

WYMIANA CIEPŁA PRZY BURZLIWYM PRZEPLYWIE
CIECZY LEPKIEJ W OKRĄGŁEJ RURZE

TADEUSZ DROZD (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

Zagadnienie wymiany ciepła pomiędzy ścianką i strumieniem posiada stosunkowo obszerną literaturę [1–5], brak jednak na ten temat ogólnej teorii, a nawet ustalonych podstaw do takiej teorii.

Rozważany tu przepływ cieczy lepkiej przez rurę o kształcie walca kołowego i ściankach gładkich ma charakter burzliwy. Zakłada się, że przepływ hydromechaniczny jest osiowo-symetryczny i ustalony w czasie, odcinki z zaburzeniami przy wlocie i wylocie są wyeliminowane. Ciecz ma ustalone własności fizyczne. Na wybranym odcinku rury temperatura ścianki jest stała lub zmienia się osiowo-symetrycznie i jest różna na ogół od średniej temperatury strumienia.

Problem polega na wyznaczeniu pola temperatury w strumieniu cieczy, jego średniej temperatury jako funkcji długości rury i natężenia strumienia cieplnego przy ściance wzdłuż rury.

Dla przypadku stałej temperatury ścianki znane są zależności empiryczne o postaci $Nu = C_1 + C_2 Re^m Pr^n$ [6–10], pozwalające wyznaczyć średnie natężenie strumienia cieplnego na rozważanym odcinku. Własności fizyczne cieczy ustala się przy średnim ciśnieniu i średniej temperaturze strumienia, przyjmowanej za średnią arytmetyczną ze średnich temperatur strumienia na końcach rozważanego odcinka rury. Różnicę obliczeniową temperatury ścianki i strumienia przyjmuje się jako średnią logarytmiczną różnic na końcach odcinka. Gdy temperatura ścianki zmienia się, powyższe wzory empiryczne dają wyniki błędne. W skrajnym przypadku, gdy na początku i końcu rozważanego odcinka rury temperatura ścianki jest w przybliżeniu równa temperaturze strumienia, przy czym na końcu odcinka temperatura ścianki i strumienia różni się od odpowiednich wartości na początku, wzory empiryczne nie dają się zastosować do wyznaczenia średniego natężenia strumienia cieplnego na ściance; nie można bowiem wyznaczyć różnicy obliczeniowej temperatur.

Pewnych informacji o profilu temperatury w strumieniu w jednym środkowym przekroju odcinka dostarczają tzw. równania analogii cieplno-hydrodynamicznych [11–17]. Opierają się one na dość silnych założeniach upraszczających, które sprowadzają równanie energii, mające w rozważanym przypadku postać równania parabolicznego ze zmiennymi współczynnikami, do równania zwyczajnego pierwszego rzędu z jedną zmienną niezależną (odległością w kierunku promieniowym). Jednym

z głównych założeń w równaniach analogii jest przyjmowanie, że gradient temperatury strumienia w kierunku osiowym jest stały w całym przekroju. Założenie to oczywiście nie jest spełnione w pobliżu ścianki o stałej temperaturze, różnej od temperatury strumienia. Równania analogii nie pozwalają jednak wyznaczyć pola temperatury w kierunku osiowym ani przy stałej, a tym bardziej zmiennej, temperaturze ścianki.

Sformułowanie matematycznego opisu zjawiska wymiany ciepła przy przepływie laminarnym nie nastęrcza większych trudności; problem ten nazywany jest problemem GRAETZA [18].

Przy przepływie burzliwym powstają już trudności z określeniem współczynników w równaniu energii, w szczególności burzliwej lepkości i burzliwego wyrównywania temperatury jako funkcji promienia. Brakujące równania uzupełnia się zależnościami empirycznymi dla profilu prędkości, spadku ciśnienia w kierunku przepływu i hipotetycznej analogii rozkładów współczynników burzliwej lepkości i burzliwego wyrównywania temperatury. Nadanie prawidłowej postaci analitycznej zależnościom empirycznym ma decydujące znaczenie dla możliwości rozwiązania równania parabolicznego, jakim opisuje się w ostateczności proces wymiany ciepła przy przepływie ustalonym [9]. Równanie to jest równaniem energii w postaci uśrednionej wg reguł REYNOLDSA [19].

Posługiwanie się zależnościami empirycznymi, używanymi w tzw. równaniach analogii, jest w przypadku równania parabolicznego niedostatecznie precyzyjne. W szczególności funkcja opisująca profil prędkości musi spełniać wiele warunków (ciągłość, istnienie monotonicznych pochodnych do trzeciego rzędu włącznie, spełnienie przez funkcję i jej pierwsze pochodne warunków brzegowych w osi i przy ściance, itd.).

Znane profile empiryczne dla prędkości przy przepływie nad płaską ścianką [5] nie nadają się do opisu profilu prędkości w rurze. Profil prędkości w rurze nie jest jednoznacznie określony we współrzędnych bezwymiarowych, stosowanych przy opisie profilu prędkości nad płaską ścianką. Decyduje o tym warunek ciągłości pierwszej pochodnej prędkości, szczególnie w pobliżu osi przewodu.

Niespełnienie przez profil prędkości powyższych wymagań prowadzi do błędnych określeń współczynnika burzliwej lepkości, a przez analogię również współczynnika burzliwego wyrównywania temperatury, rozkładu naprężeń stycznych w strumieniu, pochodzących od burzliwej lepkości, stopnia burzliwości, swobodnej drogi mieszania i tzw. stałej Kármána, [12], [6] rys. 15–16, str. 438; [9] rys. 41, str. 154; [21, 22, 23]; [20], str. 333; [25]. Na podstawie znanych w literaturze zależności teoretycznych nie można przy błędnym określeniu analitycznym profilu prędkości wyjaśnić niezgodności z danymi doświadczalnymi i przewidywanym sensem fizycznym [26, 6] sposobu zmienności współczynników burzliwej lepkości i wyrównywania temperatury.

Rozważany przypadek przepływu burzliwego przez rurę z wymianą ciepła był analizowany przez LATZKO [27] przy pojęciach nie odpowiadających już współczesnym poglądom na zjawisko burzliwości przy profilu prędkości wg $1/7$ i w ostatnich latach przez SLEICHERA [25]. Artykuł Sleichera [25] jest rozwinięciem tematu artykułu SELLARSA [18] dla przypadku laminarnego na przypadek przepływu burzli-

wego. Wzory tam przytoczone są formalnie podobne do wzorów w artykule [18]. Brak tam jednak jest określeń współczynników równania, poczyniono szereg dowolnych, upraszczających założeń nie zawsze podanych i omówionych, wyniki otrzymano podobno na maszynie analogowej, wzory opierają się na funkcjach własnych, dla których brak określeń czy nawet wykresów, wzory, które różne są formalnie od wzorów podanych w [18], są błędne, [np. (26), (27), (28)], a wzory (25) i (26) są sprzeczne.

Rozwiązywanie uproszczonego równania energii, w którym uśrednia się pewne funkcje w ten sposób, ażeby sprowadzić równanie do równania Bessela rzędu zerowego (które posiada znane rozwiązanie analityczne) jest poczynaniem bardzo dowolnym. Przepływ taki jest pewnym modelem matematycznym [28] i nazywany bywa «prętowym» [21]; przypisuje mu się pewien odpowiednik fizyczny.

Tak więc dotychczas brak było poprawnego opisu matematycznego zjawiska i poprawnego rozwiązania równania bez wprowadzenia różnych założeń upraszczających w trakcie rozwiązywania, wypaczających dodatkowo opis zjawiska.

2. Równania wyjściowe

Założenia, które prowadzą do uśrednionych wg reguł Reynoldsa równań wyjściowych, opisujących zjawisko, zostały omówione szczegółowo w pracach [11, 9 i 19]. Równania te mają postać:

a) równanie ruchu

$$(2.1) \quad \frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r (\mu + \mu_T(r)) \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right],$$

b) równanie energii

$$(2.2) \quad \bar{v}_z \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (a + a_T(r)) \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} \right],$$

c) równanie ciągłości

$$(2.3) \quad \frac{\partial \bar{v}_z(r)}{\partial z} = 0,$$

d) równanie stanu

$$(2.4) \quad \rho_g = \rho_g(p, t),$$

e) teoretyczno-empiryczny wzór dla spadku ciśnienia

$$(2.5) \quad \frac{dp}{dz} = - \frac{f}{r_0} \rho_g \bar{v}_{zm}^2,$$

f) teoretyczno-empiryczne równanie analogii

$$(2.6) \quad a_T = \varepsilon_T \frac{\mu_T}{\rho_g},$$

g) teoretyczno-empiryczny rozkład prędkości

$$(2.7) \quad \bar{v}_z = \bar{v}_z(r, \text{Re}),$$

h) warunki brzegowe dla profilu prędkości $\bar{v}_z(r)$

$$(2.8) \quad \bar{v}_z(0) = [\bar{v}_z(\text{Re})]_{r=0}, \quad \bar{v}'_z(0) = 0, \quad \bar{v}_z(r_0) = 0, \\ \bar{v}'_z(r_0) = [\bar{v}'_z(\text{Re})]_{r=r_0},$$

i) warunki brzegowe dla równania energii w rozważanym wstępie problemie

$$(2.9) \quad \bar{t}(r, 0) = t_c, \quad \bar{t}(r_0, z) = t_0 \neq t_c \quad \text{przy} \quad z \geq 0, \\ \bar{t}(r_0, z) = t_c \quad \text{przy} \quad z < 0, \quad \frac{\partial \bar{t}(0, z)}{\partial r} = 0, \quad \bar{t}(0, z) \neq \infty.$$

W równaniach powyższych p oznacza ciśnienie, \bar{t} uśrednioną temperaturę wg reguł Reynoldsa, \bar{v}_z uśrednioną prędkość, μ lepkość dynamiczną, ρ_g gęstość, α współczynnik wyrównywania temperatury, r, z współrzędne w kierunku promieniowym i osiowym, f współczynnik tarcia Fanninga, Re liczbę Reynoldsa, Pr liczbę Prandtla, ε_T współczynnik analogii przyjmowany zwykle równy 1; wskaźnik T oznacza, że dana wielkość dotyczy burzliwości, 0 przy ściance, c «na osi», przy temperaturze t_c w całym przekroju $z = 0$; \bar{v}_{zm} oznacza średnią prędkość w przekroju.

3. Teoretyczno-empiryczny rozkład prędkości

Znane z licznych doświadczeń różnych autorów [29, 5] rozkłady prędkości w nurze można aproksymować przy ustalonych Re dowolnie dokładnie wielomianem potęgowym spełniającym z założenia warunki brzegowe

$$(3.1) \quad \omega_c(\xi) = \frac{\bar{v}_z(r)}{\bar{v}_z(0)} = 1 - \sum_{n=2}^N a_n \xi^n,$$

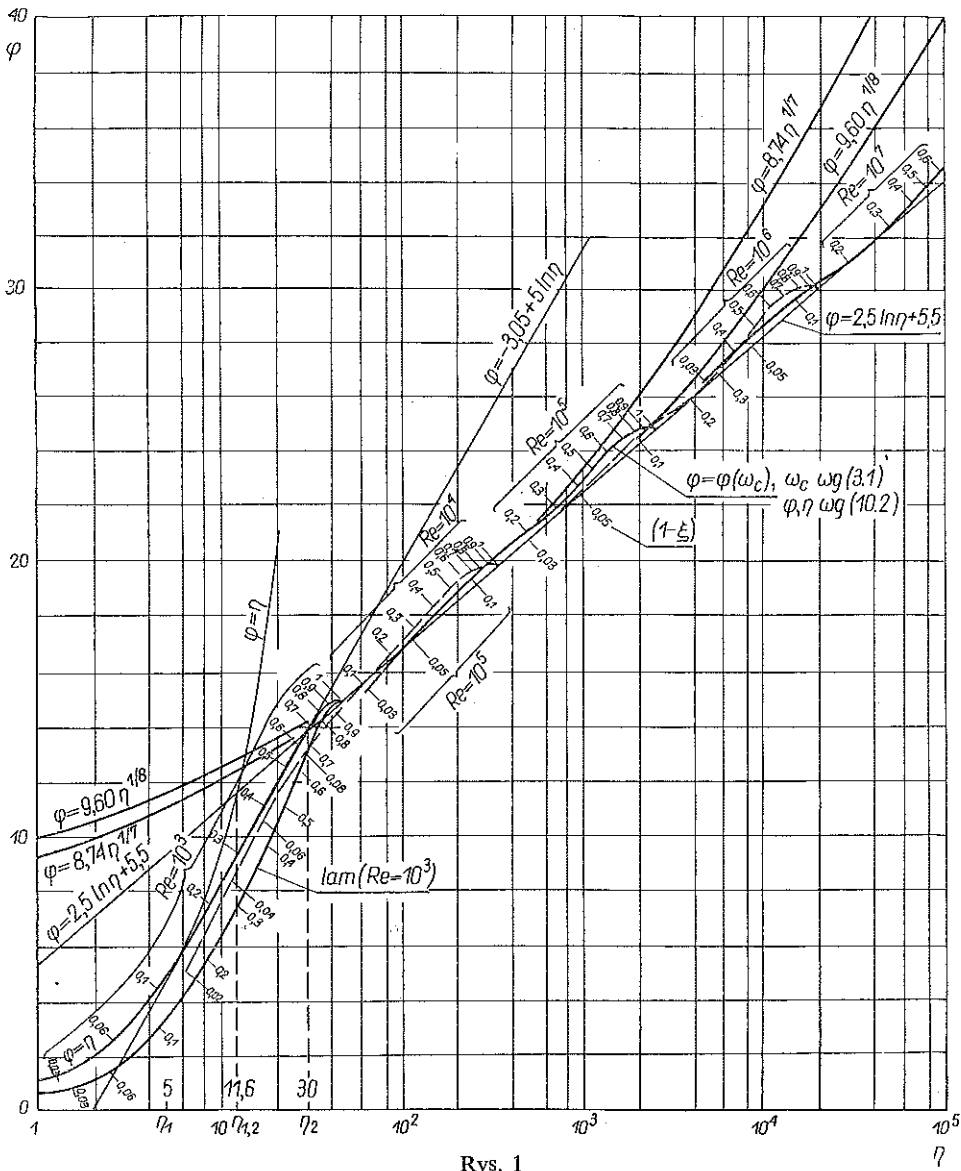
w którym współczynniki spełniać muszą zależności wynikające z warunków brzegowych

$$(3.2) \quad \sum_{n=2}^N a_n = 1, \quad \sum_{n=2}^N n a_n = -\frac{\varrho_0}{\varphi_c},$$

gdzie oznaczono

$$(3.3) \quad \varrho_0 = \frac{1}{2} \text{Re}' = \frac{1}{2} \text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}}, \quad \varphi_c = 2,5 \ln \varrho_0 + 5,5,$$

przyjmując tym samym przybliżone określenie dla prędkości w osi wg profilu bezwymiarowego prędkości nad płaską ścianką.

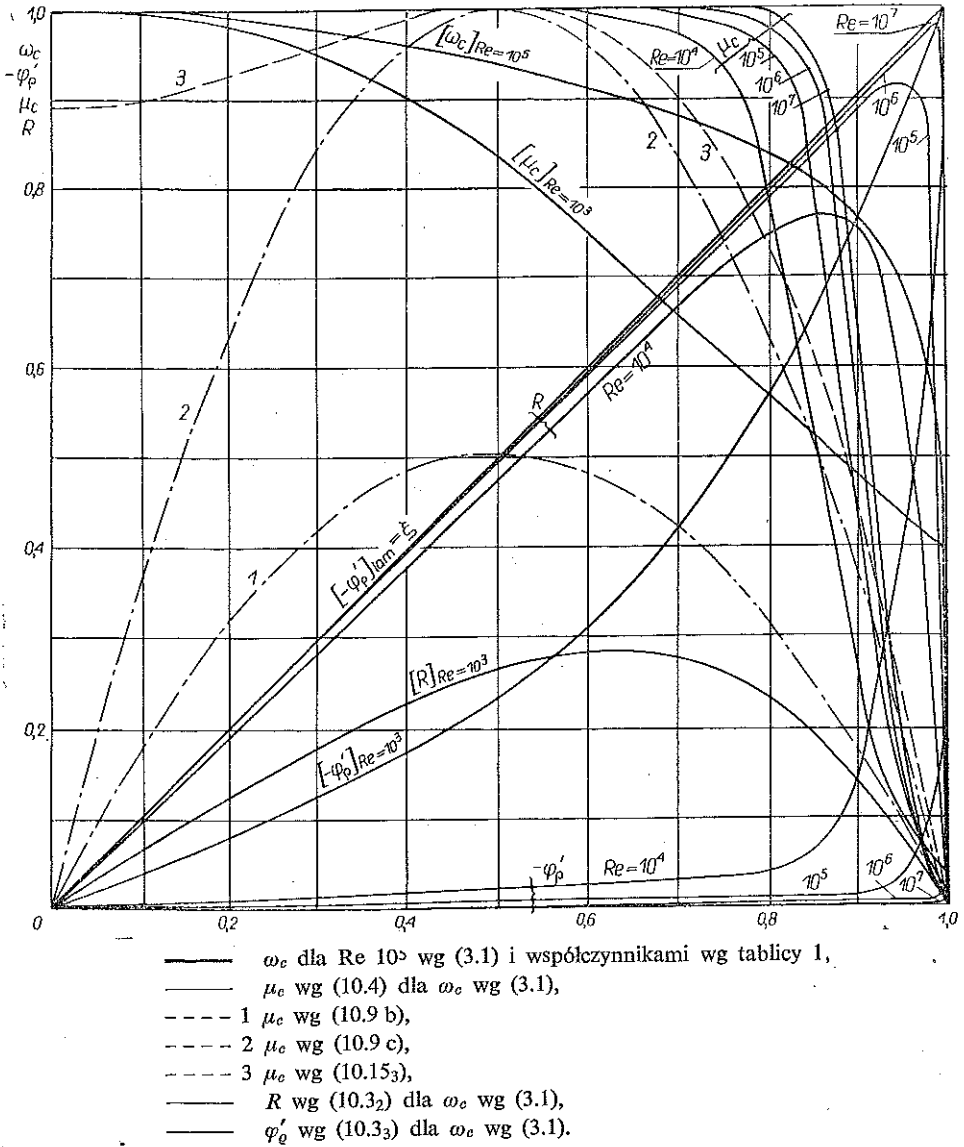


Rys. 1

Dla przykładu dobrano współczynniki dla kilku wybranych wartości Re.

Tablica 1

lg Re	3	4	5	6	7
a_2	0,62	0,33	0,25	0,21	0,18
a_k	0,38	0,50	0,42	0,32	0,23
a_p	—	0,17	0,33	0,47	0,59
k	5	20	30	32	34
p	—	30	248	1326	7630



Rys. 2

Charakterystyczne jest przy dobranych współczynnikach, że wszystkie współczynniki a_n są dodatnie, ilość wyrazów ograniczona do trzech, wysokie wykładniki przy ξ zapewniają istnienie pochodnych wysokiego rzędu (jak się okaże dalej potrzebne będą do trzeciego rzędu włącznie), profil prędkości jest opisany przez jedną funkcję dla całego przedziału ξ ; zapewniona jest również ciągłość i monotoniczność funkcji i jej pochodnych. Wykładniki dla $Re > 10^3$ są parzyste, co w przypadku poszukiwania rozwiązania w postaci szeregu potęgowego zmniejsza ilość wyrazów w rozwiązaniu. W oparciu o profil prędkości (3.1) można wyprowadzić bardziej precyzyjne od dotychczas znanych określenia dla wielkości charakterystycznych dla przepływu

burzliwego. Żaden ze znanych wzorów [5], aproksymujących profile prędkości wyznaczone doświadczalnie, nie spełniał wszystkich wymagań podstawowych i nie zapewniał tylu dogodności w dalszej analizie. W bilansowym ujęciu, tzn. przy określeniu natężenia przepływu czynnika w rurze, różnice w określeniach analitycznych nie mają większego znaczenia.

Z równania ruchu (2.1) można określić współczynnik burzliwej lepkości ν_T przy wykorzystaniu przyjętego określenia profilu prędkości (3.1):

$$(3.4) \quad M = 1 + \frac{\nu_T}{\nu} = \frac{\xi \omega'_c(1)}{\omega'_c(\xi)} = \frac{\sum_{n=2}^N na_n}{\sum_{n=2}^N na_n \xi^{n-2}},$$

stąd

$$\left[\frac{\nu_T}{\nu} \right]_{\xi=0} = \sup \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right] = \frac{\sum_{n=2}^N na_n}{2a_2} - 1 > 0, \quad \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right]_{\xi=1} = \inf \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right] = \frac{\sum_{n=2}^N na_n}{\sum_{n=2}^N na_n} - 1 = 0.$$

Ze wzrostem ξ lepkość burzliwa ν_T maleje monotonicznie od wartości największej na osi przewodu do zera w pobliżu ścianki. Opis ten jest zgodny z doświadczalnymi danymi między innymi CORCORANA [26]. Przy profilu logarymicznym Kármána otrzymuje się błędny przebieg M , a ν_T/ν osiąga maksimum przy $\xi = 1/2$ i maleje po paraboli drugiego stopnia do wartości ujemnej równej -1 na osi. Analizę opartą na błędnym wykresie M można spotkać w wielu pozycjach literatury np. [12, 14, 6, 9, 20, 21 i 25].

4. Równanie energii ze współczynnikami określonymi za pośrednictwem przyjętego potęgowego profilu prędkości

Równanie (2.2) po przekształceniach, wykorzystujących zależności z p. 2 i 3, przyjmuje postać

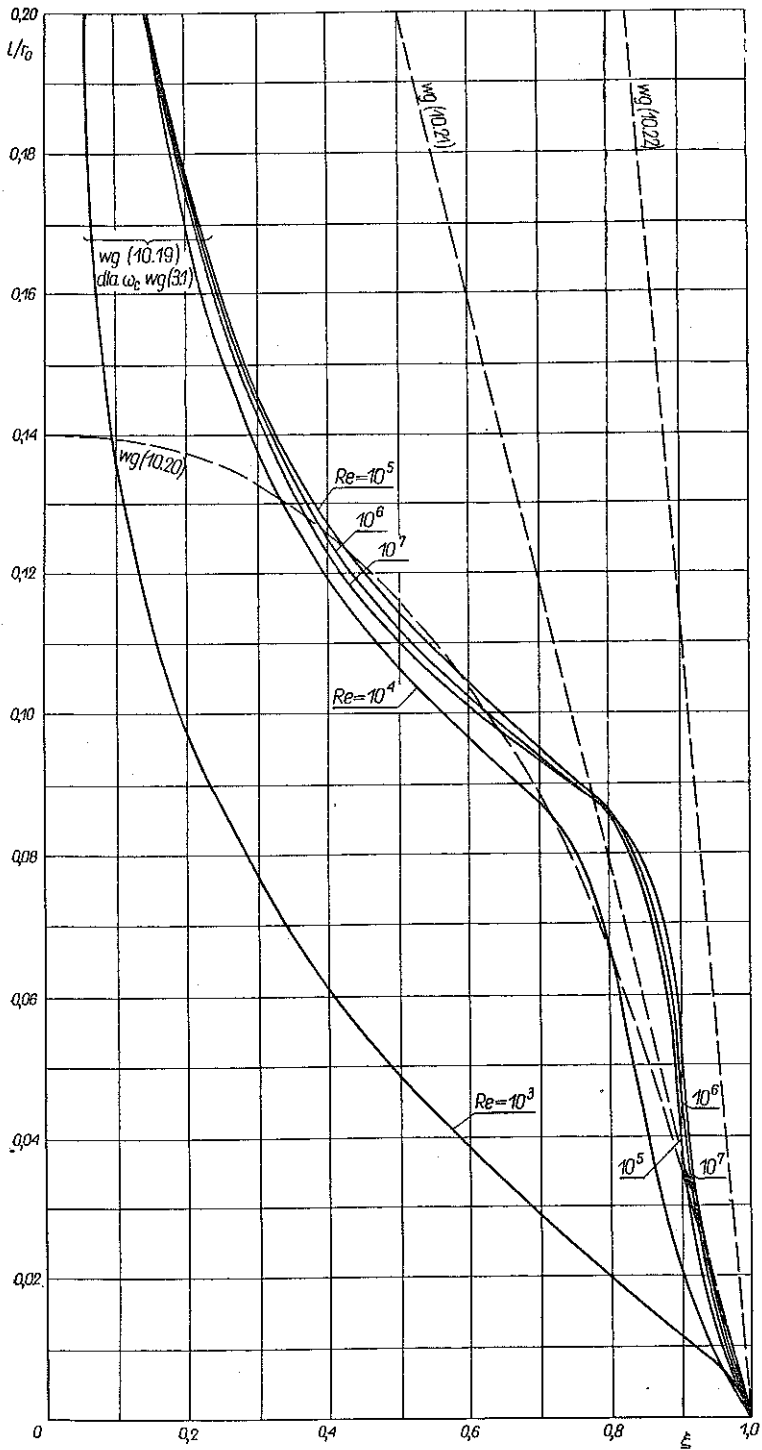
$$(4.1) \quad \frac{\partial \vartheta(\xi, \zeta)}{F \partial \zeta} = \frac{1}{\gamma(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[k(\xi) \frac{\partial \vartheta(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right]$$

z warunkami brzegowymi:

$$(4.2) \quad \vartheta(\xi, 0) = \vartheta_c = 1, \quad \vartheta(1, \zeta) = \vartheta_0 = 0 \quad (\text{dla } \zeta > 0), \quad \frac{\partial \vartheta(0, \zeta)}{\partial \xi} = 0, \\ \vartheta(0, \zeta) \neq \infty,$$

gdzie

$$(4.3) \quad k(\xi) = \xi A(\xi) = \xi \left[1 + \text{Pr}' \frac{\nu_T}{\nu} \right] = \xi \left[1 + \text{Pr}' \left(\frac{\xi \omega'_c(1)}{\omega'_c(\xi)} - 1 \right) \right], \quad \bar{t} = \vartheta [1^\circ\text{C}], \\ A(\xi) = 1 + \frac{a_T}{a} = \text{Pr}'(\varepsilon + M) = 1 + \text{Pr}' \frac{\nu_T}{\nu}, \quad \varepsilon = \frac{1 - \text{Pr}'}{\text{Pr}'}, \quad \text{Pr}' = \varepsilon_T \text{Pr},$$

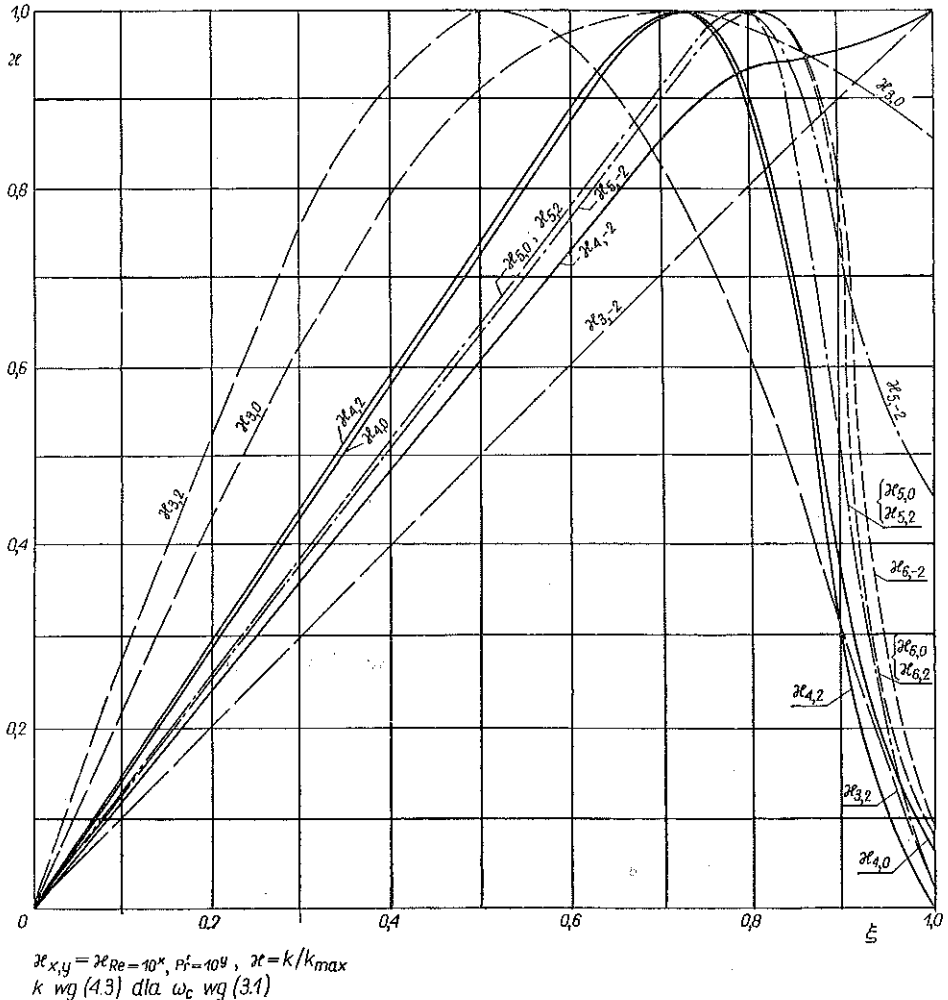


Rys. 3

$$\gamma(\xi) = \xi \omega_c(\xi), \quad F = \frac{2}{Pe} \frac{\varphi_m}{\varphi_c} = \frac{2}{Re Pr'} \frac{\varphi_m}{\varphi_c} \varepsilon_T, \quad Pe = Pr Re, \quad \xi = \frac{r}{r_0},$$

$$\zeta = \frac{z}{r_0}.$$

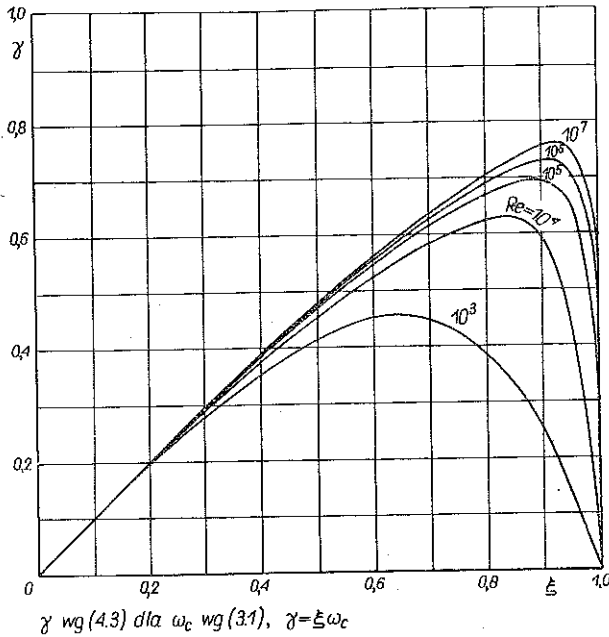
Współczynnik $k(\xi)$ jest zawsze dodatni i większy od zera w całym przedziale $(0, 1)$. Ma to istotne znaczenie dla możliwości rozwiązania równania parabolicznego,



Rys. 4

zapewnia istnienie wartości własnych rzeczywistych dodatnich zgodnie z interpretacją fizyczną rozwiązania. Współczynnik $A(\xi)$ ma wykres podobny do wykresu v_T/v , na osi osiąga wartość największą, maleje do 1 przy ścianie. Gdyby v_T/v było określone za pomocą bezwymiarowego profilu prędkości nad płaską ścianką i na osi osiągało wartość -1 , to przy $Pr' > 1$ współczynnik $k(\xi)$ osiągałby wartość ujemną. Wówczas nawet w metodzie całkowej, przyjmowanej w równaniach analogii, dla zrównowa-

żenia bilansu konieczne jest wprowadzenie silnie wzrastających funkcji przy ścianie (MURPHREE rzędu y^3 , LEWICZ, KUTATIELADZE rzędu y^4 , REICHARD rzędu y^5 , gdzie y jest odległością od ścianki). Nie eliminuje to oczywiście błędów w określaniu pola



Rys. 5

temperatury w kierunku promieniowym. Współczynnik ϵ_T przyjmowany często jako równy 1 ma wpływ na podłużną (w kierunku osi) skalę pola temperatury, w skali poprzecznej jego zmiana odpowiada zmianie wartości Pr. Przy małych $Pr' \ll 1$ błędne określenie ν_T/ν ma wpływ niewielki na współczynnik $k(\xi)$. Liczba $Pr' \ll 1$ odnosi się do płynnych metali. Na trudności w rozwiązaniu równania (4.1) przy profilu prędkości logarytmicznym, jak w przypadku przepływu nad płaską ścianką i przy $Pr' > 1$, natrafili SLEICHER i TRIBUS [25], lecz nie potrafili podać przyczyny; rozwiązywali oni równanie (4.1) na maszynie analogowej przy współczynniku $k(\xi)$ określonym za pomocą profilu logarytmicznego, wykorzystywanym również przez DÉSSLERA [45]. Dla rdzenia burzliwego otrzymuje się wówczas

$$(4.4) \quad M = 1 + \frac{\nu_T}{\nu} = 0,2 \operatorname{Re}' \xi (1 - \xi), \quad \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right]_{\xi=0} = -1, \quad A(0) = 1 - Pr'$$

i dla $Pr' > 1$, $k(\xi)$ przyjmuje wartości ujemne przy ξ zmierzającym do zera.

5. Rozwiązanie ogólne równania energii

Stosując metodę Fouriera [30–32] rozdzielenia zmiennych do równania (4.1) otrzymuje się rozwiązanie w postaci

$$(5.1) \quad \vartheta(\xi, \zeta) = \sum_n C_n R_n(\xi) \exp[-\beta_n^2 F \zeta].$$

Funkcje własne $R_n(\xi)$ i wartości własne β_n^2 wyznacza się z równania

$$(5.2) \quad [k(\xi) R_n'(\xi)]' + \beta_n^2 \gamma(\xi) R_n(\xi) = 0$$

z warunkami $R_n(1) = 0$, $R_n'(0) = 0$.

Stałe C_n wyznacza się z warunku (4.2₁), korzystając z ortogonalności funkcji własnych $R_n(\xi)$, [31] z wagą $\gamma(\xi)$:

$$(5.3) \quad C_n = \frac{1}{N_n} \int_0^1 \gamma(\xi) R_n(\xi) d\xi, \quad N_n = \int_0^1 \gamma(\xi) R_n^2(\xi) d\xi.$$

Rozwiązanie równania (5.2) przedstawia problem STURMA-LIOUVILLE'A [31-35], występujący często w różnych zagadnieniach fizycznych.

6. Rozwiązanie ogólne problemu Struma-Liouville'a dla równania energii

Równanie (5.2) przez podstawienie

$$(6.1) \quad R_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{k(\xi)}} P_n(\xi)$$

sprowadza się do postaci

$$(6.2) \quad P_n''(\xi) + [\beta_n^2 f_1(\xi) + f_2(\xi)] P_n(\xi) = 0$$

z warunkami brzegowymi $P(0) = 0$, $P(1) = 0$,

gdzie

$$f_1(\xi) = \frac{\gamma}{k} = \frac{(1 - \xi^2) W_1(\xi)}{A(\xi)} = (1 - \xi^2) W_2(\xi).$$

W_1 przy przyjętym profilu prędkości (3.1) i z dobranymi współczynnikami dla $\lg \text{Re} = 3, (1), 7$ jest równe

$$W_1(\xi) = \begin{cases} 1 + a_5 \xi^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{1 + \xi} \right) & \text{dla } \text{Re} = 10^3, \\ 1 + a_k \xi^2 \sum_{n=0}^{\frac{k}{2}-2} \xi^{2n} + a_p \xi^2 \sum_{n=0}^{\frac{p}{2}-2} \xi^{2n} & \text{dla } \text{Re} \geq 10^4. \end{cases}$$

Pozostałe funkcje są określone przez:

$$W_2(\xi) = \frac{W_1(\xi)}{A(\xi)}, \quad A(\xi) = 1 + \text{Pr}' \left[\frac{\xi \omega_c'(1)}{\omega_c'(\xi)} - 1 \right],$$

$$f_2(\xi) = \frac{1}{4k^2} [3k' - 2k'^2 - 2kk''] = \frac{W_3(\xi)}{4\xi^2 A(\xi)^2} = \frac{W_4(\xi)}{4\xi^2},$$

$$W_3(\xi) = 3k' - 2k'^2 - 2kk'', \quad k = \xi \left[1 + \text{Pr}' \left(\frac{\omega'_c(1)}{\frac{\omega'_c(\xi)}{\xi}} - 1 \right) \right],$$

$$k' = 1 + \text{Pr}' \left[\frac{\omega'_c(1)}{\frac{\omega'_c(\xi)}{\xi}} - 1 \right] + \frac{\text{Pr}' \omega'_c(1)}{\left(\frac{\omega'_c(\xi)}{\xi} \right)^2} \left[\frac{\omega'_c}{\xi} - \omega'' \right],$$

$$k'' = 2\text{Pr}' \omega'_c(1) \left\{ \frac{1}{\frac{\omega'_c(\xi)}{\xi}} \left(\frac{\omega'_c}{\xi} - \omega'' \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_c'''}{\left(\frac{\omega'_c(\xi)}{\xi} \right)^2} \right\}, \quad W_4(\xi) = \frac{W_3(\xi)}{A(\xi)^2}.$$

Równanie (6.2) przez zmianę zmiennej zależnej ξ na η wg zależności

$$\eta(\xi) = \int_0^\xi \sqrt{f_1(\xi)} d\xi, \quad \xi = \xi(\eta)$$

sprowadza się do postaci

$$(6.3) \quad P''(\eta) + [\beta^2 + f_3(\eta)] P(\eta) = 0$$

z warunkami brzegowymi $P(0) = 0$, $P(\eta_1) = 0$, gdzie

$$\eta_1 = \eta(1),$$

$$f_3(\eta) = \frac{1}{4\xi^2(\eta) [1 - \xi^2(\eta)]} \cdot \frac{W_3[\xi(\eta)]}{A[\xi(\eta)] W_1[\xi(\eta)]} = \frac{W_5[\xi(\eta)]}{4\xi^2(\eta) [1 - \xi^2(\eta)]},$$

$$W_5[\xi(\eta)] = \frac{W_3[\xi(\eta)]}{A[\xi(\eta)] W_1[\xi(\eta)]}.$$

Równanie (6.3) po uwzględnieniu warunków brzegowych sprowadza się do postaci równania całkowego (Fredholma-Volterry) [32, 34 i 37]:

$$(6.4) \quad P(\eta) = \int_0^{\eta_1} K^{(1)}(\eta, \tau) P(\tau) d\tau + \int_0^\eta K^{(2)}(\eta, \tau) P(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$K^{(1)}(\eta, \tau) = \frac{\sin \beta \eta}{\beta \sin \beta \eta_1} \sin \beta(\eta - \tau) f_3(\tau),$$

$$K^{(2)}(\eta, \tau) = -\frac{1}{\beta} \sin \beta(\eta - \tau) f_3(\tau).$$

Rozwiązanie równania (mając na uwadze możliwość wykorzystania maszyn matematycznych cyfrowych) sprowadza się do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych [36, 38]. W tym celu dzieli się przedział $[0, \eta_1]$ na $n+1$ części i oblicza się jako funkcje zależne od β wartości:

$$P(p\Delta\eta) = P_p, \quad \left(\Delta\eta = \Delta\tau = \frac{\eta_1}{n+1} \right), \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

$$\begin{aligned}
 P(q\Delta\tau) &= P_q, & q &= 1, 2, \dots, n, \\
 K^{(1)}(p\Delta\eta, q\Delta\tau) &= K_{pq}^{(1)}, & p, q &= 1, 2, \dots, n, \\
 K^{(2)}(p\Delta\eta, q\Delta\tau) &= K_{pq}^{(2)}, & \begin{cases} p = 1, 2, \dots, n, \\ q = 1, 2, \dots, p. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Całki zastępuje się sumami

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\eta_1} K^{(1)}(\eta, \tau) P(\tau) d\tau &= \sum_{q=1}^n K_{pq}^{(1)} P_q \Delta\tau, & p &= 1, 2, \dots, n; \\
 \int_0^{\eta} K^{(2)}(\eta, \tau) P(\tau) d\tau &= \sum_{q=1}^p K_{pq}^{(2)} P_q \Delta\tau, & p &= 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (6.4) staje się równoważne rozwiązaniu układu równań algebraicznych

$$(6.5) \quad P_p = \sum_{q=1}^n K_{pq}^{(1)} P_q \Delta\eta + \sum_{q=1}^p K_{pq}^{(2)} P_q \Delta\eta, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Wartości własne β_n wyznacza się jako miejsca zerowe następującego wyznacznika:

$$(6.6) \quad \begin{vmatrix} 1 & -K_{12}^{(1)} \Delta\eta & -K_{13}^{(1)} \Delta\eta & \dots & -K_{1n}^{(1)} \Delta\eta \\ -[K_{21}^{(1)} + K_{21}^{(2)}] \Delta\eta & 1 & -K_{23}^{(1)} \Delta\eta & \dots & -K_{2n}^{(1)} \Delta\eta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -[K_{n1}^{(1)} + K_{n1}^{(2)}] \Delta\eta & -[K_{n2}^{(1)} + K_{n2}^{(2)}] \Delta\eta & -[K_{n3}^{(1)} + K_{n3}^{(2)}] \Delta\eta & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Z uwagi na występowanie β_n w funkcjach $\sin \beta_n$ i $\sin \beta_n (\eta - \tau)$ rozwijających się w szereg nieskończony ilość wartości własnych β_n jest nieskończenie wielka. Przyjmując za β_n kolejno wartości większe od zera i obliczając za każdym razem wartość wyznacznika otrzymuje się funkcję zmiennej niezależnej β_n ; miejsca zerowe tej funkcji są poszukiwanymi wartościami własnymi. Przyjmując $P_1 = 1$ otrzymuje się z układu równań (6.5) funkcje własne P_p z dokładnością do stałego współczynnika.

Dla równania (6.4) wyprowadza się korzystając ze wzoru rekurencyjnego dla równania całkowego [34], rozwiązanie przybliżone słuszne dla dużych n :

$$(6.7) \quad \beta_n = \frac{(n+1)\pi}{\eta_1} - \frac{1}{(n+1)\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} f_3(\tau) d\tau + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$(6.8) \quad \begin{aligned}
 P_n(\eta) &= \sin \frac{(n+1)\pi\eta}{\eta_1} - \frac{1}{(n+1)\pi} \left[\eta \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\eta_1} f_3(\tau) d\tau - \right. \\
 &\quad \left. - (\eta_1 - \eta) \frac{1}{2} \int_0^{\eta} f_3(\tau) d\tau \right] \cos \frac{(n+1)\pi\eta}{\eta_1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Rozwiązania równania (6.3), tj. funkcje $P(\eta)$, można poszukiwać również za pomocą maszyny analogowej. W szczególności dla porównania, gdy $f_3(\eta) = 1/4\eta^2$, [34, 39–41 i 43] otrzymuje się rozwiązanie w postaci $P_n(\eta) = \sqrt{\eta} J_0(\mu_n \eta)$, gdzie $J_0(\mu_n \eta)$ jest funkcją Bessela rzędu zerowego pierwszego rodzaju, a $\beta_n = \mu_n$ są miejscami zerowymi $J_0(\mu)$.

7. Przypadek zmiennej osiowo-symetrycznie temperatury ścianki

Rozważany przypadek stałej temperatury ścianki stanowi podstawę do wyznaczenia rozwiązania ogólniejszego, gdy temperatura ścianki zmienia się osiowo-symetrycznie.

Z rozwiązania (5.1) spełniającego warunki brzegowe $\vartheta_c = 1$, $\vartheta_0 = 0$ otrzymuje się natychmiast rozwiązanie spełniające warunki brzegowe $t_{11}(\xi, 0) = 0$ i $t_{11}(1, \zeta) = 1$

$$(7.1) \quad t_{11}(\xi, \zeta) = 1 - \vartheta(\xi, \zeta) = 1 - \sum_n C_n R_n(\xi) V_n(\zeta),$$

gdzie

$$V_n(\zeta) = \exp[-\beta_n^2 F \zeta].$$

Z warunku początkowego wynika, że $\sum_n C_n R_n(\xi) = 1$. Korzystając ze wzoru Duhamela [30] dla uwzględnienia zmiennej temperatury ścianki $\psi(\zeta)$ przy założeniu, że $\psi(0) = 0$, otrzymuje się

$$(7.2) \quad t(\xi, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\zeta \psi(\tau) t_{11}(\xi, \zeta - \tau) d\tau = \\ = \int_0^\zeta \psi(\tau) t'_{11;\zeta}(\xi, \zeta - \tau) d\tau = \int_0^\zeta \psi'_\zeta(\zeta - \tau) t_{11}(\xi, \tau) d\tau.$$

Gdy ponadto dla $\zeta = 0$ dany jest profil $\Phi_1(\xi)$ spełniający warunek $\Phi_1(0) = 0$, natomiast dla $\xi = 1$ dana jest temperatura ścianki $\psi = \psi_c + \psi_1(\zeta)$, gdzie $\psi_c = \text{const}$, a $\psi_1(\zeta)$ spełnia warunek $\psi_1(0) = 0$, rozwiązanie posiada postać

$$(7.3) \quad \Delta t(\xi, \zeta) = \psi(\zeta) - t(\xi, \zeta) = \sum_n R_n(\xi) \tau_n(\zeta),$$

gdzie

$$(7.4) \quad \tau_n(\zeta) = \left[\psi_c + T_n(\zeta) V_n^{-1}(\zeta) - \frac{D_n^{(\Phi_1)}}{C_n} \right] C_n V_n(\zeta), \\ T_n(\zeta) = \psi_1(\zeta) - \int_0^\zeta \frac{\partial \psi_1(\zeta - \tau)}{\partial \zeta} [1 - V_n(\tau)] d\tau = \psi_1(\zeta) + \\ + \int_0^\zeta \psi_1(\tau) V'_{n;\zeta}(\zeta - \tau) d\tau,$$

$$V_n(\zeta) = \exp[-\beta_n^2 F \zeta], \quad C_n = \frac{1}{N_n} \int_0^1 \gamma(\xi) R_n(\xi) d\xi,$$

$$D_n^{(\Phi)} = \frac{1}{N_n} \int_0^1 \gamma(\xi) \Phi_1(\xi) R_n(\xi) d\xi, \quad N_n = \int_0^1 \gamma(\xi) R_n^2(\xi) d\xi.$$

Na przykład dla $\Phi = 0$ i $\psi = \psi_c$ otrzymuje się $\Delta t(\xi, \zeta) = \psi_c \sum_n C_n R_n(\xi) V_n(\zeta)$.

Jeśli $\Phi = 0$, $\psi = \psi_1(\zeta)$ oraz $\psi_1(0) = 0$, to $\Delta t(\xi, \zeta) = \sum_n C_n R_n(\xi) T_n(\zeta)$, gdy

$$\psi_1 = B\zeta, \quad T_n(\zeta) = \frac{B}{F\beta_n^2} [1 - \exp(-\beta_n^2 F\zeta)],$$

$$\psi_1 = B\zeta^2, \quad T_n(\zeta) = \frac{2B}{F\beta_n^2} \left\{ \zeta - \frac{1}{F\beta_n^2} [1 - \exp(-\beta_n^2 F\zeta)] \right\},$$

(7.5)

$$\psi_1 = \exp B\zeta - 1, \quad T_n(\zeta) = \frac{B}{B + F\beta_n^2} \{ \exp[B\zeta] - \exp[-\beta_n^2 F\zeta] \},$$

$$\psi_1 = \sin B\zeta, \quad T_n(\zeta) = \frac{B}{\sqrt{B^2 + F^2 \beta_n^4}} \sin \left[B\zeta + \arctg \frac{F\beta_n^2}{B} \right] - \frac{F\beta_n^2 B}{F^2 \beta_n^4 + B^2} \exp[-\beta_n^2 F\zeta].$$

W ostatnim wzorze $\arctg F\beta_n^2/B$ jest określony w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.

8. Zależności oparte na rozwiązaniu równania energii i bilansach cieplnych dla odcinka przewodu

Średnia temperatura strumienia $t(m, \zeta)$ wyznaczona jest równaniem

$$(8.1) \quad \Delta t(m, \zeta) = \psi(\zeta) - t(m, \zeta) = \sum_n C_n R_n(m) \left[\psi_c - \frac{D_n}{C_n} + T_n(\zeta) V_n^{-1}(\zeta) \right] V_n(\zeta);$$

gradient temperatury przy ścianie przez równanie

$$(8.2) \quad \frac{\partial t(1, \zeta)}{\partial \xi} = - \frac{\partial [\Delta t(1, \zeta)]}{\partial \xi} = \sum_n C_n [-R'_n(1)] \left[\psi_c - \frac{D_n}{C_n} + T_n(\zeta) V_n^{-1}(\zeta) \right] V_n(\zeta).$$

Stosunek podwójnego gradientu temperatury przy ścianie do średniej temperatury strumienia nazywany lokalną liczbą Nusselta:

$$(8.3) \quad \text{Nu}(m\xi) = \frac{2 \frac{\partial t(1, \xi)}{\partial \xi}}{\Delta t(m\xi)} = \frac{2 \sum_n C_n [-R'_n(1)] \left[\psi_c - \frac{D_n}{C_n} + T_n(\xi) V_n^{-1}(\xi) \right] V_n(\xi)}{\sum_n C_n R_n(m) \left[\psi_c - \frac{D_n}{C_n} + T_n(\xi) V_n^{-1}(\xi) \right] V_n(\xi)}$$

Pomiędzy $R_n(m)$ i $R'_n(1)$ ustala się korzystając z równania energii (4.1) zależność

$$(8.4) \quad R_n(m) = 2 \frac{\varphi_c}{\varphi_m} \int_0^1 \gamma(\xi) R_n(\xi) d\xi = 2 C_n N_n \frac{\varphi_c}{\varphi_m} = \frac{2}{\beta_n^2} [-R'_n(1)] \frac{\varphi_c}{\varphi_m}$$

Gdy w (8.3) rozwiązanie można ograniczyć do $n = 0$, co jest dopuszczalne w pewnej odległości za skokiem temperatury na ścianie, otrzymuje się wartość asymptotyczną dla liczby Nusselta Nu_a (po uwzględnieniu 8.4):

$$(8.5) \quad \text{Nu}_a = \frac{2 [-R'_0(1)]}{R_0(m)} = \frac{\varphi_m}{\varphi_c} \beta_0^2$$

Równanie energii (4.1) przedstawia równanie bilansu dla elementarnego walca o promieniu r i długości dz , tj. porównanie ilości ciepła przechodzącego przez cylindryczną powierzchnię kontrolną z ilością ciepła przejętego przez czynnik przepływający wewnątrz tego cylindra (z pominięciem przewodnictwa w kierunku osiowym).

Z równania bilansu dla walca o promieniu r_0 i długości dz otrzymuje się zależność pomiędzy natężeniem strumienia ciepłego przy ścianie $q_0(\xi)$ i średnią temperaturą strumienia:

$$(8.6) \quad q_0(\xi) \frac{2r_0}{\lambda} \equiv 2 \frac{\partial t(1, \xi)}{\partial \xi} = \frac{dt(m, \xi)}{\frac{2}{\text{Pe}} d\xi} \equiv \left[\frac{\partial t(\xi, \zeta)}{\frac{2}{\text{Pe}} \partial \zeta} \right]_{(m, \xi)}$$

Po scałkowaniu od 0 do ξ i obliczeniu średniego natężenia strumienia ciepłego $q_0(m)$ w przedziale $[0, \xi]$ znajduje się

$$(8.7) \quad q_0(m) \frac{2r_0}{\lambda} \xi \frac{2}{\text{Pe}} \equiv \frac{2r_0}{\lambda} \frac{2}{\text{Pe}} \int_0^\xi q_0(\zeta) d\zeta = t(m, \xi) - t(m, 0)$$

Liczba Nusselta wobec powyższych zależności wyraża się przez $t(m, \xi)$:

$$(8.8) \quad \text{Nu}(m, \xi) \equiv \frac{2 \frac{\partial t(1, \xi)}{\partial \xi}}{\psi(\xi) - t(m, \xi)} = \frac{dt(m, \xi)}{[\psi(\xi) - t(m, \xi)] d\xi \frac{2}{\text{Pe}}}$$

skąd wynika przy założeniu $Nu(m, \zeta) = \text{const}$ na odcinku ζ i $\psi(\zeta) = t_0 = \text{const}$

$$(8.9) \quad t(m, \zeta) - t(m, 0) = [t_0 - t(m, 0)] [1 - \exp(-2 \text{St} \zeta)],$$

gdzie $\text{St} = \text{Nu}/\text{Pe}$ jest liczbą Stanton'a.

Gdy $t(m, 0) = 0$, $t_0 - t(m, 0) = 1$, to otrzymuje się średnią temperaturę strumienia:

$$(8.10) \quad t_{11}(m, \zeta) = 1 - \exp[-2 \text{St} \zeta].$$

Zależność powyższa może być nazwana prawem zmienności średniej temperatury strumienia przy stałej jednostkowej temperaturze ścianki.

Porównując (8.10) z zależnością teoretyczną (7.1) przy $n = 0$ otrzymuje się przybliżone zależności [ze względu na założenia prowadzące do (8.10)]:

$$(8.11) \quad C_0 R_0(m) \approx 1, \quad \beta_0^2 F = 2 \text{St} = 2 \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}}.$$

Dla przybliżonego oszacowania β_0^2 można wykorzystać wzory empiryczne dla Nu w postaci potęgowej. Jeżeli rozwiązanie można ograniczyć do $n = 0$, to dla przybliżonej oceny wystarczy we wzorach w rozdziałach poprzednich uwzględnić zależności (8.11). Ograniczenie do $n = 0$ może być dopuszczalne w przypadku $\psi = \text{const}$ dla dużych ζ , w przekrojach oddalonych od skokowej zmiany temperatury ścianki, a również w przypadku $\psi = \psi_1(\zeta)$, gdy $\psi_1(0) = 0$ dla wszystkich ζ . Gdy w przekroju początkowym nie występuje skok temperatury na ściance, istnieje różnica temperatur ścianki i strumienia, a temperatura ścianki zmienia się dalej wzdłuż ścianki, ponadto jeśli w przekroju początkowym jest znany profil temperatury, to zmiana średniej temperatury strumienia wzdłuż przewodu jest wynikiem superpozycji działania warunków brzegowych ψ_c i $\psi_1(\zeta)$. Wówczas również jest dopuszczalne ograniczenie rozwiązania do $n = 0$.

Dla odcinka początkowego, gdy przyjąć uproszczenia sprowadzające równanie energii do równania Bessela i wykorzystać przybliżone rozwiązania dla małych ζ oraz przyjąć $\Delta t(m, \zeta) \approx \text{const}$, otrzymuje się w przypadku $\psi = \psi_c$ i $\Phi = 0$

$$(8.12) \quad \text{Nu}(m, \zeta) = C \zeta^{-1/2},$$

gdzie stałą C należy dobrać tak, by uzyskać przy małym ζ_0 zgodność z rozwiązaniem dokładnym.

W przypadku $\psi = \psi_1(\zeta) = C_1 \zeta$ i $\Phi = 0$ otrzymuje się

$$(8.13) \quad \Delta t(m, \zeta) \approx C_1 \zeta, \quad \text{Nu}(m, \zeta) \approx C_2 \zeta^{-1/2}.$$

Gdy ζ maleje do zera w przypadku $\psi = \psi_c$, gradient temperatury przy ściance $\partial t(1, \zeta)/\partial \xi$ i $\text{Nu}(m, \zeta)$ wzrastają do ∞ , a $\Delta t(m, \zeta) \approx \text{const}$. Natomiast w przypadku $\psi = C_1 \zeta$, $\partial t(1, \zeta)/\partial \xi$ i $\Delta t(m, \zeta)$ dążą do zera, lecz $\text{Nu}(m, \zeta)$ dąży do ∞ . W przypadku przepływu laminarnego znana jest zależność wg LEVEQUE'A [6] $\text{Nu}(m, \zeta) = 1,357 \zeta^{-1/3}$. Średnia wartość liczby Nusselta na odcinku ζ , $\text{Nu}(m, m)$, jest ograniczona i jeżeli przyjąć dla małych ζ zależności $\text{Nu}(m, \zeta) = B \zeta^{-p}$, to wykładnik p musi być mniejszy od jedności.

9. Rozwiązanie numeryczne równania energii dla przypadku $Re = 10^5$ i $Pr' = Pr = 1$

W celu sprawdzenia postawionego problemu rozwiązano przykładowo równanie (5.2) przy ustalonych parametrach $Re = 10^5$ i $Pr' = 1$. Rozwiązanie przeprowadzono metodą klasyczną rozwinięcia rozwiązania w szereg.

Równanie (5.2) przy powyższych parametrach Re i Pr przyjmuje po rozwinięciu postać

$$(9.1) \quad \xi [1 + d\xi^{m-2} + g\xi^{n-2}] R''(\xi) + \{1 - d(m-3)\xi^{m-2} - g(n-3)\xi^{n-2}\} R'(\xi) + \\ + \mu^2 \xi [1 - a\xi^2 - b\xi^m - c\xi^n] [1 + d\xi^{m-2} + g\xi^{n-2}]^2 R(\xi) = 0,$$

gdzie

$$d = \frac{bm}{2a}, \quad g = \frac{cn}{2a}, \quad \mu^2 = \frac{\beta^2}{1+d+g},$$

przy profilu prędkości wg (3.1)

$$(9.2) \quad \omega_c = 1 - a\xi^2 - b\xi^m - c\xi^n,$$

$$a = 0,25, \quad b = 0,42, \quad c = 0,33, \quad m = 30, \quad n = 248.$$

Warunki brzegowe dla równania (9.1) są następujące:

$$(9.3) \quad R(0) = 1, \quad R(1) = 0, \quad R'(0) = 0.$$

Rozwiązanie przyjęto w postaci

$$(9.4) \quad R(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

W równaniu (9.1) w celu uproszczenia rachunku przyjęto wyrażenie w drugim nawiasie kwadratowym przy $R(\xi)$ równe jedności ze względu na to, że wyrażenie w nawiasie poprzednim zmierza szybko do zera. Pomimo tego uproszczenia obliczenia są bardzo uciążliwe.

Po podstawieniu (9.4) do (9.1) i przyrównaniu współczynników przy tych samych potęgach ξ znajduje się:

$$a_k = -\frac{\mu^2}{k^2} (a_{k-2} - aa_{k-4}), \quad a_{-2} = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_2 = -\frac{\mu^2}{2}, \quad k = 2, 4, \dots, 28,$$

$$(9.5) \quad a_k = -\frac{1}{k^2} \left\{ \mu^2 (a_{k-2} - aa_{k-4}) + \frac{bm}{2a} [(k-m+2)(k-2m+4) a_{k-m+2} - \right. \\ \left. - \mu^2 ba_{k-m-2}] \right\}, \quad k = 30, 32, \dots, 246,$$

$$a_k = -\frac{1}{k^2} \left\{ \mu^2 (a_{k-2} - aa_{k-4}) + \frac{bm}{2a} [(k-m+2)(k-2m+4) a_{k-m+2} - \right. \\ \left. - \mu^2 ba_{k-m-2}] + \frac{cn}{2a} [(k-n+2)(k-2n+4) a_{k-n+2} - \mu^2 ba_{k-n-2}] \right\}, \\ k = 248, 250 \dots$$

W wyrazach a_k , gdy $k \geq 30$, ograniczono wyrażenia do części istotnych, które oznaczono przez podkreślenie. Wyraz a_k posiada postać

$$(9.6) \quad a_k = (-1)^{k/2} \frac{1}{4^{k/2} \left(\frac{k}{2}!\right)^2} \sum_{i=0}^{E(k/4)} a^i \mu^{k-2i} \prod_{j=1}^i \sum_{n_{i-j+4}}^{k-(j-1)4+2i} n_{i-j+1}^2, \quad k=0, \dots, 28,$$

gdzie $E(k/4)$ jest częścią całkowitą ilorazu $k/4$ a $\prod_1^0 = 1$, $n_0 = -2$, $n = 2, 4, 6, \dots$.
Na przykład

$$a_{10} = -\frac{1}{45(5!)^2} \{\mu^{10} + a\mu^8(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) + a^2\mu^6[2^2(6^2 + 8^2) + 4^2 \cdot 8^2]\},$$

$$a_{12} = \frac{1}{46(6!)^2} \{\mu^{12} + a\mu^{10}(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2) + a^2\mu^8[2^2(6^2 + 8^2 + 10^2) + 4^2(8^2 + 10^2) + 6^2 \cdot 10^2] + a^3\mu^6 \cdot 2^2 \cdot 6^2 \cdot 10^2\}.$$

Gdy $a = 0$, wyrazy a_k dla $k = 0, \dots, 28$ przedstawiają współczynniki identyczne ze współczynnikami w funkcji Bessela $J_0(\mu\xi)$ rozwiniętej w szereg. Z warunku brzegowego $R(1) = 0$ otrzymuje się równanie pozwalające wyznaczyć wartości własne μ . Jeżeli przez $\Lambda(\mu)$ oznaczona zostanie funkcja

$$(9.7) \quad \Lambda(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mu),$$

to po przeliczeniu i uporządkowaniu względem μ otrzymuje się

$$(9.8) \quad \Lambda(\mu) = 1 + (-1)^p \sum_{p=1}^{14} \left(\frac{\mu}{h_p}\right)^{2p}.$$

$$h_p = 5,127\,370 + 0,803(p - 6), \quad p = 6, 7, \dots, 14.$$

Miejsca zerowe $\Lambda(\mu)$ wyznaczają wartości własne μ_n .

Tablica 2

p	1	2	3	4	5
h_p	1,088 855	1,884 475	2,713 321	3,518 452	4,324 370

Tablica 3

n	μ_n	μ_n^2	$\beta_n^2 = (1+d+g)\mu_n^2 = 190\mu_n^2$	$\frac{\varphi_m \beta_n^2}{\varphi_c} = 0,848 \beta_n^2$
0	1,1618	1,3497	256	217
1	4,0347	16,2788	3090	2620
2	9,9447	98,8931	18800	16000

Współczynniki a_k we wzorze (10.4) przy powyższych μ_n przyjmują wartości podane w tablicy 4.

Funkcje własne $R_n(\xi)$ wg (9.4) przyjmują wartości zestawione w tablicy 5.

Współczynniki C_n i N_n wg (5.3) i $R'_n(1)$ na podstawie (9.4) zestawiono w tablicy 6.

Tablica 4

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	0	1	2	$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	0	1	2
0	1	1	1	42	—	-0,02674	-1294,05
2	-0,3374	-4,0697	-24,72	44	—	0,003636	616,38
4	0,04955	4,3950	154,35	46	—	-0,0004137	-236,96
6	-0,005021	-2,4473	-440,96	48	—	—	74,52
8	0,0003672	0,9020	741,05	50	—	—	-19,08
10	—	-0,2464	-841,88	52	—	—	2,30
12	—	0,05335	704,99	54	—	—	-0,40
14	—	-0,009549	-462,16	248	-0,4320	-5,2853	-32,10
16	—	0,001455	246,63	250	0,1256	11,1418	391,29
18	—	-0,000193	-110,54	252	-0,01866	-9,0932	-1638,39
20	—	—	42,58	254	0,001774	4,3571	3579,64
22	—	—	14,34	256	—	-1,4523	-4962,21
24	—	—	2,573	258	—	0,3684	4867,82
26	—	—	-0,889	260	—	-0,07510	-3634,61
28	—	—	0,193	262	—	0,01277	2164,15
30	-0,4913	-5,9255	-35,99	264	—	-0,001860	-1065,41
32	0,1268	11,2486	395,04	266	—	—	445,22
34	-0,01445	-7,0421	-1268,86	268	—	—	-161,04
36	0,001142	2,8062	2305,48	270	—	—	30,78
38	—	-0,7740	-2644,60	272	—	—	-11,25
40	—	0,1613	2131,89	274	—	—	2,57

Tablica 5

$\begin{matrix} n \\ \xi \end{matrix}$	0	1	2
0	1	1	1
0,1	0,9962	0,9589	0,7678
0,2	0,9865	0,8440	0,2318
0,3	0,9700	0,6678	-0,2523
0,4	0,9473	0,4517	-0,4019
0,5	0,9188	0,2195	-0,2033
0,6	0,8848	0,0072	0,1196
0,7	0,8458	-0,1815	0,2996
0,8	0,8130	-0,3242	0,6050
0,9	0,7567	-0,3900	0,7225
1,0	0	0	0
$R_n(m)$	0,865	-0,0012	0,268

Tablica 6

n	C_n	N_n	$R'_n(1)$
0	1,1616	0,3162	93,1501
1	-0,0070	0,0713	-16,3523
2	—	—	—

Współczynnik F wg (4.3) dla $\varepsilon_T = 1$ jest następujący:

$$(9.9) \quad F = \frac{2}{\text{Re Pr}'} \frac{\varphi_m}{\varphi_c} \varepsilon_T = \frac{2}{10^5 \cdot 1} \cdot 0,848 \cdot 1 = 1,696 \cdot 10^{-5},$$

$$\beta_0^2 F = 256 \cdot 1,696 \cdot 10^{-5} = 0,00434.$$

Dla $n = 0$ średnia temperatura strumienia wynosi

$$(9.10) \quad \vartheta(m, \zeta) = \vartheta_c C_0 R_0(m) \exp(-\beta_0^2 F \zeta) =$$

$$= 1 \cdot 1,1616 \cdot 0,865 \exp\left(-\frac{2 \cdot 217}{10^5} \zeta\right) = \exp(-0,00434 \zeta).$$

Dla $n = 0$ gradient temperatury strumienia przy ścianie jest równy

$$(9.11) \quad \vartheta'_\xi(1, \zeta) = \vartheta_c C_0 R'_0(1) \exp[-\beta_0^2 F \zeta] =$$

$$= 1 \cdot 1,1616 \cdot 93,1501 \exp\left(-\frac{2 \cdot 217}{10^5} \zeta\right) = 108 \exp(-0,00434 \zeta),$$

a lokalna liczba Nusselta jest równa wartości asymptotycznej Nu_a :

$$(9.12) \quad \text{Nu}(m, \zeta) = -\frac{2\vartheta'_\xi(1, \zeta)}{\vartheta(m, \zeta)} \rightarrow \text{Nu}_a = 216.$$

Na podstawie zależności (9.4) otrzymuje się wzór sprawdzający dokładność obliczeń

$$(9.13) \quad R_n(m) = \frac{-R'_n(1)}{\frac{1}{2} \frac{\varphi_m}{\varphi_c} \beta_n^2}.$$

Dla $n = 0$ lewa strona równania $R_0(m)$ wg tablicy 5 jest równa 0,865, prawa strona wynosi $2 \cdot 93,1501 / 217 = 0,858$, czyli rzeczywiście dokładność jest stosunkowo dobra; przy wyższych n rozbieżność jest jednak większa w wyniku poczynionych uproszczeń rachunkowych, przy czym za mniej dokładne należy uważać $R'_n(1)$.

Ze wzoru empirycznego dla stałej temperatury ścianki

$$(9.14) \quad \text{Nu}(m, m) = \text{Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,4},$$

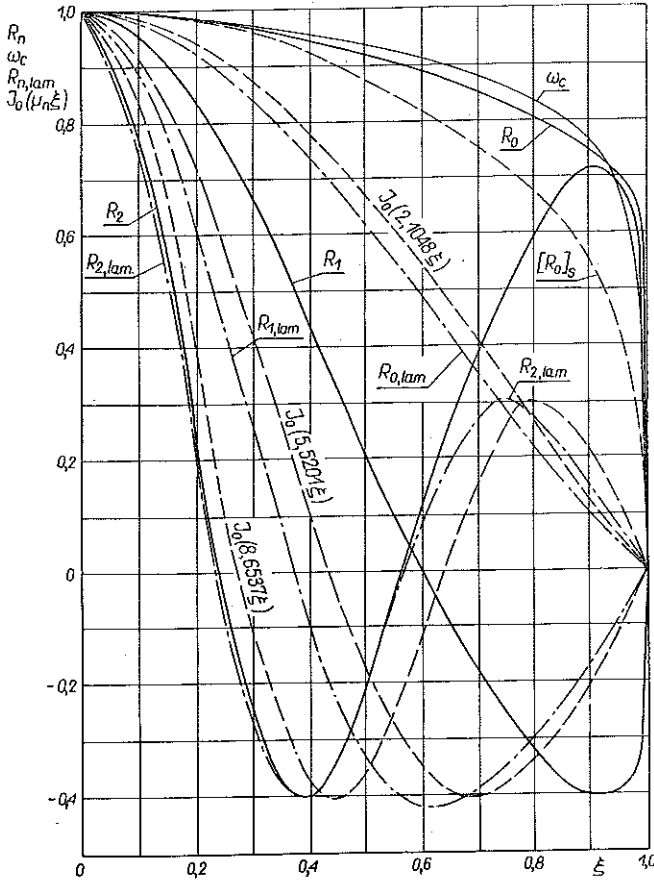
dla $\text{Re} = 10^5$ i $\text{Pr} = 1$ otrzymuje się $\text{Nu} = 230$.

Z równania analogii hydromechanicznej Reynoldsa otrzymuje się

$$(9.15) \quad \text{Nu}(m, m) = \text{Nu} = \frac{f \text{Re}}{2} = \frac{0,00448}{2} \cdot 10^5 = 224.$$

W porównaniu z wartością obliczoną $\text{Nu} = 217$ zgodność jest stosunkowo dobra. Według analogii cieplno-hydromechanicznych w przypadku $\text{Pr} = 1$ profile bezwy-

miarowe (stosunkowe) prędkości i temperatury są podobne, czyli ω_c ma wykres zbliżony do wykresu ϑ , a przy $n = 0$ do R_0 . Porównanie wykresów ω_c i R_0 na rys. 6 potwierdza analogię. Ponadto wobec podobieństwa ω_c i R_0 powinny być podobne



- R_0, R_1, R_2 dla $Re = 10^5, Pr' = 1$ wg (9.4) i danych w tablicy 5, dla ω_c wg (9.2),
 — $R_{1,lam}, R_{2,lam}, R_{3,lam}$, wg danych przytoczonych w pracy [6],
 - - - $J_0(\mu_n \xi)$ funkcje Bessela rzędu zera, pierwszego rodzaju,
 - - - $[R_0]_s$, wg danych w pracy [50], ekstrapolowanych dla $Re = 10^5$ i $Pr' = 1$; $M(\xi)$ w [50] przyjęto wg (10.15),
 — ω_c , dla $Re = 10^5$, wg (3.1) i danych w tablicy 1.

Rys. 6

ich pochodne na osi i przy ścianie. Na osi pochodne te są równe zero, a przy ścianie $-\omega'_c(1) = 2a + mb + nc = 95$, a $-R'_0(1) = 93,15$. Zgodność jest również stosunkowo duża. Porównując numeryczne rozwiązanie analityczne z przybliżonym rozwią-

zaniem (8.9) przy tych samych warunkach brzegowych spełniać się powinny zależności (8.11):

$$(9.16) \quad \begin{aligned} C_0 R_0(m) &= 1,1616 \cdot 0,865 = 1,002 \approx 1, \\ \beta_0^2 F &= 0,00434, \\ 2St &= 2 \frac{Nu_{emp}}{Pe} \approx \frac{2}{10^5} 224 \approx 0,00448. \end{aligned}$$

Z porównania wynika, że rzeczywiście $\beta_0^2 F \approx 2St$ i $C_0 R_0(m) \approx 1$.

10. Określenia wielkości hydromechanicznych

Charakterystyczne wielkości z hydromechaniki przepływu burzliwego mogą być określone jako funkcje przyjętego profilu prędkości (3.1) i jego pochodnych. Pozwala to prześledzić wykresy tych funkcji w całym zakresie ξ i porównać je z odpowiednimi wykresami przy innych określeniach profilu prędkości (np. logarytmicznym dla trzech obszarów strumienia) lub innymi wykresami wg wzorów bezpośrednich różnych autorów.

Równanie ruchu (2.1) dla ustalonego przepływu burzliwego cieczy w rurze można przedstawić w postaci

$$(10.1) \quad \frac{\tau}{\tau_0} = -M \frac{d\varphi}{d\varrho}.$$

Współczynnik M zgodnie z (3.4) oznacza sumę $1 + \nu_T/\nu$. Z równania ruchu wyznacza się współczynnik M jako równy ξ/φ'_ϱ , gdzie φ'_ϱ oznacza pochodną bezwymiarowej prędkości (oznaczonej w literaturze również przez u^+) względem bezwymiarowej odległości od osi ϱ (oznaczanej w literaturze przez r^+). W równaniu (10.1) τ oznacza naprężenie styczne w strumieniu w odległości ξ od osi, τ_0 naprężenie styczne przy ścianie. Z równania (10.1) wynika, że $\tau = \xi\tau_0$. Definicyjne równości dla bezwymiarowych wielkości i naprężeń stycznych mają postać:

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_m \omega = \varphi_c \omega_c, & \varrho &= \xi \varrho_0, & \tau &= \tau_L + \tau_T = \xi \tau_0, \\ \varphi_m &= \frac{Re}{Re'}, & \varrho_0 &= \frac{Re'}{2}, & \tau_L &= -\varphi'_\varrho \tau_0, \\ Re' &= \sqrt{\frac{f}{2}} Re, & \eta &= \varrho_0 - \varrho, & \tau_T &= R\tau_0, \\ \omega &= \frac{\bar{v}_z}{v_{zm}}, & v^* &= \frac{\bar{v}_z}{v_{zm}} \frac{Re'}{Re}, & \tau_0 &= \varrho_g v^{*2}, \\ \omega_c &= \frac{\bar{v}_z}{v_{zc}}, & M &= \frac{\xi}{-\varphi'_\varrho}, & R &= \frac{\bar{V}_z \bar{V}_r}{v^{*2}} = \xi + \varphi'_\varrho. \end{aligned}$$

W powyższych równaniach oznaczono przez v^* tzw. «prędkość naprężenia stycznego», $\bar{V}_z \bar{V}_r$ uśrednioną korelację z odchyłek prędkości chwilowych od wartości

średnich, występującą w równaniu ruchu po uśrednieniu wg reguł Reynoldsa, ρ_f gęstość cieczy, f współczynnik tarcia Fanninga, φ_m bezwymiarową średnią prędkość, τ_L naprężenie styczne pochodzące od lepkości molekularnej, τ_T naprężenie styczne pochodzące od lepkości burzliwej ν_T i R bezwymiarowe naprężenie styczne Reynoldsa.

Charakterystyczne wielkości dla przepływu burzliwego cieczy lepkiej w przewodzie rurowym w zależności od stosunkowej prędkości ω_c i stosunkowej odległości ξ od osi przewodu przyjmują postać

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \tau_L &= \frac{\omega'_c(\xi)}{\omega'_c(1)} \tau_0, & R &= \xi - \frac{\omega'_c(\xi)}{\omega'_c(1)}, & -\varphi'_c &= \frac{\omega'_c(\xi)}{\omega'_c(1)}, \\ \tau_T &= \left[\xi - \frac{\omega'_c(\xi)}{\omega'_c(1)} \right] \tau_0, & M &= \frac{\xi \omega'_c(1)}{\omega'_c(\xi)}, & \frac{\nu_T}{\nu} &= \frac{\xi \omega'_c(1)}{\omega'_c(\xi)} - 1. \end{aligned}$$

Wartości niektórych wielkości w zależności od liczby Reynoldsa zestawiono w tablicy 7. Wartości współczynnika f dla $Re \geq 10^4$, obliczone wg wzoru Nikuradsego, przytoczono wg pracy [6], str. 173, wartości φ_c obliczono wg wzoru (3.32). Dla $Re = 10^3$ ekstrapolowano dla φ wzory dotyczące przepływu burzliwego, tj. słuszne dla $Re > 2300$.

Tablica 7

Re	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
f	0,016	0,00772	0,00448	0,00291	0,00204
ϱ_0	44,7	310,5	2367,5	19090	160000
φ_c	14,97	19,8	24,9	30,2	35,5
φ_m/φ_c	0,78	0,81	0,85	0,89	0,90

Dla wykazania wpływu postaci funkcji ω_c , a w szczególności jej pochodnych na wykresy funkcji (10.3) dogodnie jest posługiwać się stosunkowymi współczynnikami, odnoszonymi do wartości największych w rozpatrywanym przedziale. Wprowadzono więc współczynnik μ_c wg definicji

$$(10.4) \quad \mu_c(\xi) = \frac{M}{M_{\text{sup}}}.$$

Przy przyjętym profilu prędkości wg (3.1) otrzymuje się

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \left[-\frac{\omega'_c}{\xi} \right]_{\xi=0} &= 2a_2, & R_{\text{sup}} &\leq \xi \leq 1, \\ \mu_c(0) &= \sup [\mu_c] = 1, & \sup M &= M(0) = \frac{-\omega'_c(1)}{2a_2} \approx 0,08\varrho_0, \\ \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right]_{\xi=0} &= \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right]_{\text{sup}} = \sup M - 1, & \mu_c(1) &= \inf [\mu_c] = \frac{1}{\sup M}, \\ \inf M &= M(1) = 1, & \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right]_{\xi=1} &= \inf \left[\frac{\nu_T}{\nu} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$M(m) \approx 0,81 \sup M \approx 0,065\varrho_0.$$

Wykres funkcji v_T/v dla ω'_e wg (3.1) jest stosunkowo dobrze zgodny z danymi doświadczalnymi Corcorana i innych [26]. Oszacowanie $\sup M$ i $M(m)$ przez zależności proporcjonalne do ϱ_0 jest przybliżone.

Według Kármána (1939 r. [12]) przy mało uzasadnionym założeniu, że $\tau = \tau_0 = \text{const}$ w całym przekroju strumienia otrzymuje się

$$(10.6) \quad M = \frac{\omega'_e(1)}{\omega'_e(\xi)} = \frac{1}{-\varphi'_e} = \frac{1}{\varphi'_\eta}.$$

Przy logarytmicznym profilu dla trzech obszarów współczynnik M wg (10.6) jest wyznaczony równaniami:

a) dla warstwy laminarnej ($\eta \leq 5$)

$$M = 1, \quad M(5) = 1;$$

b) dla warstwy przejściowej ($5 \leq \eta \leq 30$), $\varphi = -3,05 + 5 \ln \eta$, $\varphi'_\eta = \frac{5}{\eta}$,

$$(10.7) \quad M = \frac{1}{5} \eta, \quad M(5) = 1, \quad M(30) = 6;$$

c) dla rdzenia burzliwego ($\eta \geq 30$) $\varphi = 5,5 + 2,5 \ln \eta$, $\varphi'_\eta = \frac{2,5}{\eta}$,

$$M = 0,4\eta, \quad M(30) = 12.$$

W pracy [20], str. 333, na podstawie wykresu, który powinien odpowiadać zależnościom (10.7) [12], wyciągnięto niezbyt precyzyjny, uogólniający wniosek o rzekomej niemożliwości wyznaczenia poprawnego współczynnika burzliwej lepkości v_T z równania ruchu, pomimo przyjęcia dostatecznie dokładnej funkcji dla opisu profilu prędkości.

Według MARTINELLEGO [14] i innych zgodnie z równaniem ruchu (10.1) dla $\tau = \xi\tau_0$ mamy

$$(10.8) \quad M = \frac{\xi}{-\varphi'_e} = \frac{\xi}{\varphi'_\eta}.$$

Przy profilu logarytmicznym dla prędkości φ współczynnik M wg (10.8) jest następujący:

a) dla warstwy laminarnej ($\eta \leq 5$)

$$M = \xi;$$

b) dla warstwy przejściowej ($5 \leq \eta \leq 30$)

$$(10.9) \quad M = \frac{\xi}{5} \eta = 0,2\varrho_0 \xi (1 - \xi), \quad \mu_c = 2\xi (1 - \xi);$$

c) dla rdzenia burzliwego ($\eta \geq 30$)

$$M = \frac{\xi}{2,5} \eta = 0,4\varrho_0 \xi (1 - \xi), \quad \mu_c = 4\xi (1 - \xi).$$

Wartość maksymalną współczynnik M osiąga dla $\xi = 1/2$, która wynosi

$$(10.10) \quad M_{\max} = M\left(\frac{1}{2}\right) = 0,1\varrho_0.$$

Pomijając warstwę laminarną i przejściową oraz przyjmując określenie wg (10.9c) dla całego obszaru, otrzymuje się wartość średnią współczynnika M w przekroju strumienia:

$$(10.11) \quad M(m) = M_{\max} 2 \int_0^1 \xi \mu_c(\xi) d\xi = \frac{2}{3} M_{\max} = 0,067\varrho_0.$$

Z równań (10.9) wynika, że

$$(10.12) \quad M(0) = 0, \quad \left[\frac{v_T}{v} \right]_{\xi=0} = -1.$$

Wynik ten jest sprzeczny z sensem fizycznym pojęcia naprężenia pochodzącego od lepkości burzliwej. Wynik (10.12) otrzymany został na skutek zastosowania (nie spełniającego warunku zerowej pochodnej na osi) logarytmicznego profilu nad płaską ścianką, ustalonego dla jednostronnie ograniczonego przepływu. Równania (10.9) stanowią podstawę do obliczania współczynnika v_T w różnych analogiach: Kármána [12], Martinellego [13,14], Lyona [16] i innych. Wykresy v_T oparte na zależnościach (10.9) spotkać można w wielu pozycjach literatury [6 i 9]. Brak jednak tam wyjaśnienia przyczyny nieprawidłowego sposobu zmienności v_T i uwag sygnalizujących o nieprawidłowościach.

KUTATIELADZE w oparciu o wyniki pomiarów prędkości Nikuradsego [29] podaje wykres współczynnika N [9], rys. 41, str. 154, który jest wg przyjętych w pracy [9] oznaczeń, związany ze współczynnikiem M równaniem

$$(10.13) \quad M = 1 + N\varrho_0,$$

stąd

$$(10.14) \quad N = \frac{M - 1}{\varrho_0}, \quad N_{\max} = \frac{M_{\max} - 1}{\varrho_0} \approx \frac{M_{\max}}{\varrho_0}.$$

Wykres funkcji N w pracy [9] jest nieprawidłowy w porównaniu z wykresem M opartym na profilu prędkości ω_c wg (3.1). Przy ξ dążącym do zera N powinno dążyć do N_{\max} , a nie do zera jak w pracy [9].

Współczynnik N_{\max} dla różnych Re wg wykresu w pracy [9] posiada średnio wartość równą około 0,085, wobec czego

$$M_{\max} \approx 0,085\varrho_0,$$

oraz

$$M(m) \approx \frac{2}{3} M_{\max} \approx 0,057\varrho_0.$$

Na podstawie podanych przez Reichardta przybliżonych wzorów [48 i 49] dla v_T/v otrzymuje się

$$M = 1 + \varrho_0 \frac{\kappa}{3} (0,5 + \xi^2) (1 - \xi^2), \quad \kappa = 0,4,$$

$$(10.15) \quad M_{\max} = M\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{9}{16} \varrho_0 \frac{\kappa}{3} \approx 0,075 \varrho_0,$$

$$\mu_c = \frac{M}{M_{\max}} \approx \frac{1}{M_{\max}} + \frac{16}{9} (0,5 + \xi^2) (1 - \xi^2).$$

Wykres funkcji R wg (10.3₂) i ω_c wg (3.1) ma charakter zbliżony do wykresu podanego w pracy [6], str. 180, rys. 7-24, opartego na danych doświadczalnych Laufera i półempirycznym równaniu Pai'a:

$$R = 0,9835\xi (1 - \xi^{30}).$$

Powyższa funkcja $R(\xi)$ posiada maksimum dla $\xi = 0,895$ wynoszące 0,85. Funkcja R wg skrytykowanej w pracy [24] teorii BROSKKI [22] i BURKI [23] posiada określenie

$$(10.16) \quad R = \frac{C}{r\bar{v}_z},$$

gdzie C jest stałą, r promieniem, \bar{v}_z uśrednioną prędkością wg reguł Reynoldsa na promieniu r .

W porównaniu z (10.3₂) powinno być spełnione równanie

$$(10.17) \quad \frac{1}{C} = \frac{D_1}{\bar{v}_z} + D_2 \frac{d \ln \bar{v}_z}{dr},$$

gdzie D_1, D_2 są to stałe.

Równanie (10.17) może być spełnione tylko przy stałym \bar{v}_z , tj. silnie rozwiniętej burzliwości w części centralnej strumienia.

Długość swobodna mieszania l wg teorii Prandtla [9] jest zdefiniowana równaniem, które w postaci bezwymiarowej przyjmuje postać

$$(10.18) \quad \frac{l}{r_0} = - \frac{\sqrt{R}}{\varrho_0 \varphi_e'},$$

natomiast w zależności od ω_c postać

$$(10.19) \quad \frac{l}{r_0} = \frac{2}{\text{Re}'} \frac{\xi \omega_c'(1)}{\omega_c'(\xi)} \sqrt{\frac{1}{\xi} - \frac{\omega_c'(\xi)}{\xi \omega_c'(1)}}.$$

Jak widać przy ξ dążącym do zera [wobec ograniczoneści $\omega_c'(\xi)/\xi$ dla $\xi = 0$, gdy ω_c jest wyznaczone przez (3.1)], a l/r_0 dąży do nieskończoności; natomiast przy ξ dążącym do jedności l/r_0 dąży do zera.

Według NIKURADSEGO [29, 9] po nieistotnych przekształceniach mamy

$$(10.20) \quad \frac{l}{r_0} = 0,14 (1 - 0,572\xi^2 - 0,428\xi^4) = 0,14 (1 + 0,428\xi^2) (1 + \xi) (1 - \xi).$$

Iloczyn współczynników przed $(1 - \xi)$ we wzorze (10.20) dla $\xi = 1$ osiąga wartość 0,4.

Według KÁRMÁNA [44]

$$(10.21) \quad \frac{l}{r_0} = \kappa(1 - \xi), \quad \kappa = 0,4.$$

Według MADEJSKIEGO [28]

$$(10.22) \quad \frac{l}{r_0} = 1,151 (1 - \xi).$$

Współczynnik Kármána κ jest zdefiniowany równaniem w postaci bezwymiarowej:

$$(10.23) \quad \kappa = - \frac{\sqrt{R} \omega_c''(\xi)}{\varrho_0 \varphi_0' \omega_c'(\xi)},$$

które w zależności od ω_c przyjmuje postać:

$$(10.24) \quad \kappa = \frac{2}{\text{Re}'} \frac{\xi \omega_c'(1)}{\omega_c'(\xi)} \sqrt{\frac{1}{\xi} - \frac{\omega_c'(\xi)}{\xi \omega_c'(1)} \frac{\omega_c''(\xi)}{\omega_c'(\xi)}}.$$

Jak widać współczynnik κ (przyjmowany przez Kármána za stały i równy 0,4) w rzeczywistości zależy od ξ i Re . Dla $\xi > 0,3$ wartość $\kappa = 0,4$ jest wartością możliwą do przyjęcia dla przybliżonego oszacowania; w pobliżu $\xi = 1$ ($\xi > 0,95$), κ zmierza do zera; gdy ξ dąży do zera, κ dąży do nieskończoności.

Przyjęcie dla v_T/v funkcji innej niż wynika z równania ruchu przy przyjętym profilu prędkości prowadzi do naruszenia podstawowego równania hydromechaniki, co nie ma dostatecznego uzasadnienia doświadczalnego. Wykonanie pomiarów burzliwości jest znacznie trudniejsze niż pomiarów pola prędkości i spadku ciśnienia.

Wykresy funkcji ω_c , μ_c , φ_0' i R oparte na profilu prędkości wg (3.1) przedstawiono na rys. 2 liniami ciągłymi; dla porównania przedstawiono liniami przerywanymi funkcje μ_c ustalone przez innych autorów przy innych założeniach.

11. Uwagi o równaniu wymiany ciepła

Wykorzystując równanie (5.2), po pomnożeniu go przez $R_n(\xi)$ i scałkowaniu przez części względem ξ w granicach od 0 do 1 otrzymuje się wzór

$$(11.1) \quad \beta_n^2 = \frac{1}{N_n} \int_0^1 k(\xi) [R_n'(\xi)]^2 d\xi;$$

stąd, gdy $k(\xi)$ jest większe od zera, wszystkie wartości własne β_n są rzeczywiste i dodatnie. N_n jest normą funkcji R_n z wagą $\gamma(\xi)$ wg (4.3). Na podstawie równania (5.2) wykazuje się ortogonalność funkcji własnych R_n i R_m [31]. W tym celu tworzy

się różnicę z równań (5.2) dla R_n i R_m pomnożonych przez R_m i R_n , co prowadzi do równania

$$(11.2) \quad R_m [kR'_n]' - R_n [kR'_m]' = (\beta_n^2 - \beta_m^2) \gamma R_m R_n.$$

Stosując wzór Greena do lewej strony równania i całkując ze względu na ξ w granicach od 0 do 1 otrzymuje się

$$(11.3) \quad \int_0^1 [k(R_m R'_n - R_n R'_m)]' d\xi = (\beta_n^2 - \beta_m^2) \int_0^1 \gamma R_m R_n d\xi.$$

Z jednorodności warunków brzegowych $R_n(1) = 0$, $R'_n(0) = 0$ wynika, że lewa strona tego równania jest równa zero, a że z założenia $\beta_n^2 \neq \beta_m^2$ otrzymuje się równanie

$$(11.4) \quad \int_0^1 \gamma(\xi) R_m(\xi) R_n(\xi) d\xi = \delta_{mn} N_n,$$

gdzie δ_{mn} jest symbolem Kroneckera.

Ortogonalność funkcji R_n pozwala wyznaczyć współczynniki Fouriera C_n rozwinięcia funkcji brzegowej $\vartheta_c(\xi)$ dla $\zeta = 0$,

$$(11.5) \quad \vartheta_c = \sum_n C_n R_n(\xi).$$

Po pomnożeniu równania przez $\gamma R_n(\xi)$ i scałkowaniu w granicach od 0 do 1, po wykorzystaniu warunku ortogonalności otrzymuje się

$$(11.6) \quad C_n = \frac{1}{N_n} \int_0^1 \gamma(\xi) \vartheta_c(\xi) R_n(\xi) d\xi.$$

W przypadku przepływu laminarnego podane zostały przez SELLARSA w pracy [18] wzory dla $t(m, \zeta)$ i $q(\zeta)$. Funkcje te muszą spełniać równanie (8.7). Przy użytych w pracy [18] oznaczeniach powinno być spełnione równanie

$$(11.7) \quad T_{mn}(x^+) - T_0 - \frac{2d}{k} \int_0^{x^+} q(x^+) dx^+ = 0, \quad x^+ = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{z}{r_0}.$$

Z równania (8.4) wynika wzór

$$(11.8) \quad A_n = 2C_n [-R'_n(1)] = C_n R_n(m) \frac{\lambda_0^2}{2} = C_n^2 N_n \lambda_0^2.$$

Równanie poprzednie jest spełnione, gdy

$$(11.9) \quad \sum_n \frac{2A_n}{\lambda_n^2} = 1, \quad \sum_n \frac{2A_n}{\lambda_n^4} = \frac{88}{768}.$$

Suma pierwszego szeregu wynika z warunku brzegowego dla $\zeta = 0$ i jest wartością dokładną. Suma drugiego szeregu została wyznaczona na podstawie ograniczonej ilości przybliżonych wartości A_n i λ_n , wobec czego jest wartością mało dokładną. Z tego względu wstawienie jej w pracy [18] do wzoru dla Nu uniemożliwia prawidłowe wyznaczenie wartości asymptotycznej Nu_a , która w przypadku liniowej

zmienności temperatury dla $\zeta \rightarrow \infty$ i $n = 0$ przyjmuje jak dla stałej temperatury ścianki wartość $Nu_a = \lambda_0^2/2$. Wynika stąd, że rys. 2 w [18] jest niedokładny.

W przypadku przepływu burzliwego podane zostały przez SLEICHERA [25] wzory, które, przedstawiając również rozwiązanie równania parabolicznego, powinny mieć identyczną postać, pomimo innych określeń dla funkcji własnych R_n , wartości własnych β_m^2 i współczynników C_n . Część jednak wzorów w [25] jest błędna, pomijając również błędne określenie współczynnika $k(\xi)$ wobec przyjęcia tam wg DEISLERA [45] profilu logarymicznego nie spełniającego warunku zerowej pochodnej w osi przewodu.

Przy przyjętych w pracy [25] oznaczeniach wzory (25), (27), i (28) dla rozważanego tam przypadku liniowej zmienności temperatury ścianki powinny mieć postać

$$q(x^+) = \frac{Bk}{2D} - \frac{4Bk}{D} \sum_n \frac{A_n}{\lambda_n^2} V_n(x^+)$$

zamiast $q(x_*) = \frac{Bk}{2D} + \frac{4Bk}{D} \sum_n \frac{A_n}{\lambda_n^2} V_n(x^+),$

$$(11.10) \quad Nu(x^+) = \frac{1}{2} \frac{\sum_n \frac{8A_n}{\lambda_n^2} [1 - V_n(x^+)]}{\sum_n \frac{8A_n}{\lambda_n^4} [1 - V_n(x^+)]}$$

zamiast $Nu(x) = \frac{1 + 8 \sum_n \frac{A_n}{\lambda_n^2} V_n(x^+)}{16 \sum_n \frac{A_n}{\lambda_n^4} [1 - V_n(x^+)]},$

$$Nu_a = \frac{\lambda_0^2}{2}$$

zamiast $Nu_a = \frac{1}{16 \sum_n \frac{A_n}{\lambda_n^4}}.$

Przy użytych w pracy [25] określeniach powinny być spełnione równania

$$(11.11) \quad \sum_n \frac{8A_n}{\lambda_n^2} = 1, \quad A_n = C_n [-R'_n(1)] = C_n R_n(m) \frac{\lambda_0^2}{2} = C_n^2 N_n \lambda_0^2.$$

Różnica we wzorach w obu artykułach [18 i 25] po usunięciu błędów, jeżeli chodzi o formę jest tylko pozorna, A_n w [18] odpowiada $4A_n$ w [25]; inne są oczywiście wartości liczbowe. Ponadto w [25] podano wzory zawierające funkcje własne R_n , lecz funkcje te nie zostały w żaden sposób określone, a równanie, z którego mogłyby być wyznaczone, nie ma określeń analitycznych dla współczynników do niego wchodzących w zależności od zmiennych niezależnych; nie zostały podane wzory określające profil prędkości w całym obszarze strumienia. Proporcjonalność logarytmów wartości własnych do przypadku laminarnego, występująca na wykresach, nie została wykazana. Dokładność przeprowadzonych na maszynie analogowej obliczeń nasuwa

wątpliwości. Ponieważ $\lambda_0^2 = 2Nu_a$, a $Nu_a = Nu_{emp}$, to przyjmując proporcjonalność logarytmów wartości własnych i innych stałych do przypadku laminarnego, można wykonać w zasadzie pozostałe wykresy dla λ_n^2 , A_n i C_n . Przytoczone rozwiązania przypadku II rodzaju w pracach [18 i 25] (natężenie strumienia ciepłego jest dane na ściance), wyrażające się przez funkcje własne dla przypadku I rodzaju (na ściance dana jest temperatura ścianki) nie są formalnie poprawne. Przypadek ten wymaga oddzielnego omówienia. Można wykazać, że przypadek II rodzaju warunków brzegowych dla $q = \text{const}$ i poza odcinkiem początkowym aproksymuje się przypadkiem zmiennej liniowo temperatury ścianki. Średnia temperatura strumienia jest wówczas funkcją liniową dla całego zakresu ζ . Stąd wynika, że również i w tym przypadku asymptotyczna wartość liczby Nusselta powinna być taka sama jak w przypadku stałej temperatury ścianki.

Tak zwane równania analogii [47] można prosto wyprowadzić z równań (5.2) i (8.4) przy założeniu, że $n = 0$. Wygodniej w zapisie dokonać zmiany oznaczenia

γ na $\gamma = \xi\omega = \xi \frac{\varphi_c}{\varphi_m} \omega_c$. Wówczas wg (5.2) i (8.4) otrzymuje się

$$(11.12) \quad \frac{d}{d\xi} \left(k \frac{dR_0}{d\xi} \right) + \beta_0^2 \gamma R_0 = 0, \quad R_0(0) = 1, \quad R_0(1) = 1, \quad R_0'(0) = 0,$$

$$Nu(m) = \frac{2[-R_0'(1)]}{R_0(m)} = \beta_0^2.$$

Po scałkowaniu równania (11.12)₁ względem ξ od 0 do ξ otrzymuje się

$$(11.13) \quad -R_0'(\xi) = \frac{Nu(m)}{k} \int_0^\xi \gamma R_0 d\xi, \quad -R_0'(1) = \frac{Nu(m) R_0(m)}{2}.$$

Po powtórny scałkowaniu

$$(11.14) \quad R_0(\xi) = Nu(m) \int_\xi^1 \frac{d\xi_1}{k} \int_0^{\xi_1} \gamma R_0 d\xi_2,$$

$$R_0(0) = 1 = Nu(m) \int_0^1 \frac{d\xi_1}{k} \int_0^\xi \gamma R_0 d\xi_2.$$

Średnia temperatura strumienia jest równa

$$(11.15) \quad R_0(m) = 2 \int_0^1 R_0(\xi) \gamma(\xi) d\xi = Nu(m) 2 \int_0^1 \gamma d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \frac{d\xi_2}{k} \int_0^{\xi_2} \gamma R_0 d\xi_3.$$

Z powyższych równań wynikają wzory:

$$(11.16) \quad Nu(m) = \frac{2[-R_0'(1)]}{R_0(m)} = \frac{R_0(0)}{\int_0^1 \frac{d\xi_1}{k} \int_0^{\xi_1} \gamma R_0 d\xi} = \frac{R_0(m)}{2 \int_0^1 \gamma d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \frac{d\xi_2}{k} \int_0^{\xi_2} \gamma R_0 d\xi_3}$$

oraz

$$(11.17) \quad \frac{R'_0(\xi)}{R'_0(1)} = \frac{2 \int_0^\xi \gamma R_0 d\xi}{k R_0(m)}$$

Według określenia $\gamma(m) = 2 \int_0^1 \gamma d\xi = 1$, $\gamma = \xi \omega$, $\omega(m) = 1$. Rozdzielenie jedną wartością własną zmiennych w równaniu (4.1) jest równoważne z przyjęciem, że gradient temperatury w kierunku osiowym jest stały w całym przekroju, co nie jest spełnione przy ścianie w stałej temperaturze. Jedyne ściśle jest stwierdzenie, że przy stałej temperaturze ścianki średni gradient temperatury w kierunku osiowym jest równy gradientowi średniej temperatury.

Według LYONA [16, 6 i 47]

$$(11.18) \quad \text{Nu}(m) = \frac{1}{2 \int_0^1 \gamma d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \frac{d\xi_2}{k} \int_0^{\xi_2} \gamma d\xi_3} = \frac{1}{2 \int_0^1 \frac{d\xi_1}{k} \left[\int_0^\xi \gamma d\xi \right]^2}$$

Według MARTINELLEGO [14]

$$(11.19) \quad \text{Nu}(m) = \frac{1}{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\xi^2}{k} d\xi}, \quad \frac{\xi^2}{k} = \frac{\xi}{A},$$

$$R_0(\xi) = \frac{\text{Nu}(m)}{2} \int_\xi^1 \frac{\xi^2}{k} d\xi, \quad R_0(m) = \text{Nu}(m) \int_0^1 \gamma d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \frac{\xi_2^2}{k} d\xi_2.$$

Z porównania wynika, że w równaniach analogii w wyniku różnych uproszczeń w porównaniu z zależnościami dokładnymi przy $n = 0$ trzeba przyjąć (przynajmniej w pierwszym przybliżeniu) we wzorach po prawej stronie $R_0 = R_0(m) = 1$ i $\omega = \omega_m = 1$ czyli $\int_0^\xi \xi d\xi = \frac{1}{2} \xi^2$. Równania te otrzymuje się również po uproszczeniu równania energii do postaci $R'_0(1) \xi = A R'_0(\xi)$, czyli po przyjęciu liniowej zmienności natężenia strumienia ciepłego $q(\xi) = \xi q_0$. Bardziej skomplikowana postać wg LYONA jest tylko pozornie dokładniejsza. W powyższych równaniach analogii

$$k = \xi A, \quad A = \text{Pr}'(\varepsilon + M), \quad \varepsilon = \frac{1 - \text{Pr}'}{\text{Pr}'}, \quad M = 1 + \frac{\nu_T}{\nu} = \frac{\xi}{-\varphi'_\varepsilon} = \frac{\xi}{\varphi'_\eta},$$

gdzie φ'_η jest określone przez profil logarytmiczny dla trzech obszarów strumienia. Dla $\text{Pr} \gg 1$ błędy wynikające z profilu logarytmicznego koryguje się za pomocą funkcji silnie wzrastających w obszarze warstwy laminarnej $M \sim \eta^3$ wg MURPHREE lub $M \sim \eta^4$ wg LEWICZA i KUTATIBŁADZE. Według Lewicza $M = 1 + 0,032 \eta^4$, gdzie η_1 jest grubością warstwy laminarnej, η_1 przyjmuje wartość od 5 do 11,5 w zależności od ilości obszarów. Dla małych $\text{Pr} \ll 1$ $A \approx 1$ i wówczas po przyjęciu $\omega = \omega_m = 1$

wg MARTINELLEGO $Nu \approx 4$, wg LYONA $Nu \approx 8$. Przy przepływie laminarnym $M = 1$ gdy $Pr' = 1$ wg Lyona $Nu = 4,36$ [47]. Funkcja $R_0(\xi)$ określa w przybliżeniu profil temperatury w jednym z przekrojów.

Z faktu rozdzielenia zmiennych jedną wartością własną $\beta_0^2 = Nu$ wynika, że zmianę temperatury strumienia w kierunku osiowym przy stałej temperaturze ścianki uwzględnić można za pomocą funkcji $u = \exp[-(2Nu/Pe)\xi]$, czyli $\vartheta = R_0(\xi)u(\xi)$, co bardziej ściśle jest w odniesieniu do średniej temperatury $\vartheta(m, \zeta) = R_0(m)u(\zeta)$. Z powyższego widać, że równania analogii opierają się na bardzo prymitywnych założeniach upraszczających stronę rachunkową. Nie poprawia sytuacji wprowadzenie różnych pomocniczych funkcji i poprawkowych współczynników ε_T doprowadzających do zgodności Nu z wynikami empirycznymi; pole temperatury pozostaje mimo powyższych zabiegów tylko bardzo orientacyjnie określone. W równaniach analogii rozpatruje się tylko pole temperatury w kierunku promieniowym. Równania analogii odegrały ważną rolę historyczną w kierunku poznania mechanizmu zjawiska wymiany ciepła przy przepływie burzliwym, lecz za podstawę teorii przyjęte być nie mogą [21 i 20]. Wzorów końcowych wynikających z równań (11.19) ukazało się w literaturze bardzo wiele, przy czym wszystkie opierają się na mniej lub więcej uzasadnionych założeniach upraszczających, zmierzających do efektywnego obliczenia zależności i doprowadzenia do zgodności obliczonych liczb Nu z wynikami empirycznymi, przy czym najczęściej założenia te nie są wyraźnie precyzowane. Przegląd ważniejszych równań analogii na tle przyjmowanych założeń upraszczających podano w [11 i 21]. W pracy [11] podano pewne uogólnienie w tradycyjnej formie dla całego zakresu liczb Re i Pr , występujących w praktycznych przypadkach, a wyniki obliczeń dla $\varepsilon_T = 1$ przedstawiono na wykresie $Nu = Nu(Re, Pr)$ i porównano z zależnościami empirycznymi.

Zakończenie

Przedstawiona teoria burzliwej wymiany ciepła przy przepływie niesymetrycznym opiera się na koncepcji mechanizmu przenoszenia energii mechanicznej i cieplnej za pośrednictwem burzliwych pulsacji. Przyjęte hipotetyczne podobieństwo rozkładu współczynników burzliwej lepkości i burzliwego wyrównywania temperatury ze współczynnikiem podobieństwa ε_T wymaga weryfikacji doświadczalnej. Obecnie brak jest jednak dostatecznie pewnych danych doświadczalnych, pozwalających przyporządkować pole temperatury polu prędkości przy przepływie burzliwym. Istniejące dane doświadczalne dla prostych warunków brzegowych, ujmowane we wzory empiryczne dla średniej na odcinku liczby Nusselta w zależności od liczb Re i Pr , pozwalają jedynie na porównanie wyznaczonych analitycznie i doświadczalnie średnich na odcinku gradientów temperatury strumienia na ściance. Zgodność przy tym warunku można uzyskać nadając odpowiednią wartość współczynnikowi ε_T w zależności od liczb Re i Pr . Dla dokonania pełnej analizy porównawczej pól temperatury, wyznaczonych analitycznie i doświadczalnie, konieczne są jednak liczbowe rozwiązania dla różnych par Re i Pr . Przedstawiony sposób rozwiązania pozwala badać wpływ na pole temperatury różnych funkcji $a_T(\xi, Re, Pr)$.

Z przeprowadzonych obliczeń dla jednej z par $Re = 10^5$ i $Pr' = 1$ wynika, że dla $\varepsilon_T = 1$ otrzymuje się poprawny profil temperatury i zgodność średniej liczby Nu z wartością wyznaczoną ze wzorów empirycznych dla stałej temperatury ścianki.

Autor przeprowadził również badania doświadczalne nad przepływem burzliwym powietrza w rurze w warunkach osiowo-symetrycznych przy zmieniającej się wzdłuż rury temperaturze ścianki [46]. Wyznaczono przy tym pole prędkości i temperatury strumienia oraz temperaturę ścianki wzdłuż rury. Zweryfikowano wyprowadzone prawo zmienności średniej temperatury strumienia (8.10) i wzory dla zmiennej liniowo i sinusoidalnie temperatury ścianki. Rozbieżności zawierały się w granicach dokładności pomiarów, tj. wynosiły około 2%; większe rozbieżności (rzędu 10%) wystąpiły w porównaniu z empirycznymi wzorami dla liczby Nu , nieprzystosowanymi do obliczeń przy zmiennej temperaturze ścianki.

Rozwiązania dla dwu rodzajów przypadków warunków brzegowych (na ściance dana jest temperatura lub gradient temperatury w kierunku promieniowym), gdy funkcje brzegowe zależą od dwu współrzędnych, zostały zreferowane przez autora na IV Sympozjum Termodynamiki w Karpaczu w lutym 1966 r. i w skrócie przedstawione w [54].

Przedstawione rozwiązania pozwalają uwzględnić dowolne warunki brzegowe, zależne od dwu współrzędnych. W obu przypadkach warunków brzegowych zagadnienie sprowadza się do numerycznego rozwiązania problemu Sturm-Liouville'a w sposób podobny do przedstawionego w p. 6.

Dla celów praktycznych zastosowań wystarcza w większości przypadków wykorzystanie uproszczonego wzoru (8.10) dla średniej temperatury strumienia i wzoru (7.2), w których liczba St jest wyznaczana ze wzorów empirycznych.

Zweryfikowana zależność pomiędzy polem prędkości i temperatury stanowi może dogodny wzorec testowy dla różnych hipotez dotyczących burzliwości jako mechanizmu pośredniczącego w transporcie energii mechanicznej i cieplnej.

Przedstawiony sposób wyznaczania pola temperatury może być rozszerzony na przypadki wymiany ciepła w przewodach o bardziej skomplikowanych kształtach.

Literatura cytowana w tekście

1. E. ECKERT, E. SPARROW, W. IBELLE, *Heat transfer bibliography*, Intern. J. Heat and Mass Transfer: 5, 5 (1962), 413-424; 6, 5 (1962), 561-570; 7, 6 (1963), 621-641.
2. A. LUIKOV, *Heat transfer bibliography*, Russian works, Intern. J. Heat and Mass Transfer: 6, 5 (1962), 571-582; 11, 5 (1962), 1121-1128; 4, 6 (1963), 309-323.
3. T. HOBLER, *Heat transfer bibliography*, Polish works, Intern. J. Heat and Mass Transfer, 11, 5 (1962), 1129-1130.
4. E. ECKERT, T. IRVINE, E. SPARROW, W. IBELLE, R. GOLDSTEIN, *Heat transfer, A review of current literature*, Intern. J. Heat and Mass Transfer: 10, 5 (1962), 1023-1050; 9, 6 (1963), 761-791.
5. J. KESTIN, P. RICHARDSON, *Heat transfer across turbulent incompressible boundary layer*, Intern. J. Heat and Mass Transfer: 2, 6 (1963), 147-189.
6. J. KNUDSEN, D. KATZ, *Fluid dynamics and heat transfer*, Mc Graw Hill Book Company Inc., New York-Toronto-London 1958.
7. H. GROBER, S. ERK, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955 (wyd. trzecie, tłum. na j. ros., 1958).

8. E. ECKERT, E. DRAKE, *Introduction to the transfer of heat and mass*, Mc Graw Hill Book Company Inc., New York 1959 (tłum. na j. ros., 1961).
9. С. Кутателадзе, *Основы теории теплообмена*, Машгиз 1962, wyd. drugie.
10. T. SHERWOOD, *Heat transmission to liquids flowing in pipes*, Industrial and Engin. Chemistry, 7, 24 (1932), 736-745.
11. T. DROZD, *Analogia wymiany ciepła masy i tarcia powierzchniowego w ustalonych osiowo-symetrycznych przepływach cieczy lepkiej w zakresie turbulencji w pełni rozwiniętej*, Prace Inst. Lotnictwa, 16 (1962), 20-30.
12. T. KÁRMÁN, *The analogy between fluid friction and heat transfer*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engin., 61 (1939), 705-710.
13. L. BOELTER, R. MARTINELLI, J. FINN, *Remarks on the analogy between heat transfer and momentum transfer*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engin., 63 (1941), 447-455.
14. R. MARTINELLI, *Heat transfer to molten metals*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engin., 69 (1947), 947-959.
15. H. REICHARDT, *Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten*, Zeitschr. Angew. Math. Mech., 6, 20 (1940), 297-328.
16. R. LYON, *Liquid metal heat transfer coefficients*, Chemical Engin. Progress 2, 47 (1951), 75-79.
17. A. SEBAN, T. SHIMAZAKI, *Heat transfer to a fluid flowing turbulently in a smooth pipe with walls at constant temperature*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engin., 73 (1951), 803-809.
18. J. SELLARS, M. TRIBUS, J. KLEIN, *Heat transfer to laminar flow in a round tube flat conduit — The Graetz problem extended*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engin., 78 (1956), 441-448.
19. П. РОМАНЕНКО, *Теплообмен и трение при градиентном течении жидкости*, Изд. Энергия, Москва 1964.
20. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła, Podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1963.
21. J. MADEJSKI, *Teoria wymiany ciepła*, PWN, Warszawa 1963, wydanie skryptowe.
22. M. BROSZKO, *O podstawach hydromechaniki racjonalnej i o ich weryfikacji*, Arch. Hydrotech., 1, 2 (1955), 7-25.
23. E. BURKA, *Ustalony przepływ burzliwy przez gładkie rury prostoosiowe o przekroju kołowym*, Arch. Hydrotech.: część I, 2, 2 (1955), 103-130; część II, 3, 2 (1955), 171-189.
24. J. BONDER, S. DROBOT, *Uwagi krytyczne o tzw. «racjonalnej teorii ruchu burzliwego» i o jej zastosowaniach*, Arch. Hydrotech., 1, 4 (1957), 85-94.
25. C. SLEICHER, M. TRIBUS, *Heat transfer in a pipe with turbulent flow and arbitrary wall temperature distribution*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engin., 79 (1957), 789-797, przedruk w [48].
26. W. CORCORAN, F. PAGE, J. SHLINGER, B. SAGE, D. BREAX, *Temperature gradients in turbulent gas streams*, Industrial and Engin. Chemistry, 2, 44 (1952), 410-430.
27. H. LATZKO, *Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits oder Gasström*, Zeitschr. Angew. Math. Mech., VDI, 1 (1921), 268-290.
28. J. MADEJSKI, *Turbulent flow heat transfer in the thermal entrance region*, Arch. Mech. Stos., 4, 15 (1963), 463-473.
29. J. NIKURADSE, *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren*, VDI Forschungsheft 356, Beilage zu Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Ausgabe B, 3 (1932), 1-36.
30. J. SNEDDON, *Elements of partial differential equations*, Mc Graw-Hill Book Company Inc, New York-Toronto-London 1957 (tłum. na j. polski 1962).
31. А. Тихонов, А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Гос. изд. тех. теорет. лит., Москва 1951.
32. R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, New York-London: tom I, 1953; tom II, 1962 (tłum. z j. niem; tłum. na j. ros. (1951)).
33. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, PWN, Warszawa: tom I, 1957; tom II, 1962.
34. E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig 1959, wyd. VI, (tłum. na j. ros., 1965).

35. M. ŁAWRIENTIEW, L. LUSTERNIK, *Rachunek wariacyjny*, PTM, Warszawa 1953, (tłum. z j. ros.).
36. И. ПЕТРОВСКИЙ, *Лекции по теории интегральных уравнений*, Изд. Наука, Москва 1965.
37. W. POGÓRZELSKI, *Równania całkowe i ich zastosowania*, PWN, Warszawa: tom I, 1953; tom II, 1958.
38. W. FADDIEJEW, *Metody numeryczne algebry liniowej*, PWN, Warszawa 1955 (tłum. z j. ros.).
39. H. CARSLAW, J. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 1962, wyd. drugie (tłum. na j. ros., 1965).
40. А. ЛЬКОВ, *Теория теплопроводности*, Гос. Издат, Москва 1952.
41. А. ЛЬКОВ, Ю. МИХАЙЛОВ, *Теория тепло- и массопереноса*, Госэнергоиздат, Москва 1962.
42. Б. ДЕМИДОВИЧ, И. МАРОН, *Численные методы анализа*, Госиздат. Физ.-мат., Москва 1963 (tłum. na j. polski, 1965).
43. W. McLACHLAN, *Bessel functions for engineers*, Clarendon Press, Oxford 1955, wyd. drugie (tłum. na j. polski, 1964).
44. Л. ЛОЙСЯНСКИЙ, *Механика жидкости и газа*, Госиздат Физ.-мат, Москва 1959.
45. R. DESSLER, *Analysis of turbulent heat transfer, mass friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt Numbers*, National Advisory Committee for Aeronautics, Report 1210 (1955), 1-14 (przedruk w [48]).
46. T. DROZD, *Badania doświadczalne wymiany ciepła przy przepływie burzliwym powietrza w rurze w warunkach osiowo-symetrycznych*, Prace Instytutu Lotnictwa, 27, (1966), 13-27.
47. И. НОВИКОВ, К. ВОСКРЕСЕНСКИЙ, *Прикладная термодинамика и теплопередача*, Основы ядерной энергии, Госатомиздат, Москва 1961.
48. *Recent Advances in Heat and Mass Transfer*, J. HARTNETT, (editor), Mc Graw-Hill Book Company, New York 1961.
49. H. REICHARD, *Die Grundlagen des turbulenten Wärmeübertrages*, Archiv ges. Wärmetechnik, 2 (1951), 129-142 (tłum. na j. ang. w [48]).
50. M. STRUNK, F. TAO, *A numerical method for the solution of the energy equation for steady turbulent heat transfer*, American Institute Chemical Engineering, Journal, 2, 10 (1964), 269-273.
51. Н. НИКЯТЕНКО, *Численное интегрирование уравнения распространения тепла при переменных физических характеристиках*, Инженерно Физический Журнал, 4, 9 (1965), 512-516.
52. R. DESSLER, *Turbulent heat transfer and friction in the entrance region of smooth passages*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engin., 77 (1955), 1221-1233.
53. *High speed aerodynamics and jet propulsion, Turbulent flows and heat transfer*, C. LIN (editor), Princeton University Press, Princeton-New Jersey, 5 (1959), (tłum. na j. ros. 1963).
54. IV Sympozjum Termodynamiki Technicznej pod hasłem: 1. Przekazywanie ciepła, 2. Pomiarы energetyczne. Referaty (na prawach rękopisu), Politechnika Wroclawska, Katedra Teorii Maszyn Ciepłych i Katedra Miernictwa Energetycznego, Wroclaw-Karpacz, luty 1966, 243-266.

Резюме

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Предлагается теоретический анализ для осесимметрического случая теплообмена между стенкой и потоком при турбулентном течении в круглой трубе в стационарных условиях со скачкообразным изменением температуры стенки. Математическое описание явления проводилось на основе аналогии распределения коэффициента турбулентной вязкости коэффициента температуропроводности, при соответственно подобранным степенным профиле скорости, удовлетворяющим, вместе со своими производными, крайним условиям при стенке и на оси. Решение получено путем разделения переменных в параболическом уравнении с переменными коэффициентами; задача сводится к проблеме Штурма и Лью-

вила; дается общее решение, сводя дифференциальное уравнение к интегральному уравнению Фредгольма-Вольтерра, а затем к системе алгебраических уравнений. Для больших n приводится приближенное решение. Перемещенность красного условия на стенке учитывается с помощью интеграла Дюгамеля. На основании решения уравнения энергии определяются характеристические величины для теплообмена.

Дается решение числового примера для $Re = 10^5$ и $Pr = 1$ путем разложения в степенный ряд; результаты вычислений сравниваются с эмпирическими зависимостями. Предлагается способ, дающий возможность использовать в случае переменной температуры стенки с осевой симметрией известные эмпирические формулы для Nu определенные для постоянной температуры стенки. Для сравнения приводятся функциональные зависимости некоторых гидромеханических величин, касающихся турбулентности, на основе принятого степенного профиля. Проводится критический анализ современных воззрений на теплообмен, а в особенности статей Селларса [18] и Шлейхера [25], касающихся теплообмена при ламинарном и турбулентном течении в трубе и так наз. уравнений термогидродинамической аналогии различных авторов.

Summary

HEAT TRANSFER IN A TURBULENT FLOW OF A VISCOUS LIQUID THROUGH A CIRCULAR TUBE

The paper presents an analysis of axially symmetric heat exchange between the wall and the agent in turbulent flow through a circular tube, under steady conditions, after a jump-like variability of the wall temperature. The mathematical description of the phenomenon presented here is based on the analogy between the distribution of the coefficients of eddy diffusivity of momentum and those of eddy diffusivity of heat, with a power profile of velocity selected in a suitable manner and satisfying, together with its derivatives, the boundary conditions at the wall and at the axis. Solution is obtained by separating variables in a parabolic equation with variable coefficients. The problem is reduced to the Sturm-Liouville problem. The general solution is obtained by reducing the differential equation to a Fredholm-Volterra integral equation and then to a set of algebraic equations. For large n , an approximate solution is obtained. The variability of the boundary condition at the wall has been taken into consideration by means of the Duhamel integral. The characteristic quantities of heat exchange are determined by solving the energy equation.

By way of example, the case of $Re = 10^5$ and $Pr = 1$ is solved numerically by expanding the solution in power series; the computation results are confronted with empirical relations. A method is given enabling the known empirical equations for fixed Nu numbers in the case of constant wall temperature to be applied to problems in which the wall temperature varies in axially symmetric manner. For the sake of comparison functional relations are given for some hydraulic quantities concerning turbulence, on the basis of the power profile assumed. The paper contains also an analysis of contemporary views of the phenomenon of heat exchange, in particular the papers of Sellars [18] and Sleicher [25] concerning heat transfer in laminar and turbulent flow through a tube and the equations of thermohydrodynamic analogy of various authors.

INSTYTUT LOTNICTWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1964 r.