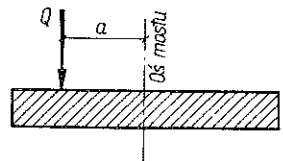


DRGANIA SKRĘTNE BELKI WYWOŁANE RUCHOMYM
MOMENTEM SKRĘCAJĄCYM

BOGDAN SKALMIERSKI i SŁAWOMIR DREWNOWSKI (WARSZAWA)

W pracy omówiono problem drgań skrętnych lepkosprężystego pręta pryzmatycznego o przekroju zwartym; pręt jest z obu stron utwierdzony. Założono, że obciążenie stanowi moment skręcający skupiony, którego punkt przyłożenia porusza się ze stałą prędkością. Rozwiązanie otrzymano opierając się na analogii sprężysto-lepkosprężystej [3]. Wyniki otrzymano na podstawie odwrotnej transformacji Laplace'a w postaci szeregów Fouriera. W rozważaniach szczegółowych zbadano zmienność kątów obrotu pręta o długości 20 m. pod wpływem momentu skręcającego, wędrującego z prędkością 30, 60 i 90 km/godz, przyjmując model reologiczny Voigta.



Rys. 1

Otrzymane wyniki mogą posłużyć do rozwiązywania problemów drgań skrętnych żelbetowych prześel mostów drogowych płytowych, po których pojazd porusza się nie wzdłuż osi mostu, lecz (co najczęściej ma miejsce) równoległe do osi z jednej lub drugiej jej strony przy pominięciu ciężaru pojazdu i ewentualnych nierówności nawierzchni mostu (rys. 1).

Ważniejsze oznaczenia

- a odległość przyłożenia siły Q od osi belki,
- C wielkość charakteryzująca kształt przekroju belki,
- E stała sprężystości materiału,
- G moduł odkształcenia postaciowego,
- J_0 biegunowy moment bezwładności przekroju,
- l rozpiętość belki,
- M moment działający na element belki o długości $d\xi$,
- Q siła skupiona,
- S reakcja działająca na element $d\xi$,
- S^* suma reakcji S i reakcji kinetycznej działającej na element belki o długości $d\xi$,
- t czas,
- v prędkość przesuwania momentu skręcającego wzdłuż belki,
- λ czas relaksacji,
- ρ gęstość materiału,
- ν liczba Poissona dla materiału belki.

1. Rozważania ogólne

Rozpatrzmy równowagę momentów działających na element pręta o długości $d\xi$ (rys. 2). Ponieważ

$$S^* d\xi + dM = 0,$$

zatem

$$(1.1) \quad -S^* = \frac{dM}{d\xi};$$

z drugiej strony

$$\frac{M}{GC} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi},$$

stąd

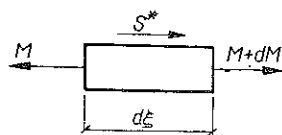
$$(1.2) \quad M = GC \frac{\partial \varphi}{\partial \xi};$$

z (1.1) i (1.2) wynika, że

$$(1.3) \quad -S^* = GC \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}.$$

S^* określimy następująco:

$$(1.4) \quad S^* = S - J_0 \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$



Rys. 2

Podstawiając równanie (1.3) do (1.4) otrzymujemy równanie różniczkowe drgań skrętnych [2]

$$-S + J_0 \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = GC \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}.$$

Wykonamy obecnie transformację Laplace'a

$$-\bar{S}(\xi, p) + J_0 \rho [p^2 \bar{\varphi}(\xi, p) - \dot{\varphi}(\xi, 0) - p\varphi(\xi, 0)] = GC \frac{d^2 \bar{\varphi}(\xi, p)}{d\xi^2}.$$

Stosujemy analogię sprężysto-lepkosprężystą [3]: napiszemy równanie transformowane dla pręta lepkosprężystego:

$$(1.5) \quad -\bar{S}(\xi, p) + J_0 \rho [p^2 \bar{\varphi}(\xi, p) - \dot{\varphi}(\xi, 0) - p\varphi(\xi, 0)] = \bar{G}(p) C \frac{d^2 \bar{\varphi}(\xi, p)}{d\xi^2}.$$

Ze względu na warunki brzegowe rozwiązanie poszukujemy w postaci

$$(1.6) \quad \varphi(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{n\pi\xi}{l}$$

oraz

$$(1.7) \quad \varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(u, t) \sin \frac{n\pi u}{l} du.$$

Natomiast obciążenie ciągle o momencie S przypadające na jednostkę długości możemy przedstawić szeregiem

$$(1.8) \quad S(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \sin \frac{n\pi\xi}{l},$$

gdzie

$$(1.9) \quad S_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l S(u, t) \sin \frac{n\pi u}{l} u du.$$

Wykonując transformację Laplace'a otrzymujemy

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \bar{S}(\xi, p) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n(p) \sin \frac{n\pi\xi}{l}, \\ \bar{\varphi}(\xi, p) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n(p) \sin \frac{n\pi\xi}{l}. \end{aligned}$$

Wstawiając (1.10) i (1.11) do równania (1.5) napiszemy

$$(1.11) \quad -\bar{S}_n(p) + J_0 \varrho [p^2 \bar{\varphi}_n(p) - \dot{\varphi}_n(0) - p\varphi_n(0)] = \bar{G}(p) C \left[-\bar{\varphi}_n(p) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right].$$

Stąd wynika

$$(1.12) \quad \bar{\varphi}_n(p) = \frac{\bar{S}_n(p) + J_0 \varrho [\dot{\varphi}_n(0) + p\varphi_n(0)]}{\left[J_0 \varrho p^2 + \bar{G}(p) C \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right]};$$

podstawiamy otrzymane wyrażenie na $\bar{\varphi}_n(p)$ do równania (1.11):

$$(1.13) \quad \bar{\varphi}(\xi, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{S}_n(p) + J_0 \varrho [\dot{\varphi}_n(0) + p\varphi_n(0)]}{\left[J_0 \varrho p^2 + \bar{G}(p) C \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right]} \sin \frac{n\pi\xi}{l},$$

gdzie

$$\bar{G}(p) = \frac{\bar{E}(p)}{2 [1 + \bar{\nu}(p)]}.$$

Wykonując odwrotną transformację Laplace'a przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie otrzymujemy

$$(1.14) \quad \varphi(\xi, t) = \frac{1}{J_0 \varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t K_n(t-\tau) s_n(\tau) d\tau + J_0 \varrho [K_n(t) \dot{\varphi}_n(0) k_n(t) \varphi_n(0)] \right\} \sin \frac{n\pi\xi}{l},$$

gdzie

$$K_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[J_0 \varrho p^2 + \bar{G}(p) C \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \right]^{-1} \right\},$$

$$k_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p \left[J_0 \varrho p^2 + \bar{G}(p) C \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \right] \right\}.$$

Rozwiązanie (1.14) jest ogólnym rozwiązaniem problemu.

2. Problem tłumienia drgań w przypadku modelu Voigta

Przyjmujemy model reologiczny Voigta; wtedy przy założeniu warunku nieściśliwości materiału ([3], s. 65) możemy napisać

$$\frac{E_0}{\bar{E}(p)} = \frac{2}{3} (1 + \nu_0) \frac{1}{1 + \lambda p}, \quad \bar{G}(p) = \frac{E(p)}{2 [1 + \bar{\nu}(p)]}.$$

Dla $\nu_0 = \frac{1}{2} = \bar{\nu}(p)$ mamy

$$\frac{E_0}{\bar{E}(p)} = \frac{1}{1 + \lambda p},$$

$$\bar{G}(p) = \frac{E_0 (1 + \lambda p)}{2 \left[1 + \frac{1}{2} \right]} = \frac{E_0}{3} (1 + \lambda p).$$

Po odpowiednim podstawieniu znajdziemy

$$(2.1) \quad K_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{J_0 \varrho p^2 + C \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \frac{E_0 \lambda}{3} p + \frac{E_0}{3} C \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2} \right\}.$$

Podstawiając w równanie (2.1) wartości

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \frac{\pi n}{l}, \quad D_n = \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \frac{\lambda}{2} \frac{\pi n}{l},$$

otrzymujemy

$$(2.2) \quad K_n(t) = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - D_n^2}} e^{-D_n \omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - D_n^2}), \quad D_n^2 < 1,$$

$$K_n(t) = \frac{1}{\omega_n \sqrt{D_n^2 - 1}} e^{-D_n \omega_n t} \operatorname{sh}(\omega_n t \sqrt{D_n^2 - 1}), \quad D_n^2 > 1,$$

$$K_n(t) = t e^{-\omega_n t}, \quad D_n = 1.$$

Przejdzie z wzoru (2.2) do wzoru (2.3) można komentować jako przejście od ruchu periodycznego do ruchu aperiodycznego.

Podobnie znajdziemy

$$(2.3) \quad \begin{aligned} k_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-D_n^2}} e^{-D_n \omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-D_n^2} + \varepsilon_1), & D_n^2 < 1; \\ k_n(t) &= (1 - \omega_n t) e^{-\omega_n t}, & D_n^2 = 1; \\ k_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{D_n^2-1}} e^{-D_n \omega_n t} \operatorname{sh}(\omega_n t \sqrt{D_n^2-1} + \varepsilon_2), & D_n^2 > 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega \sqrt{1-D_n^2}}{-D_n \omega_n}, \quad \varepsilon_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tgh} \frac{\omega_n \sqrt{D_n^2-1}}{-D_n \omega_n}.$$

Rozpatrywać będziemy przypadek

$$\dot{\varphi}(\xi, 0) = \varphi(\xi, 0) = 0.$$

Wtedy

$$(2.4) \quad \varphi(\xi, t) = \frac{1}{J_0 \varrho} \sum \left[\int_0^t K_n(t-\tau) s_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi\xi}{l}.$$

Wyobraźmy sobie, że obciążenie jest związane z punktem, który porusza się po belce z prędkością v . Moment możemy więc przedstawić za pomocą delty Diraca [1] w postaci

$$(2.5) \quad S(\xi, t) = Qa \delta(\xi - vt).$$

Korzystając z równania (1.9) otrzymujemy

$$s_n(t) = \frac{2Qa}{l} \int_0^t \delta(\xi - vt) \sin \frac{n\pi u}{l} du = \frac{2Qa}{l} \sin \frac{n\pi}{l} vt.$$

Zatem ogólne rozwiązanie można napisać w formie

$$(2.6) \quad \varphi(\xi, t) = \frac{2Qa}{J_0 \varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t K_n(t-\tau) \sin \frac{n\pi}{l} v\tau d\tau \right] \sin \frac{n\pi\xi}{l}.$$

3. Przypadek szczególny

Obliczamy całkę zawartą we wzorze (2.6):

$$(3.1) \quad L = \int_0^t e^{-D_n \omega_n (t-\tau)} \sin [\omega_n (t-\tau) \sqrt{1-D_n^2}] \sin \frac{n\pi}{l} v\tau d\tau.$$

Na początku rozpatrymy przypadek układu sprężystego ($\lambda = 0 \rightarrow D_n = 0$). Wprowadźmy znaczenie

$$\beta_n = \frac{\pi n}{l} v;$$

wówczas

$$L = \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) \sin \beta_n \tau d\tau = \frac{1}{\beta_n^2 - \omega_n^2} (\beta_n \sin \omega_n t - \omega_n \sin \beta_n t).$$

Podstawiając wartości β_n i ω_n znajdziemy

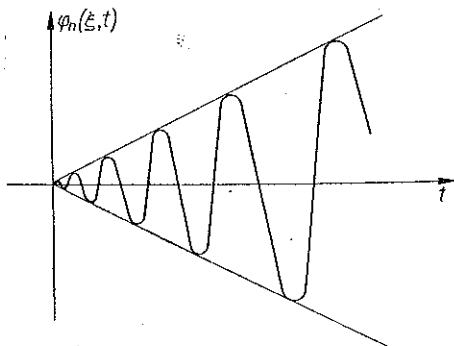
$$L = \frac{l}{\pi n \left(\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho} - v^2 \right)} \left(\sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \sin \frac{\pi n}{l} vt - v \sin \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \frac{\pi n}{l} t \right).$$

Rozpatrujemy przypadek rezonansu, gdy prędkość v dąży do $(E_0 C/3J_0 \varrho)^{1/2}$:

$$\lim_{v \rightarrow \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}}} \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) \sin \beta_n \tau d\tau = \frac{l}{2\pi n v} \left(\sin \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \frac{\pi n}{l} t - \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} t \cos \frac{\pi n v}{l} t \right).$$

Zatem $\varphi(\xi, t)$ w przypadku rezonansu wyniesie

$$(3.2) \quad \varphi(\xi, t) = \frac{Qa}{\pi v J_0 \varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n n} \left(\sin \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \frac{\pi n}{l} t - \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} t \cos \frac{\pi n v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi \xi}{l}.$$



Rys. 3

Jest to znany powszechnie przypadek rezonansu oscylatora harmonicznego (rys. 3). W przypadku gdy $v \neq (E_0 C/3J_0 \varrho)^{1/2}$,

$$(3.3) \quad \varphi(\xi, t) = \frac{2Qa}{J_0 \varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \pi n} \times$$

$$\times \frac{l}{\pi n \left(\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho} - v^2 \right)} \left(\sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \sin \frac{\pi n}{l} vt - v \sin \sqrt{\frac{E_0 C}{3J_0 \varrho}} \frac{\pi n}{l} t \right) \sin \frac{n\pi \xi}{l}.$$

Dotychczasowe rozważania były przeprowadzone dla $0 \leq t \leq l/v$, a więc dla czasu, gdy obciążenie znajdowało się pomiędzy miejscami utwierdzenia.

W przypadku $t > l/v$, czyli w czasie gdy obciążenie, które wywołało drgania, znalazło się poza przedziałem $(0, l)$ należy rozwiązania szukać w formie

$$\varphi(\xi, t) = \frac{2Qa}{J_0 \varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{l/v} K_n(t - \tau) \sin \left(\frac{n\pi}{l} v\tau \right) d\tau \right] \sin \frac{n\pi \xi}{l}.$$

Wracając do przypadku tłumienia ($\lambda \neq 0$) obliczamy całkę występującą w równaniu (2.6) typu

$$\begin{aligned} L_1 &= 2 \int_0^t e^{\kappa \tau} \sin \gamma_{1n} (t - \tau) \sin \beta_n \tau d\tau = \\ &= \int_0^t e^{\kappa \tau} \cos [(\beta + \gamma_{1n}) \tau - \gamma_{1n} t] d\tau - \int_0^t e^{\kappa \tau} \cos [(\gamma_{1n} - \beta) \tau - \gamma_{1n} t] d\tau = \\ &= \frac{1}{\beta + \gamma_{1n}} e^{\frac{\kappa_n \gamma_{1n} t}{\beta + \gamma_{1n}}} \left[\frac{e^{\alpha_{1n} \beta_n t}}{\alpha_{1n}^2 + 1} (a_{1n} \cos \beta_n t + \sin \beta_n t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-\alpha_{1n} \gamma_{1n} t}}{\alpha_{1n}^2 + 1} (a_{1n} \cos \gamma_{1n} t - \sin \gamma_{1n} t) \right] - \frac{1}{\gamma_{1n} - \beta} e^{\frac{\kappa_n \gamma_{1n} t}{\gamma_{1n} - \beta}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{e^{-\alpha_{2n} \beta_n t}}{\alpha_{2n}^2 + 1} (a_{2n} \cos \beta_n t - \sin \beta_n t) - \frac{e^{-\alpha_{2n} \gamma_{1n} t}}{\alpha_{2n}^2 + 1} (a_{2n} \cos \gamma_{1n} t - \sin \gamma_{1n} t) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\kappa_n = D_n \omega_n, \quad \beta_n = \frac{n\pi v}{l}, \quad \alpha_{1n} = \frac{\kappa_n}{\gamma_{1n} \pm \beta_n}, \quad \gamma_{1n} = \omega_n \sqrt{1 - D_n^2}.$$

Po podstawieniu do równania (2.6) dla małych λ , takich że $D_n^2 < 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (3.4) \quad \varphi(\xi, t) &= \frac{Qa}{W_0 g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-D_n \omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1 - D_n^2}} \left\{ \frac{\alpha_{1n}}{\kappa_n} e^{\alpha_{1n} \gamma_{1n} t} \left[\frac{e^{\alpha_{1n} \beta_n t}}{\alpha_{1n}^2 + 1} \times \right. \right. \\ &\quad \times (a_{1n} \cos(\beta_n t) + \sin(\beta_n t)) - \left. \frac{e^{-\alpha_{1n} \gamma_{1n} t}}{\alpha_{1n}^2 + 1} (a_{1n} \cos(\gamma_{1n} t) - \sin(\gamma_{1n} t)) \right] - \\ &\quad - \frac{\alpha_{1n}}{\kappa_n} e^{\alpha_{2n} \gamma_{1n} t} \left[\frac{e^{-\alpha_{1n} \beta_n t}}{\alpha_{2n}^2 + 1} (a_{2n} \cos(\beta_n t) - \sin(\beta_n t)) - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{-\alpha_{2n} \gamma_{1n} t}}{\alpha_{2n}^2 + 1} (a_{2n} \cos(\gamma_{1n} t) - \sin(\gamma_{1n} t)) \right] \right\} \sin \frac{n\pi \xi}{l}. \end{aligned}$$

Łatwo przekonujemy się, że podstawiając do wzoru (3.4) wartość $\lambda = 0$ otrzymamy równanie (3.3) dla ciał sprężystych.

Dla większych wartości λ , takich że $D_n^2 > 1$, mamy

$$\begin{aligned} &\int_0^t K_n(t - \tau) \sin\left(\frac{n\pi}{l} v\tau\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega_n \sqrt{D_n^2 - 1}} \int_0^t e^{-D_n \omega_n (t - \tau)} \operatorname{sh}[\omega_n (t - \tau) \sqrt{D_n^2 - 1}] \sin \beta_n \tau d\tau = \\ &= \frac{e^{-\kappa_n t}}{\omega \sqrt{D_n^2 - 1}} \int_0^t e^{\kappa_n \tau} \operatorname{sh} \gamma_{2n} (t - \tau) \sin(\beta_n \tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\kappa_n t}}{2\omega_n \sqrt{D_n^2 - 1}} \left\{ \frac{e^{\gamma_{2n} t}}{\kappa_{2n}^2 + \beta_n^2} [e^{\kappa_{2n} t} (\kappa_{2n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t) + \beta_n] - \frac{e^{-\gamma_{2n} t}}{\kappa_{1n}^2 + \beta_n^2} [e^{\kappa_{1n} t} (\kappa_{1n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t) + \beta_n] \right\},$$

gdzie

$$\kappa_{1n} = \kappa_n \pm \gamma_{2n}, \quad \gamma_{2n} = \omega_n \sqrt{D_n^2 - 1}, \quad \kappa_n = D_n \omega_n.$$

Wracając do równania (2.6) napiszemy

$$\varphi(\xi, t) = \frac{2Qa}{J_0 \varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa_n t}}{2\omega_n \sqrt{D_n^2 - 1}} \left\{ \frac{e^{\gamma_{2n} t}}{\kappa_{2n}^2 + \beta_n^2} [e^{\kappa_{2n} t} (\kappa_{2n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t) + \beta_n] - \frac{e^{-\gamma_{2n} t}}{\kappa_{1n}^2 + \beta_n^2} [e^{\kappa_{1n} t} (\kappa_{1n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t) + \beta_n] \right\} \sin \frac{n\pi\xi}{l}.$$

Po uproszczeniu znajdziemy

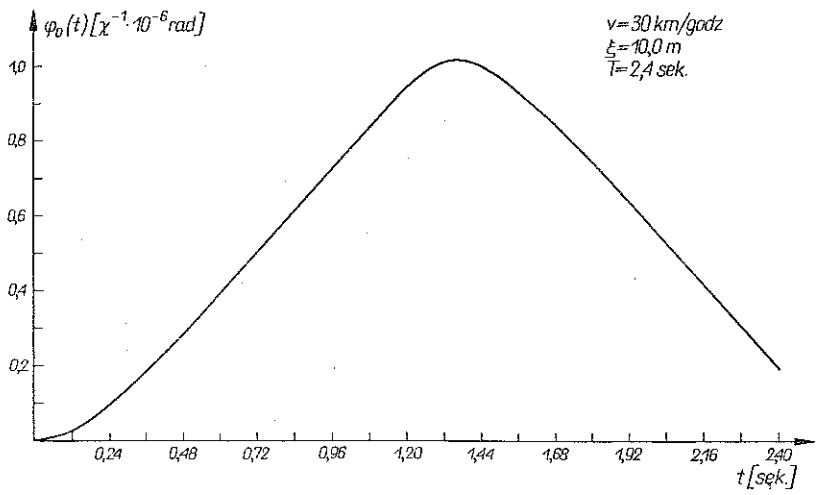
$$(3.5) \quad \varphi(\xi, t) = \frac{Qa}{J_0 \varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n \sqrt{D_n^2 - 1}} \left\{ \frac{1}{\kappa_{2n}^2 + \beta_n^2} [\kappa_{2n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t] + \beta_n e^{-\kappa_{2n} t} \right\} - \frac{1}{\kappa_{1n}^2 + \beta_n^2} [(\kappa_{1n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t) + \beta_n e^{-\kappa_{1n} t}] \right\} \sin \frac{n\pi\xi}{l}.$$

Do obliczeń przyjęto współczynnik bezwymiarowy

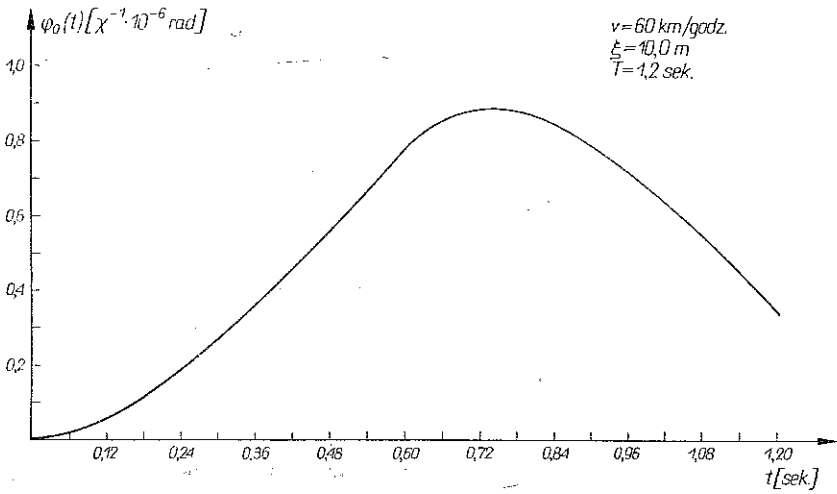
$$(3.6) \quad \mu(\xi, t) = \frac{J_0 \varrho v^2}{Qal} \varphi(\xi, t) = \frac{v^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n \sqrt{D_n^2 - 1}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\kappa_{2n}^2 + \beta_n^2} [(\kappa_{2n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t) + \beta_n e^{-\kappa_{2n} t}] - \frac{1}{\kappa_{1n}^2 + \beta_n^2} [(\kappa_{1n} \sin \beta_n t - \beta_n \cos \beta_n t) + \beta_n e^{-\kappa_{1n} t}] \right\} \sin \frac{n\pi\xi}{l}.$$

W celu zilustrowania zmienności $\varphi(\xi, t)$ przeprowadzono obliczenia numeryczne w Ośrodku Maszyn Matematycznych Politechniki Śląskiej. Przyjęto następujące dane: $\lambda = 0,2$ sek, $\omega_n = 65 \pi n$ sek⁻¹, $D_n = 6,5\pi n$ i $l = 20$ m. oraz trzy prędkości poruszania się obciążenia: $v_1 = 30$ km/godz, $v_2 = 60$ km/godz. i $v_3 = 90$ km/godz. Wyznaczono kąty φ dla dwudziestu położenia momentu Qa oraz dwudziestu czasów zawartych w przedziale $0 \leq t \leq l/v_i$ dla trzech różnych prędkości. W ten sposób uzyskano 1200 wyników. Ze względu na obszerność materiału obliczeniowego autorzy postanowili nie zamieszczać tabel, a jedynie ograniczyć się do typowych wykresów.

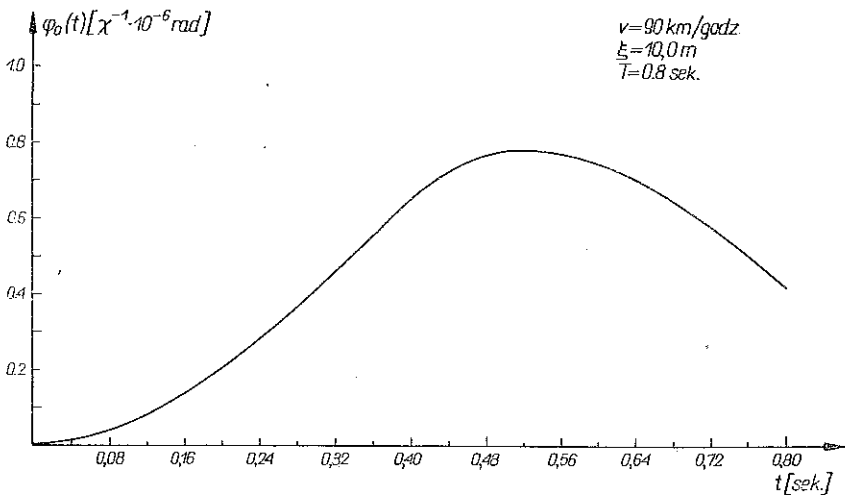
Ażeby dla różnych prędkości wyniki były porównywalne, nanoszono na osiach rzędne funkcji $x\varphi(\xi, t) \cdot 10^6$, gdzie $x = J_0 \varrho / Qal$. Uzyskano w ten sposób trzy wykresy przedstawiające zmienność kąta obrotu przekroju połowiącego długość pręta w zależności od czasu (rys. 4–6) oraz dla różnych czasów trzy wykresy obrazujące chwilowe rozkłady kątów skręcania poszczególnych przekrojów pręta (rys. 7–9). Na podstawie wykresów obserwujemy zjawisko podążania maksimum kąta skręcania



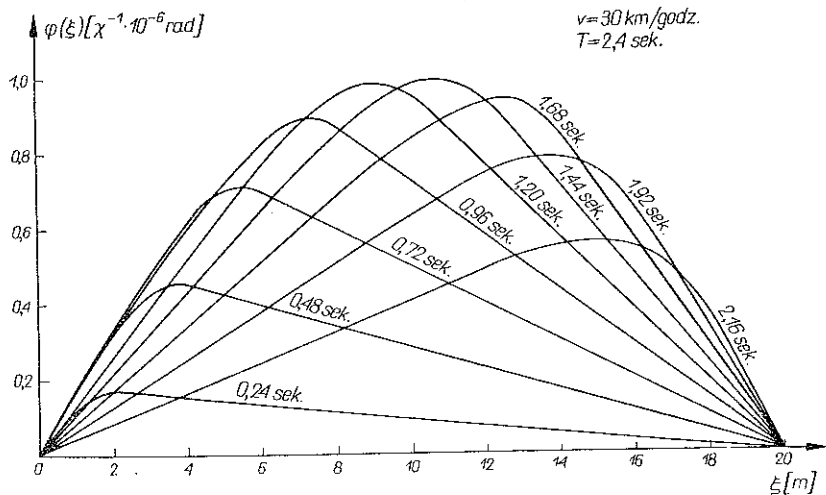
Rys. 4



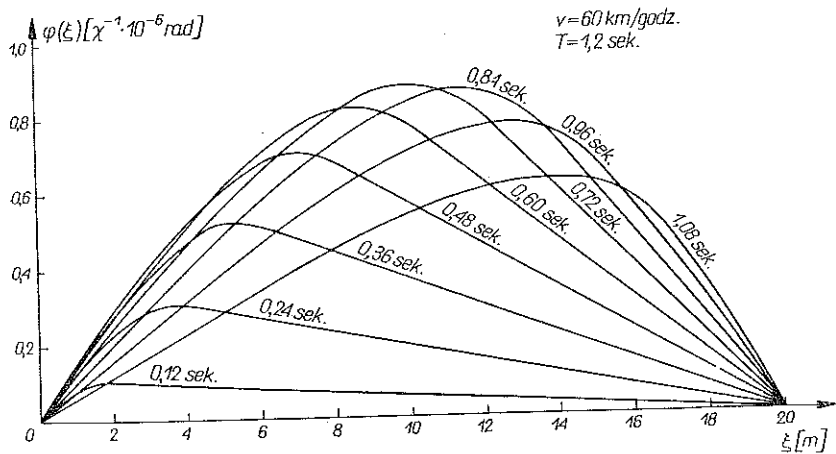
Rys. 5



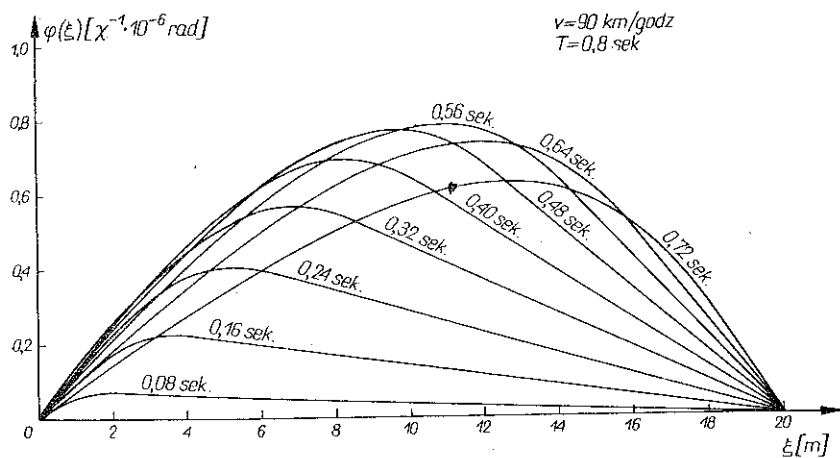
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

za punktem przyłożenia obciążenia. Odległość pomiędzy tymi punktami rośnie ze wzrostem prędkości v . Odległość ta dla poszczególnych przekrojów pręta jest tym większa, im dalszy przekrój rozpatrujemy w kierunku ruchu obciążenia. Zjawisko to jest typowe dla przypadku dynamiki ciał lepkosprężystych. Obserwujemy również, że przy wzroście v maleją maksymalne wychylenia.

Literatura cytowana w tekście

1. J. MIKUSIŃSKI, R. SIKORSKI, *Elementarna teoria dystrybucji*, PWN, Warszawa 1964.
2. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.
3. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.

Резюме

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ, ВЫЗВАННЫЕ ПОДВИЖНЫМ КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ

Обсуждается вопрос крутильных колебаний вязкоупругого призматического стержня, заземленного по обоим концам. Предполагается, что нагрузка составляет крутящий сосредоточенный момент передвигающийся с постоянной скоростью. Решение получено на основе упруго-вязкоупругой аналогии [3]. Результаты получены в форме рядов Фурье, основываясь на обратном преобразовании Лапласа. В подробных рассуждениях исследовалась изменчивость углов оборота стержня длиной 20 м., под влиянием крутящего момента, передвигающегося со скоростью 30, 60 и 90 км/час. принимая реологическую модель Фойгта.

Summary

TORSIONAL VIBRATION OF A BEAM PRODUCED BY A MOVING TORQUE

The problem under consideration is that of torsional vibration of a viscoelastic prismatic bar clamped at both ends. It is assumed that the bar is loaded by a concentrated torque travelling at constant speed. The solution is obtained by means of the elastic-viscoplastic analogy [3]. The results are found in the form of Fourier series, by using the inverse Laplace transformation. The detailed considerations contain a study of the variability of the rotation angles of a bar 20 m long under the action of a torque travelling at the speeds of 30, 60 and 90 km/h, assuming the rheologic model of Voigt.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1966 r.