

**TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI PRAC DLA PEWNEGO TYPU PŁYT  
TRÓJWARSTWOWYCH**

RYSZARD GANOWICZ (POZNAŃ)

1. Teoria płyt trójwarstwowych rozwinęła się ostatnio niezwykle szeroko. Szereg autorów [1]–[5] zajmowało się tym zagadnieniem rozpatrując różne modele.

Ze względu na to, że w typowych płytach trójwarstwowych spotykanych w konstrukcjach lotniczych czy budowlanych warstwa środkowa jest wykonana z materiałów o niskich wartościach wytrzymałościowych, konieczne jest badanie wpływu odkształceń od sił poprzecznych warstwy środkowej na pracę płyty. Cechą więc najbardziej różniącą płyty trójwarstwowe od tzw. płyt cienkich jest uwzględnianie odkształceń od sił poprzecznych. W tym sensie bliska jest teoria płyt trójwarstwowych teorii Reissnera [6].

Twierdzenie o wzajemności prac E. BETTEGO stanowi dogodnie narzędzie do konstruowania rozwiązań w teorii sprężystości a także w teorii płyt. Twierdzenie to spełnia podobną rolę w teorii sprężystości jak znany wzór Greena

$$(1.1) \quad \iint_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx dy = \iint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

w teorii funkcji harmonicznych. Wzór ten posiada swój odpowiednik w teorii płyt cienkich w postaci tożsamości Rayleigha-Greena [7]

$$(1.2) \quad \iint_D (v \nabla^2 \nabla^2 u - u \nabla^2 \nabla^2 v) dx dy = \\ + \iint_C \left[ M(u) \frac{\partial v}{\partial n} - q(u) v - M(v) \frac{\partial u}{\partial n} + q(v) u \right] ds.$$

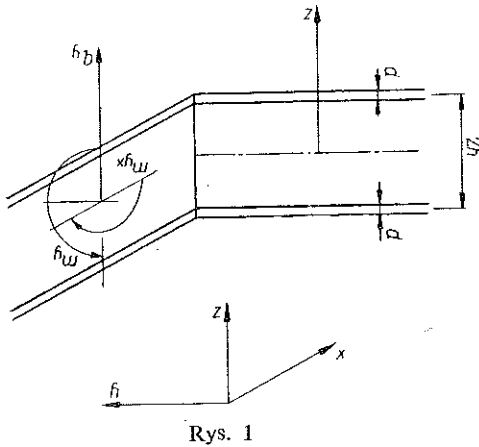
W dalszym ciągu pracy, w celu wyprowadzenia twierdzenia o wzajemności prac dla płyt trójwarstwowych, oprzemy się na wyżej cytowanej książce S. BERGMANA i M. SCHIFFERA [7].

2. Zajmiemy się zginanymi płytami trójwarstwowymi, których warstwy skrajne są izotropowe i nie posiadają sztywności na zginanie, a warstwa środkowa jest nieściśliwa i jest sztywna jedynie na odkształcenia postaciowe w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej płyty.

Równania równowagi takich płyt przyjmują postać następującą [8]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 + \frac{\partial}{\partial y} \varphi_3 &= -\frac{p}{2G_s h}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 + \left[ 1 - \frac{\eta}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \varphi_2 - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_3 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_2 + \left[ 1 - \frac{\eta}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wielkości statyczne wyznaczyć możemy z następujących związków (rys. 1):



Rys. 1

$$(2.2) \quad \begin{aligned} m_x &= D \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right), \\ m_y &= D \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), \\ m_{xy} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right), \\ q_x &= 2G_s h \left( \varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right), \\ q_y &= 2G_s h \left( \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Dla przemieszczeń mamy

$$u = z\varphi_2(x, y), \quad v = z\varphi_3(x, y), \quad w = \varphi_1(x, y).$$

We wzorach powyższych przyjęliśmy jak zwykle oznaczenia

$$D = \frac{2Eh^2 d}{1-\nu^2}, \quad \eta = \frac{Edh}{G_s(1+\nu)};$$

symbole  $E$ ,  $\nu$  oznaczają stałe materiałowe warstw skrajnych, a  $G_s = G_{xz} = G_{yz}$  moduły odkształcenia postaciowego warstwy środkowej.

W celu wyprowadzenia twierdzenia E. Bettiego wprowadzimy do rozważań wyrażenie na energię sprężystą nagromadzoną w elemencie płyty:

$$(2.3) \quad dV = \frac{1}{2} \left[ m_x \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + m_y \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + m_{xy} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) + q_x \left( \varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + q_y \left( \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Uwzględniając zależności (2.2) wyrazimy całkowitą energię nagromadzoną w rozpatrywanej płycie (rys. 2) w sposób następujący:

$$(2.4) \quad V = \frac{D}{2} \iint_B \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)^2 + \right.$$

$$+ (1 - \nu) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right)^2 + \frac{1 - \nu}{\eta} \left[ \varphi_2^2 + 2\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \varphi_3^2 + 2\varphi_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Wprowadzimy teraz pewien funkcjonal zależny od dwóch układów funkcji:

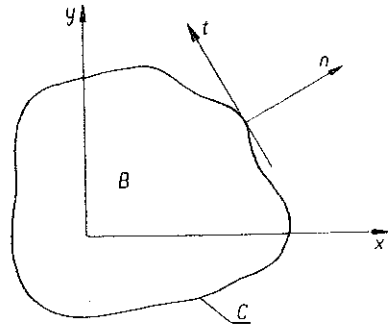
$$(2.5) \quad e \{ \varphi, \Phi \} = \frac{D}{2} \iint_B \left\{ \frac{1 - \nu}{\eta} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \varphi_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right] + \frac{1 - \nu}{\eta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Phi_2 + \frac{1 - \nu}{\eta} \varphi_2 \Phi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{1 - \nu}{\eta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Phi_3 + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{1 - \nu}{\eta} \varphi_3 \Phi_3 + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right\} dx dy,$$

który ma związek następujący z energią sprężystą (2.4):

$$(2.6) \quad V = e \{ \varphi, \varphi \}.$$

Odnosnie funkcji  $\varphi_i$  i  $\Phi_i$  założymy, że są one ciągłe wraz z pochodnymi do drugiego rzędu w obszarze  $B$  i ciągłe wraz z pochodnymi rzędu pierwszego na brzeg  $C$ .

Zajmiemy się teraz funkcjonalem (2.5) i zastosujemy do niego przekształcenia Greena. Przykładowo wykonamy to przekształcenie dla całki



Rys. 2

$$(2.7) \quad \iint_B \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} dx dy = - \iint_B \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \Phi_1 dx dy + \int_C \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Phi_1 \cos(n, Ox) ds.$$

Postępując analogicznie z pozostałymi składnikami wyrażenia (2.5), otrzymamy

$$(2.8) \quad e \{ \varphi, \Phi \} = - \frac{D(1 - \nu)}{2\eta} \iint_B \left( \nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) \Phi_1 dx dy + \frac{D(1 - \nu)}{2\eta} \iint_B \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 - \frac{\eta}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} \right) \times \Phi_2 dx dy + \frac{D(1 - \nu)}{2\eta} \iint_B \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\eta}{2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \varphi_3 - \frac{\eta}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} \right) \times \Phi_3 dx dy.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \Phi_3 dx dy + \frac{D(1-\nu)}{2\eta} \int_C \left[ \left( \varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \cos(n, Ox) + \right. \\
& \left. + \left( \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \cos(n, Oy) \right] \Phi_1 ds + \frac{D}{2} \int_C \left[ \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) \times \right. \\
& \left. \times \cos(n, Ox) + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) \cos(n, Oy) \right] \Phi_2 ds + \\
& + \frac{D}{2} \int_C \left[ \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \cos(n, Oy) + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) \cos(n, Ox) \right] \Phi_3 ds.
\end{aligned}$$

Jeżeli funkcje  $\varphi_i$  i  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) na brzegu  $C$  przedstawimy

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad \varphi_2(x, y) &= \varphi_n(x, y) \cos(n, Ox) - \varphi_t(x, y) \cos(n, Oy), \\
\varphi_3(x, y) &= \varphi_n(x, y) \cos(n, Oy) + \varphi_t(x, y) \cos(n, Ox)
\end{aligned}$$

oraz zauważymy, że

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad m_n &= m_x \cos^2(n, Ox) + m_y \cos^2(n, Oy) + 2m_{xy} \cos(n, Ox) \cos(n, Oy), \\
m_{nt} &= (m_y - m_x) \cos(n, Ox) \cos(n, Oy) + m_{xy} [\cos^2(n, Ox) - \cos^2(n, Oy)], \\
q_n &= q_x \cos(n, Ox) + q_y \cos(n, Oy),
\end{aligned}$$

to wtedy funkcjonal (2.8) będziemy mogli przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad e\{\varphi, \Phi\} &= -G_s h \int_B \int_B \left( \nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) \Phi_1 dx dy + \\
& + G_s h \int_B \int_B \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 - \frac{\eta}{1-\nu} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} \right) \Phi_2 dx dy + \\
& + G_s h \int_B \int_B \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \varphi_3 - \frac{\eta}{1-\nu} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \right) \Phi_3 dx dy + \\
& + \frac{1}{2} \int_C (q_n(\varphi) \Phi_1 + m_n(\varphi) \Phi_n + m_{nt}(\varphi) \Phi_t) ds.
\end{aligned}$$

Z warunku  $e\{\varphi, \Phi\} = e\{\Phi, \varphi\}$  i na podstawie (2.11) otrzymamy formułę stanowiącą pełną analogię do tożsamości Rayleigha-Greena (1.2).

W celu uzyskania zasady E. Bettiego dla płyt trójwarstwowych założymy, że oba układy funkcji  $\varphi$  i  $\Phi$  spełniają równania równowagi zagadnienia (2.1) dla danej płyty trójwarstwowej. Oznaczać to będzie, że rozpatrzmy płytę, na którą działa obciążenie  $p(\varphi)$  w obszarze  $B$ , siły brzegowe na brzegu  $C$  [stan  $S(\varphi)$ ] oraz obciążenie  $p(\Phi)$  w obszarze  $B$  i siły brzegowe na brzegu  $C$  [stan  $S(\Phi)$ ].

Z warunku  $e\{\varphi, \Phi\} = e\{\Phi, \varphi\}$  otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad \int_B [p(\varphi) \Phi_1 - p(\Phi) \varphi_1] dB &= - \int_C [q_n(\varphi) \Phi_1 + m_n(\varphi) \Phi_n + \\
& + m_{nt}(\varphi) \Phi_t - q_n(\Phi) \varphi_1 - m_n(\Phi) \varphi_n - m_{nt}(\Phi) \varphi_t] ds.
\end{aligned}$$

Równość powyższa przedstawia poszukiwane przez nas twierdzenie o wzajemności prac dla płyt trójwarstwowych.

3. Jako przykład rozpatrzmy półpłaszczyznę trójwarstwową  $x > 0$ . Niech na brzegu  $x = 0$  będą dane następujące funkcje:

$$(3.1) \quad \varphi_1(O, y) = f_1(y), \quad m_n(O, y) = m_x(O, y) = f_2(y), \quad \varphi_t(O, y) = \varphi_3(O, y) = 0.$$

Poszukujemy ugięcia  $w(x, y) = \varphi_1(x, y)$  dla  $x > 0$  przy podanych powyżej (3.1) warunkach brzegowych.

Zadanie takie można rozwiązać bezpośrednio korzystając z równań zagadnienia (2.1), jednak jest to droga uciążliwa. Poniżej uzyskamy rozwiązanie opierając się na twierdzeniu E. Bettiego i wykorzystując rozwiązanie dla płyty nieograniczonej obciążonej siłą skupioną [8].

Jeżeli płytę nieograniczoną obciążymy antysymetrycznie względem osi  $x = 0$  dwoma siłami skupionymi, to dla  $x > 0$  otrzymamy rozwiązanie półpłaszczyzny obciążonej siłą skupioną, spełniające następujące jednorodne warunki brzegowe na krawędzi  $x = 0$ :

$$\varphi_1 = \varphi_3 = m_n = 0.$$

W dalszym ciągu potrzebna będzie znajomość sił poprzecznych  $q_n$  oraz wielkości  $\varphi_n$  na brzegu  $x = 0$  dla półpłaszczyzny obciążonej siłą skupioną  $p = \delta(x_1 - x) \delta(y_1 - y)$  działającą w punkcie  $(x, y)$ . Wykorzystując rozwiązanie dla płyty nieograniczonej łatwo wyznaczmy te wielkości:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} q_n(x, y, O, y_1) &= -\frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + (y_1 - y)^2}, \\ \varphi_n(x, y, O, y_1) &= -\frac{1}{4\pi D} x \{\ln [x^2 + (y_1 - y)^2] + 1\}. \end{aligned}$$

Zastosujemy teraz twierdzenie o wzajemności prac (2.12) przyjmując jako jeden stan obciążenie półpłaszczyzny siłą skupioną, a jako drugi określony przez dane wielkości brzegowe (3.1). Biorąc pod uwagę, że

$$\int_B \int w(x_1, y_1) \delta(x_1 - x) \delta(y_1 - y) dx_1 dy_1 = w(x, y),$$

otrzymamy poszukiwane rozwiązanie:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} w(x, y) &= \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(y_1)}{x^2 + (y_1 - y)^2} dy_1 - \\ &\quad - \frac{x}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y_1) \{\ln [x^2 + (y_1 - y)^2] + 1\} dy_1. \end{aligned}$$

Jako przykład przyjmijmy następujące dane:

$$f_1(y_1) = 0, \quad f_2(y_1) = \frac{M}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + y_1^2}, \quad \varepsilon > 0, \quad M = \text{const.}$$

Dla tego przykładu otrzymamy

$$(3.4) \quad w(x, y) = -\frac{x}{4\pi D} \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + y_1^2} \{\ln [x^2 + (y_1 - y)^2] + 1\} dy_1.$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że ciąg funkcji  $(1/\pi)(\varepsilon/\varepsilon^2 + y_1^2)$  dla  $\varepsilon \rightarrow 0$  zmierza do funkcji Diraca  $\delta(y_1)$  [9], to przechodząc do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  w wyrażeniu (3.4) otrzymamy dla przypadku obciążenia brzegu półpłaszczyzny momentem skupionym działającym w początku układu współrzędnych ugięcie

$$(3.5) \quad w(x, y) = -\frac{M}{4\pi D} x [\ln(x^2 + y^2) + 1].$$

4. Zwróćmy uwagę na ścisły związek wprowadzonego przez nas funkcjonału  $e\{\varphi, \Phi\}$  z pierwszą wariacją energii sprężystej. Łatwo mianowicie stwierdzić, że funkcjonal ten przedstawia połowę pierwszej wariacji energii sprężystej  $V(2.4)$ , jeżeli oznaczymy wariacje poszczególnych funkcji w sposób następujący:

$$(4.1) \quad \delta\varphi_1 = \Phi_1, \quad \delta\varphi_2 = \Phi_2, \quad \delta\varphi_3 = \Phi_3.$$

Przy tej interpretacji otrzymujemy

$$(4.2) \quad \delta V = 2e\{\varphi, \Phi\}.$$

Łatwo także udowodnić w oparciu o wyrażenie (2.11), że podane na początku pracy równania równowagi (2.1) przedstawiają układ równań Eulera zagadnienia wariacyjnego znalezienia minimum całkowitej energii płyty:

$$(4.3) \quad \delta U = \delta V - p\delta\varphi_1 = 0.$$

Oprócz powyższego możemy też na podstawie wyrażenia (2.11) podać naturalne warunki graniczne:

$$(4.4) \quad \int_C (q_n \Phi_1 + m_n \Phi_n + m_{nt} \Phi_t) ds = 0.$$

Stąd otrzymać można osiem typów warunków brzegowych, które uzyskamy spełniając warunek (4.4).

Na przykład dla brzegu swobodnego otrzymamy:

$$(4.5) \quad q_n = 0, \quad m_n = 0, \quad m_{nt} = 0.$$

Pozostałe warunki brzegowe otrzymuje się analogicznie.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Александров, Брюкер, Куршин, Прусаков, *Расчет трехслойных панелей*, Москва 1960.
2. CHIEN C. CHANG and BERTRAND T. FANG, *Initially warped sandwich panel under combined loadings*, Aerospace Sci., October 1960.
3. C. LIOVE and S. B. BATHORF, *A general small deflection theory for flat sandwich plates*, NACA, No. 899, April 1948.

4. M. STEIN and J. MAYERS, *A small deflection theory for curved sandwich plates*, NACA, Report 1008, 1951.
5. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte, prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Łądow., 1, 12 (1966).
6. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech., 12, A. 69 (1954).
7. S. BERGMAN and M. SCHIFFER, *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*, Ac. Press, New York 1953.
8. R. GANOWICZ, *O pewnym rozwiązaniu płyty trójwarstwowej*, Rozpr. Inżyn., 3, 14 (1966).
9. И. М. Гелфанд, Г. Е. Шялов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1959.

## Резюме

## ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ТИПА ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе выводится теорема Э. Бетти для трехслойных пластинок, внешние слои которых не обладают жесткостью на изгиб, а срединный слой воздействует единственно на поперечные силы.

## Summary

## THE RECIPROcity THEOREM FOR THREE-LAYER PLATES

This paper contains a derivation of the Betti theorem for three-layer (sandwich) plates of which the outer layers have no flexural rigidity and the middle layer carries shear forces only. An example illustrates the application of the theorem proved.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 grudnia 1965 r.*

---