$(5.5) \quad q - \eta = \frac{(1 - 2\psi) t q \pi \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2 - 2t\pi \left(1 - \frac{3}{4} q^2\right)}}{4\pi}$$

Zmienność naprężeń osiowych $\sigma_z = f(\theta)$ określa wzór

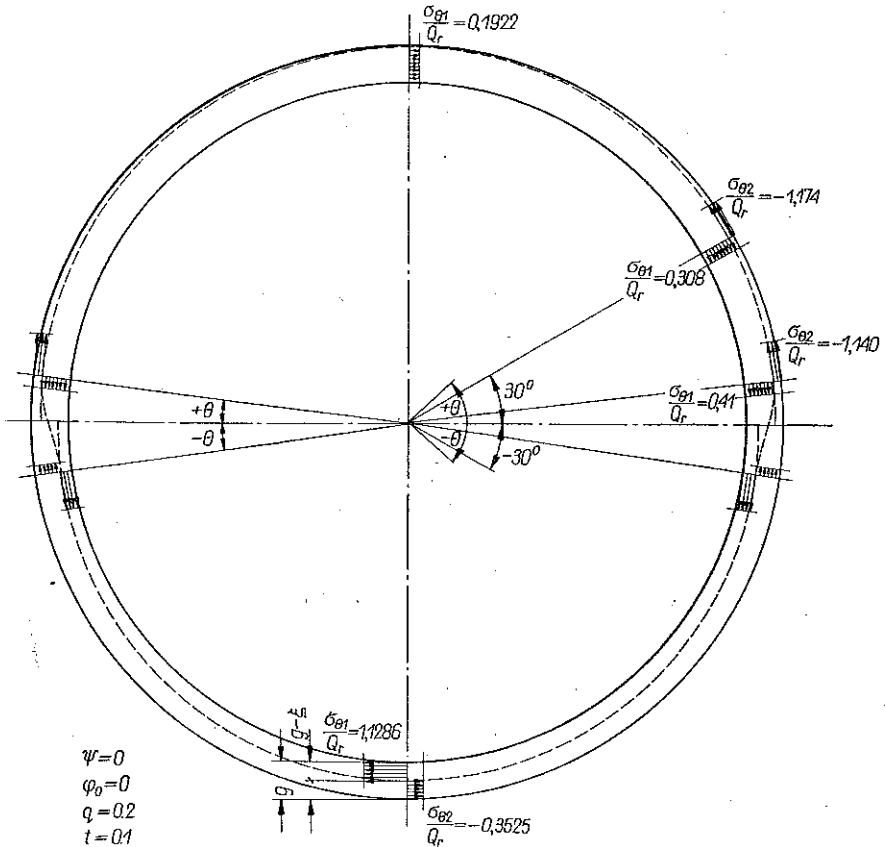
$$(5.6) \quad \frac{\sigma_z}{Q_r} = \frac{q}{2} + \frac{(1 - 2\psi) \pi t q \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2 - 2t\pi \left(1 - \frac{3}{4} q^2\right)}}{8\pi} \sin \theta \pm$$

$$\pm \left\{ \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} - \frac{3q \left[(1 - 2\psi) \pi t q \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} - 2\pi t \left(1 - \frac{3}{4} q^2 \right) \right]}{16\pi \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}} \sin \theta + \frac{\left[(1 - 2\psi) \pi t q \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} - 2\pi t \left(1 - \frac{3}{4} q^2 \right) \right] (1 - \sin \theta)}{2\pi \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}} \right\}$$

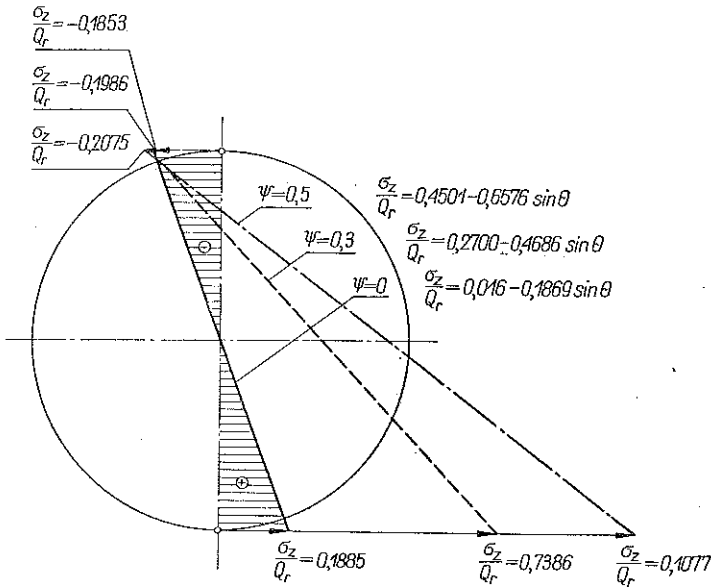
Tym razem dla całego przedziału $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ odnosi się przed kłَامrą znak minus, bowiem przyjęliśmy $\varphi_0 = -\pi/2$.

Zmianę naprężeń obwodowych $\sigma_{\theta 1,2} = f(\theta)$ określa tak samo jak w przykładzie pierwszym wzór (5.3).

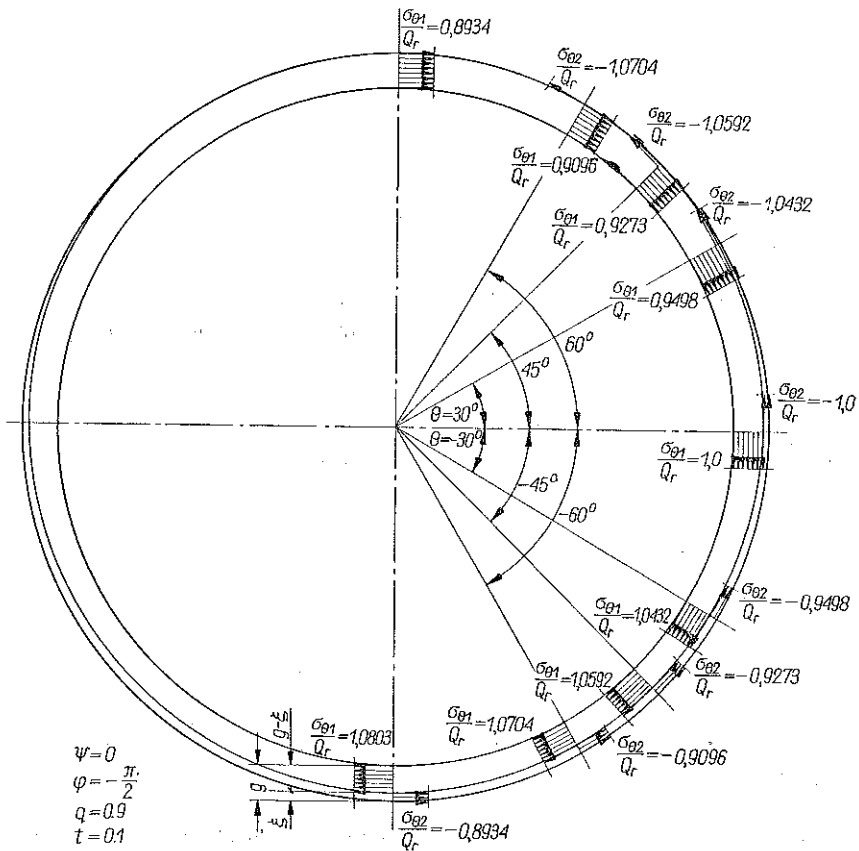
Znając σ_z/Q_r oraz $q - \eta$ podobnie jak w przykładzie pierwszym z równania (4.6) wyznaczmy linię rozgraniczającą strefę rozciągania obwodowego od ściskania obwodowego $\xi = f(\theta)$.



Rys. 6. Wykres zmiany naprężeń obwodowych $\sigma_{\theta 1,2}/Q_r = f(\theta)$ oraz linia nieciągłości $\xi/g = f(\theta)$ w poprzecznym przekroju rurociągu w przypadku przewagi działania momentu gnącego nad ciśnieniem wewnętrznym dla $\psi = 0$, ($\varphi_0 = 0$; $q = 0,2$; $t = 0,1$)



Rys. 7. Wykres naprężeń $\sigma_z/Q_r = f(\theta)$ dla $\psi = 0; \psi = 0,3, \psi = 0,5$ w przypadku przeważającego obciążenia rurociągu ciśnieniem wewnętrznym ($\varphi_0 = -\pi/2, q = 0,9$)



Rys. 8. Wykres naprężeń obwodowych $\sigma_{\theta,1,2}/Q_r = f(\theta)$ oraz linia nieciągłości $\xi/g = f(\theta)$ w poprzecznym przekroju rurociągu w przypadku przewagi działania ciśnienia wewnętrznego nad momentem gnącym dla $\psi = 0$ ($\varphi_0 = -\pi/2, q = 0,; t = 0,1$)

Wykresy funkcji $\sigma_z = f(\theta)$, $\sigma_\theta = f(\theta)$ i $\xi = f(\theta)$ przedstawiono na rys. 7 i 8, przy czym przyjęto $t = 0,1$; $\psi = 0$, a dodatkowo na rys. 7 $\psi = 0,3$ i $\psi = 0,5$.

Rysunki 6 i 8 pokazują wyraźnie nierównomierność rozkładu naprężeń obwodowych σ_θ na grubości ścianki, równoważący moment obwodowy M_θ , który został pominięty w pracy Jerchowa [7].

Literatura cytowana w tekście

1. *Design of Piping Systems*, J. Wiley and Sons. New York. Tłum. ros.: Gostoptiechizdat, Moskwa 1961.
2. А. А. Гвоздев, *Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Стройиздат, 1949.
3. P. G. HODGE Jr., *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill, New York 1959.
4. P. G. HODGE Jr., *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1963.
5. А. А. Ильющин, *Пластичность*, ГИТТЛ, Москва 1948.
6. М. И. Ерхов, *Конечное соотношение между силами и моментами при пластической деформации оболочек*, Строит. мех. расч. соор., 1959.
7. М. И. Ерхов, *Несущая способность подземного тонкостенного трубопровода*, Строит. мех. расч. соор., 6 (1960).
8. А. Г. Камерштетей, В. В. Рождественский, М. Н. Ручимский, *Расчет трубопроводов на плотность*, Справочная Книга, Гостонттехиздат, Москва 1963.
9. M. MROWIEC, *Analiza nośności sprężystej rurociągu cienkościennego*, Czas. Tech. Polit. Krak., 8 (44), 1961.
10. M. MROWIEC, M. ŻYCZKOWSKI, *Nośność sprężysta rurociągu grubościennego*, Rozpr. Inżyn., 3, 10 (1962).
11. M. MROWIEC, *Nośność graniczna niejednorodnego łuku kołowego o zmiennym przekroju, obciążonego ciśnieniem wewnętrznym*, Czas. Tech. Polit. Krak., 4 (60), 1963.
12. М. Н. Ручимский, *Расчет надземных трубопроводов на прочность*, Строит. мех. расч. соор., 1 (1959), 32-36.
13. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod redakcją W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA, PWN, Warszawa 1965.
14. В. С. Туркин, *О несущей способности трубопроводов из стальных труб*, Строит. мех. расч. соор., 1 (1960), 1-6.
15. В. С. Туркин, *Изгиб труб в упруго-пластической стадии*, Строит. Трубопроводов, 4 (1960), 3-6.
16. M. ŻYCZKOWSKI, *Wytyżenie materiału w stanach podkrytycznych*, Rozpr. Inżyn., 4, 9 (1960).
17. M. ŻYCZKOWSKI, *Powierzchnie graniczne w teorii wytyżenia*, Rozpr., Inżyn., 4, 9 (1961).
18. M. ŻYCZKOWSKI, *Zum Begriff der Konstruktions-anstrengung*, Oster. Ing.-Archiv, 3, 17 (1963), 169-186.

Резюме

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОСТЕННОГО ТРУБОПРОВОДА, ПОДВЕРЖЕННОГО ОДНОВРЕМЕННОМУ ВНУТРЕННЕМУ ДАВЛЕНИЮ И ИЗГИБУ

Обсуждается предельное состояние тонкостенного трубопровода с прямолинейностью, изготовленного из идеально-упругого пластического материала, статически нагруженного внутренним давлением и изгибающим моментом. В работе учитывается, добавочно, изгиб по окружности стенки трубы.

Задача сводится к определению уравнения предельной кривой (4.9) в безразмерных величинах $m = f(q, t, \varphi_0)$, основываясь, при выведении этой кривой, на методе статического подхода. Кроме того в качестве примера даются распределения напряжений σ_z и σ_θ в сечении трубопровода для двух случаев его нагрузки: малое по сравнению с изгибом, влияние внутреннего давления трубопровода по отношению к изгибу, или малое, по сравнению с внутренним давлением, влияние изгиба. Кроме того, определяется линия разграничивающая зону окружного растяжения от окружного сжатия в поперечном сечении трубопровода $\xi = f(\theta)$, уравнение (4.6).

Summary

THE STATE OF STRESS IN A THIN-WALLED PIPELINE UNDER SIMULTANEOUS ACTION OF INTERNAL PRESURE AND BENDING

The subject of this analysis is the limit state of a thin-walled rectilinear pipeline made of a perfect elastic-plastic material and loaded in a static manner by an internal pressure and a bending moment acting simultaneously. Circumferential bending of the wall is taken additionally into consideration.

The problem is reduced to the determination of the limit curve (4.9) in dimensionless quantities $m = f(q, t, \varphi_0)$ by means of the statistical method. In addition, the stress distributions σ_z and σ_θ in the pipeline are given as an example, in two cases of load of the pipeline the influence of bending being shown to be small as compared with that of the internal pressure. The linear $\xi = f(\theta)$ separating the zone of circumferential tension from the zone of circumferential compression in the cross-section of the pipeline is also determined [Eq. (4.6)].

KATEDRA APARATURY PRZEMYSŁOWEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lutego 1966 r.
