

RÓWNANIA STATYCZNE ODKSZTAŁCENIA PŁYT SPRĘŻONYCH O ZMIENNEJ GRUBOŚCI

WOJCIECH DZIENISZEWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Badania teoretyczne zagadnienia płyt sprężonych zostały zapoczątkowane przez Y. GUYONA w r. 1944 w pracach [1 i 2].

Szybki postęp techniki sprężania konstrukcji spowodował niebawem dalszy rozwój badań w tej dziedzinie. Jednakże w przeważającej większości prac płyty sprężone są dotychczas rozpatrywane przy założeniach teorii belek. Pierwsze próby dokładniejszego ujęcia zagadnienia wyznaczania stanów naprężenia i odkształcenia płyt sprężonych zawarte są w pracach G. FRANZA, opublikowanych w r. 1953 w czasopiśmie [3]; w pracach tych autor rozpatrzył płyty prostokątne dwukierunkowo sprężone cięciami o trasach parabolicznych. J. GŁOMB w artykule [4] uogólnił przypadek płyt rozpatrzony przez G. FRANZA, podając też własne rozwiązania oraz wskazując na nie rozwiązane dotychczas, a istotne z punktu widzenia praktyki, zagadnienia dotyczące płyt sprężonych.

W latach 1961–1962 J. K. TYSZOWIECKI opublikował monografie [5 i 6] z dziedziny teorii płyt sprężonych, w których m.in. opisał najważniejsze osiągnięcia badań naukowych w tej dziedzinie mechaniki technicznej oraz przedstawił kompletny spis opublikowanych prac. Wskazane monografie wraz z pracami [7, 8, 9 i 10] stanowią pierwszy systematyczny wykład metod analitycznych badania stanu naprężenia i odkształcenia płyt sprężonych, ujętych przy założeniach teorii płyt cienkich, znajdujących się w stanie jednoczesnego zginania i ściskania. W pracach tych sformułowano a następnie rozwiązano szereg problemów brzegowych, dotyczących prostokątnych płyt sprężonych, podpartych w rozmaity sposób.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie w ogólniejszym ujęciu zagadnienia wyznaczania naprężeń i odkształceń w dowolnych płytach w przypadku pojawiania się skończonych przesunięć pionowych. Założono przy tym, że płyty są sprężone dwukierunkowo za pośrednictwem cięgien zakrzywionych, tworzących w planie dwa układy prostoliniowe, krzyżujące się pod kątem prostym.

2. Założenia. Oznaczenia

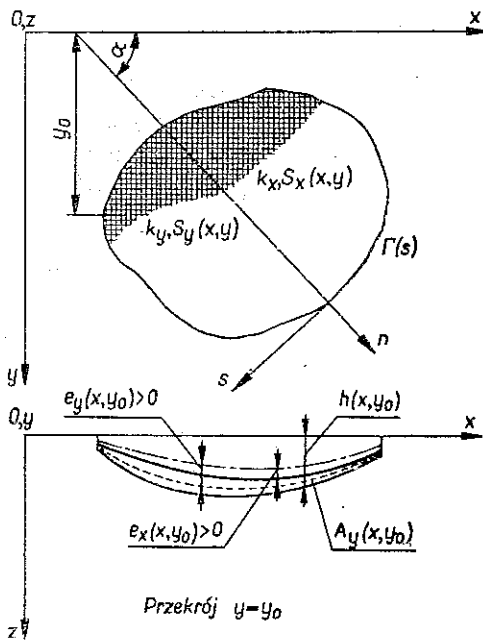
Przedmiotem rozpatrywań są płyty sprężone o zmiennej grubości $h(x, y)$, lecz o płaskiej powierzchni górnej (lub dolnej), mające dowolne obrysy konturów $\Gamma(s)$ i w dowolny sposób podparte lub spoczywające na podłożu sprężystym typu Winklera o współczynniku podatności $k(x, y)$.

Na płycie działa ciężar własny γh oraz dowolne pionowe obciążenia zewnętrzne $p(x, y)$ niezależne od czasu.

Płyty są sprężone za pośrednictwem dowolnie gęsto rozmieszczonych zakotwień cienkich cięgien zakrzywionych w płaszczyznach pionowych xz i yz i naprężonych w sposób trwały siłami $S_x(x, y)$ i $S_y(x, y)$ o dowolnym rozkładzie w obszarze płyty B .

Cięgna sprężające są rozmieszczone we wnętrzu płyty odpowiednio na dwóch powierzchniach $e_x(x, y)$ i $e_y(x, y)$ o małej wyniosłości i słabym zakrzywieniu; ich rzuty tworzą na płaszczyźnie dwa układy k_x i k_y przecinające się pod kątem prostym. Są one ułożone w kanałach i związane z płytą jedynie za pośrednictwem zakotwień.

Ze względu na konieczność zabezpieczenia cięgien przed wpływami zewnętrznymi



Rys. 1

powierzchnie $e_x(x, y)$ i $e_y(x, y)$ są położone w obszarze płyty B , tj. spełnione są nierówności

$$|e_i(x, y)| \leq 1/2h(x, y) - d, \quad i = x, y,$$

gdzie d oznacza stałą grubość niezbędnego otulenia cięgien w płycie. Pola przekrojów normalnych $A_x(x, y)$ i $A_y(x, y)$ cięgien k_x i k_y , odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych odpowiednio do osi x i y , są zmienne. Materiały płyty i cięgien są jednorodne, izotropowe i sprężyste.

Ponadto zakładamy, że grubość płyty $h(x, y)$ jest dostatecznie mała w porównaniu do dwóch pozostałych wymiarów. Wobec tego założenia teorii płyt cienkich jednocześnie zginanych i ściskanych, w których pojawiają się skończone przesunięcia pionowe, pozostają słuszne.

Opisaną płytę sprężoną oraz układ odniesienia $Oxyz$ przedstawiono schematycznie na rys. 1.

W rozważaniach stosować będziemy następujące oznaczenia:

x, y, z współrzędne prostokątne,

h grubość płyty,

u, v, w składowe przemieszczenia,

k_x, k_y cięgna zakrzywione w płaszczyznach xz i yz ,

e_x, e_y odległości osi cięgien k_x i k_y mierzone pionowo od powierzchni środkowej płyty,

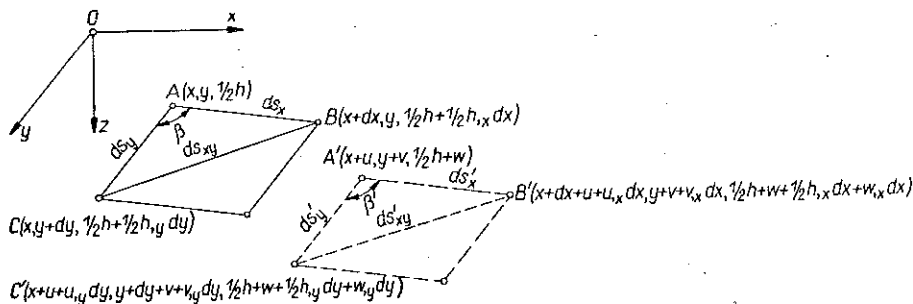
D sztywność zginania płyty,

- E współczynnik sprężystości podłużnej,
 G współczynnik sprężystości postaciowej,
 ν współczynnik Poissona,
 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ odpowiednie składowe tensora naprężenia,
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ odpowiednie składowe tensora odkształcenia,
 S_x, S_y siły wstępnego naprężenia cięgien k_x i k_y , odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych do osi x i y ,
 Q_x, Q_y siły poprzeczne równoległe do osi z , odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych od osi x i y ,
 Q_n siła poprzeczna równoległa do osi z , odniesiona do jednostki długości przekroju prostopadłego do kierunku n ,
 N_x, N_y siły normalne odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych do osi x i y ,
 N_{xy} siła styczna w kierunku osi y odniesiona do jednostki długości przekroju płyty prostopadłego do osi x ,
 M_x, M_y momenty zginające odniesione do jednostki długości przekrojów prostopadłych do osi x, y ,
 M_{xy} moment skręcający odniesiony do jednostki długości przekroju prostopadłego do osi x ,
 M_n, M_{sn} moment zginający i moment skręcający, odniesione do jednostki długości przekroju prostopadłego do kierunku n .

3. Odkształcenia i warunek ciągłości deformacji powierzchni środkowej

Wyznamy składowe tensora odkształcenia ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) dla powierzchni środkowej płyty.

W tym celu rozpatrzmy w otoczeniu dowolnego punktu A powierzchni środkowej element tej powierzchni przed i po odkształceniu, przedstawiony na rys. 2 i odnie-



Rys. 2

siony do ustalonego w przestrzeni układu kartezjańskiego $Oxyz$. Punkt A o współrzędnych w stanie nieodkształconym $(x, y, 1/2h)$, przemieszczając się pod wpływem odkształcenia powierzchni środkowej, przyjmuje położenie $A(x+u, y+v, 1/2h+w)$.

Składowe ε_x , ε_y , γ_{xy} rozpatrywanego elementu powierzchni środkowej, zgodnie z oznaczeniami wskazanymi na rys. 2, wyrazić możemy za pomocą wzorów

$$(3.1) \quad \varepsilon_x \approx \frac{ds'_x - ds_x}{dx}, \quad \varepsilon_y \approx \frac{ds'_y - ds_y}{dy}, \quad \gamma_{xy} \approx \cos \beta' - \cos \beta \quad \text{dla } z = h/2.$$

Podstawiając do wzorów (3.1)₁ i (3.1)₂ odpowiednie wyrażenia przybliżone na ds_x , ds_y , ds'_x i ds'_y (które nie trudno jest wyprowadzić na podstawie rys. 2) znajdziemy po przekształceniach dla $z = h/2$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x})^2 + \frac{1}{2}(v_{,x})^2 + \frac{1}{2}w_{,x}(h+w)_{,x}, \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}(v_{,y})^2 + \frac{1}{2}(u_{,y})^2 + \frac{1}{2}w_{,y}(h+w)_{,y}. \end{aligned}$$

Stąd po uwzględnieniu odpowiednio wzorów przybliżonych na ds_{xy} i ds'_{xy} mamy po pominięciu małych wielkości wyższych rzędów

$$(3.3) \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}(h+w)_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}(h+w)_{,y}, \quad z = h/2 \dots$$

W dalszych rozważaniach przyjmować będziemy założenie, że składowe przemieszczenia u i v punktów powierzchni środkowej płyty są wielkościami małymi w porównaniu do składowej w , a zatem we wzorach (3.2) i (3.3) możemy pominąć kwadraty i iloczyny pochodnych cząstkowych funkcji u i v (por. str. 18 w pracy [11]).

Stąd przy przyjętych założeniach wzory (3.2) i (3.3) na składowe ε_x , ε_y , γ_{xy} dla $z = h/2$ przybierają następującą postać uproszczoną:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}(h+w)_{,x}, \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}(h+w)_{,y}, \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + \frac{1}{2}w_{,y}(h+w)_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}(h+w)_{,y}. \end{aligned}$$

Warunek ciągłości deformacji powierzchni środkowej płyty, wiążący składowe ε_x , ε_y , γ_{xy} dla powierzchni środkowej, sformułujemy w następujący sposób:

Różniczkując dwukrotnie każdy ze wzorów (3.4) względem argumentów x i y oraz odejmując stronami otrzymamy w ten sposób wzór od sumy wzorów (3.4)₁ i (3.4)₂ po wprowadzeniu operatora

$$L(\varphi, \psi) = 2\varphi_{,xy}\psi_{,xy} - \varphi_{,xx}\psi_{,yy} - \varphi_{,yy}\psi_{,xx}$$

znajdziemy

$$(3.5) \quad \varepsilon_{x,yy} - \gamma_{xy,xy} + \varepsilon_{y,xx} = \frac{1}{2}L(w, w+h), \quad z = h/2.$$

Jest to warunek ciągłości deformacji powierzchni środkowej płyty. Możemy wyrazić ten warunek również przez siły wewnętrzne N_x , N_y i N_{xy} , działające na powierzchni środkowej. Podstawiając bowiem do (3.5) ogólnie znane wzory

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh}(N_x - \nu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh}(N_y - \nu N_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{Gh}N_{xy} = \frac{2(1+\nu)N_{xy}}{Eh},$$

słusznie na powierzchni $z = h/2$, otrzymujemy:

$$(3.6) \quad \left[\frac{1}{h} (N_x - \nu N_y) \right]_{,yy} - 2(1+\nu) \left(\frac{N_{xy}}{h} \right)_{,xy} + \left[\frac{1}{h} (N_y - \nu N_x) \right]_{,xx} = \frac{E}{2} L(w, w+h).$$

4. Warunki równowagi

Wyprowadzimy warunki określające stan równowagi płyty sprężonej dla skończonych przesuńnięć pionowych. W tym celu rozpatrzmy element odkształconej płyty sprężonej, przedstawiony schematycznie na rys. 3, pozostający w równowadze pod działaniem sił wewnętrznych oraz sił wstępnego naprężenia ciągnien sprężających. Wyznaczając momenty wszystkich sił działających na ten element względem osi równoległych do osi układu współrzędnych x, y, z i przechodzących przez punkt C znajdziemy po pominięciu małych wielkości wyższego rzędu

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (M_x + S_x e_x)_{,x} + M_{yx, y} &= Q_x + S_x e_{x, x}, \\ (M_y + S_y e_y)_{,y} + M_{xy, x} &= Q_y + S_y e_{y, y}, \\ N_{xy} &= N_{yx}. \end{aligned}$$

Rzutując kolejno na osie układu współrzędnych wszystkie siły działające na element mamy po pominięciu małych wielkości wyższego rzędu oraz po uwzględnieniu wzoru (4.1)₃,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (N_x + S_x)_{,x} + N_{xy, x} &= 0, \\ (N_y + S_y)_{,y} + N_{xy, x} &= 0, \\ (Q_x + S_x e_{x, x})_{,x} + (Q_y + S_y e_{y, y})_{,y} + (N_x + S_x) \left(\frac{1}{2} h + w \right)_{,xx} + \\ + 2N_{xy} \left(\frac{1}{2} h + w \right)_{,xy} + (N_y + S_y) \left(\frac{1}{2} h + w \right)_{,yy} &= -p - \gamma h + kw. \end{aligned}$$

5. Równania stanu odkształcenia i warunki brzegowe

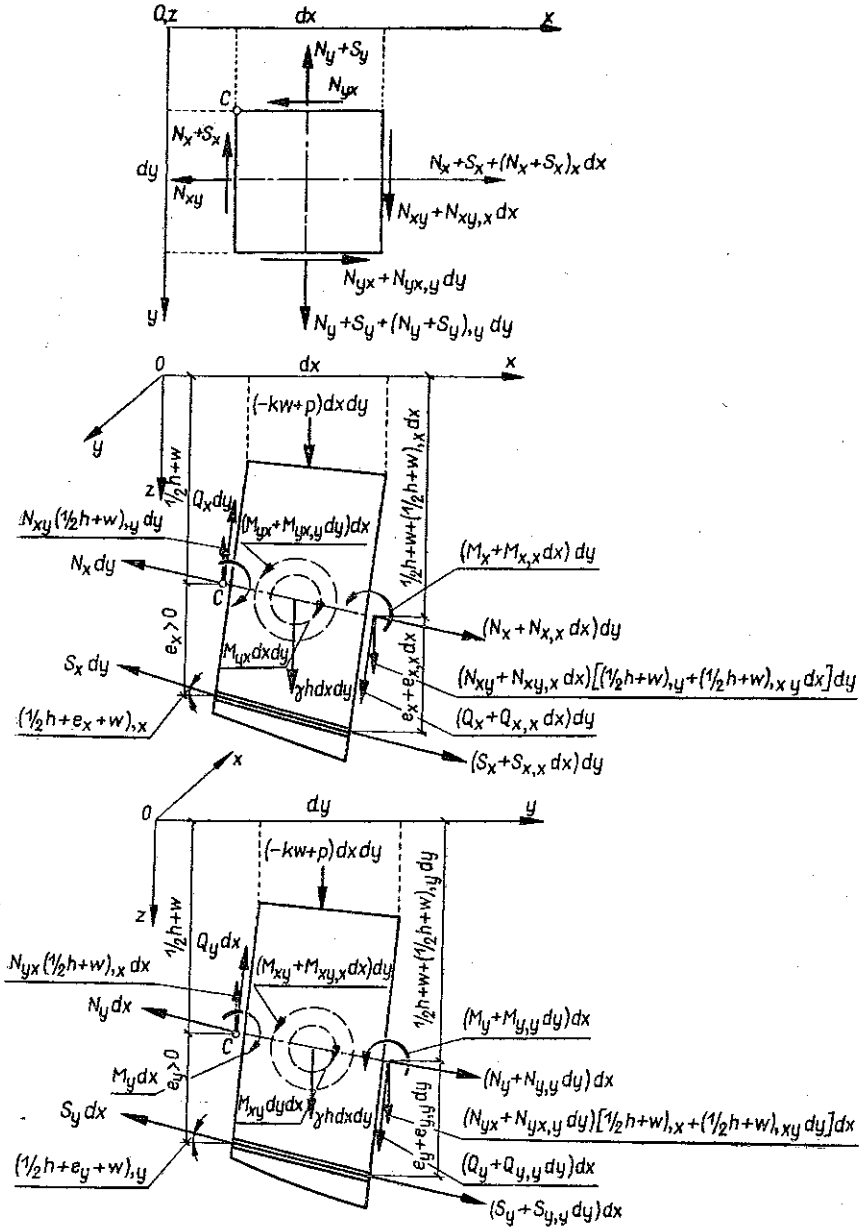
Równania opisujące stan odkształcenia płyt sprężonych wyprowadzimy na podstawie równań równowagi (4.1) i (4.2) oraz warunku ciągłości odkształceń powierzchni środkowej płyty (3.7) w następujący sposób:

Eliminując z równania (4.2)₃ na podstawie wzorów (4.1)₁ i (4.1)₂ wielkości Q_x i Q_y otrzymamy

$$M_{x, xx} + M_{xy, xy} + M_{yx, xy} + M_{y, yy} + (S_x e_x)_{,xx} + (S_y e_y)_{,yy} + (N_x + S_x) \left(\frac{1}{2} h + w \right)_{,xx} + \\ + 2N_{xy} \left(\frac{1}{2} h + w \right)_{,xy} + (N_y + S_y) \left(\frac{1}{2} h + w \right)_{,yy} = -p - \gamma h + kw.$$

Jeżeli uwzględnimy w tym wzorze ogólnie znane w teorii płyt cienkich wzory:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} M_x &= -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}), & M_y &= -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}), \\ M_{xy} &= M_{yx} = - (1 - \nu) D w_{,xy}, \end{aligned}$$



Rys. 3

w których $D = Eh^3/12 (1 - \nu^2)$, to znajdziemy

$$(5.2) \quad \Delta (D\Delta w) + (1 + \nu)L(D, w) - kw = (N_x + S_x) (\frac{1}{2}h + w)_{,xx} + 2N_{xy} (\frac{1}{2}h + w)_{,xy} + (N_y + S_y) (\frac{1}{2}h + w)_{,yy} + p + \gamma h + (S_x e_x)_{,xx} + (S_y e_y)_{,yy}$$

gdzie Δ oznacza operator Laplace'a.

Równania równowagi (4.2)₁ i (4.2)₂ spełnimy tożsamościowo, jeżeli siły $N_x + S_x$, $N_y + S_y$ i N_{xy} wyrazimy przez funkcję naprężeń Airy'ego $F(x, y)$ zdefiniowaną w rozpatrywanym przypadku za pomocą następujących wzorów:

$$(5.3) \quad N_x + S_x = F,_{yy}, \quad N_y + S_y = F,_{xx}, \quad N_{xy} = -F,_{xy}.$$

Podstawiając do warunku ciągłości (3.6) oraz do równania (5.2) odpowiednio funkcje (5.3) znajdziemy następujące równania:

$$(5.4) \quad \Delta \left(\frac{1}{h} \Delta F \right) + (1+\nu) L \left(\frac{1}{h}, F \right) - \frac{E}{2} L(w, w+h) = \Delta \left[\frac{1}{h} (S_x + S_y) \right] - \\ - (1+\nu) \left[\left(\frac{S_x}{h} \right)_{,xx} + \left(\frac{S_y}{h} \right)_{,yy} \right], \\ \Delta (D\Delta w) + (1-\nu) L(D, w) + L(F, \frac{1}{2}h+w) + kw = \\ = p + \gamma h + (S_x e_x)_{,xx} + (S_y e_y)_{,yy}.$$

Funkcje niewiadome F i w opisują stan odkształcenia dowolnych płyt sprężonych, w których powstają ugięcia skończone w .

Rozpatrzmy niektóre przypadki szczególne równań (5.4).

Przy $S_x = S_y = 0$ równania (5.4) są równaniami Kármána opisującymi deformacje wiotkich płyt o zmiennej grubości i ze wstępnym wygięciem powierzchni środkowej, równym połowie grubości płyty (por. wzory na str. 36 i 39 zawarte w pracy [11]).

Jeśli przyjmiemy, że ugięcia w są małe w porównaniu do grubości płyty h , to mamy następujące równania uproszczone:

$$(5.5) \quad \Delta \left(\frac{1}{h} \Delta F \right) + (1+\nu) L \left(\frac{1}{h}, F \right) - \frac{E}{2} L(w, h) = \Delta \left[\frac{1}{h} (S_x + S_y) \right] - \\ - (1+\nu) \left[\left(\frac{S_x}{h} \right)_{,xx} + \left(\frac{S_y}{h} \right)_{,yy} \right], \\ \Delta (D\Delta w) + (1-\nu) L(D, w) + kw + \frac{1}{2} L(h, F) = p + \gamma h + (S_x e_x)_{,xx} + (S_y e_y)_{,yy}.$$

Jeżeli natomiast przyjmiemy następujące założenia:

$$h(x, y) = h_0, \quad S_x = S_x(y), \quad S_y = S_y(x), \quad \gamma = 0, \quad h_0 \geq w,$$

to otrzymamy równania

$$(5.6) \quad \Delta \Delta F = \frac{1}{h_0} [S_x,_{yy} + S_y,_{xx}], \\ D_0 \Delta \Delta w + kw + L(F, w) = p + S_x e_x,_{xx} + S_y e_y,_{yy},$$

wyprowadzone przez J. K. TYSZOWIECKIEGO w pracy [5].

Przejdziemy z kolei do sformułowania warunków brzegowych dla równań (5.4). Rozpatrzmy kolejno brzeg płyty utwierdzony, swobodnie podparty i swobodny przy założeniach teorii płyt cienkich. O brzegu płyty $\Gamma(s)$ zakładamy, że jego punkty mogą się swobodnie przesuwać w płaszczyznach xy .

Zgodnie z teorią płyt cienkich oraz warunkiem poprawności formułowania zagadnień granicznych dla równań (5.4) niewiadome F i w powinny spełniać po dwa warunki brzegowe. Po pierwsze powinny być spełnione następujące warunki:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} (N_x + S_x) \cos \alpha + N_{xy} \sin \alpha &= 0, \\ (N_y + S_y) \sin \alpha + N_{xy} \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

którym po uwzględnieniu wzorów (5.3) oraz wobec związków (por. rys. 1)

$$dy = ds \cos \alpha, \quad dx = -ds \sin \alpha,$$

możemy też nadać postać

$$d(F, y) = 0, \quad d(F, x) = 0;$$

stąd znajdziemy

$$F, y = 0, \quad F, x = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma(s)$$

po przyrównaniu stałych całkowania do zera. Warunki te będą spełnione, jeżeli przyjmiemy

$$(5.8) \quad \begin{aligned} F, n &= F, x \cos \alpha + F, y \sin \alpha = 0, \\ F(s) &= \int_{s_0}^s dF = \int_{s_0}^s F, x dx + F, y dy = 0. \end{aligned}$$

W przypadku brzegu płyty utwierdzonego mamy

$$w = 0, \quad w, n = 0.$$

Jeżeli brzeg płyty jest swobodnie podparty, to

$$w = 0, \quad M_n + S_x e_x \cos^2 \alpha + S_y e_y \sin^2 \alpha = 0.$$

Dla swobodnego brzegu obciążonego pionowymi siłami $P(s) > 0$ mamy

$$(5.9) \quad \begin{aligned} M_n + S_x e_x \cos^2 \alpha + S_y e_y \sin^2 \alpha &= 0, \\ Q_n^* &= Q_n + M_{sn, s} + S_x e_{x, x} \cos \alpha + S_y e_{y, y} \sin \alpha + \\ &+ \frac{1}{2} [(S_y e_y - S_x e_x) \sin 2\alpha],_s = P(s), \end{aligned}$$

gdzie Q^* oznacza zastępczą siłę poprzeczną wprowadzoną do teorii płyt cienkich przez KIRCHHOFFA.

W przedstawionych warunkach siły wewnętrzne M_n , Q_n i M_{sn} możemy wyrazić za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha, \\ M_{sn} &= \frac{1}{2} (M_y - M_x) \sin 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha, \\ Q_n &= Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha, \end{aligned}$$

ктыре по увазлэднению (5.3), (4.1)₁ и (4.1)₂ прыбieraя постач нaстэпуючaя:

$$\begin{aligned}
 M_n &= -D\Delta w + (1 - \nu) D (w_{,yy} \cos^2 \alpha + w_{,xx} \sin^2 \alpha - w_{,xy} \sin 2\alpha), \\
 (5.10) \quad M_{ns} &= -(1 - \nu) D [\frac{1}{2} (w_{,yy} - w_{,xx}) \sin 2\alpha - w_{,xy} \cos 2\alpha], \\
 Q_n^* &= S_{x,x} e_x \cos \alpha + S_{y,y} e_y \sin \alpha + (1 - \nu) [D_{,x} (w_{,y})_{,s} - \\
 &\quad - D_{,y} (w_{,x})_{,s}] - (D\Delta w)_{,n}.
 \end{aligned}$$

Представлене в нинейшей працы wzоры станович бэдa подстaвэ нaстэпного артыкулу, dotyczącego zagadnień kształtowania płyt sprężonych, tj. właściwego wyboru kształtów płyty i cięgien oraz odpowiedniego rozkładu w obszarze domkniętym płyty sił wstępного naprężenia cięgien sprężających.

Литература цытована в тексьце

1. Y. GUYON, *Théorie des poutres et dalles en béton précontraint*, Ann. Inst. Techn. B.T.P., 1944.
2. Y. GUYON, *Poutres et dalles précontraintes*, Ann. Inst. Techn. B.T.B., 1944.
3. G. FRANZ, *Grund satzliches zum Vorspannen Von Flachentragwerken*, Beton- und Stahlbetonbau, nr.nr. 4, 5, 6, Berlin 1953.
4. J. GŁOMB, *Wstęп do teorii płyty dwukierunkowo sprężonej*, Arch. Inżyn. Łądown., 4, 4 (1958).
5. J. K. TYSZOWIECKI, *Stan тарцовый a stan гiętны płyt wstęпно sprężonych*, Zesz. Nauk. Polit. Krak., z. 4, Kraków 1961.
6. J. K. TYSZOWIECKI, *Prostokątna płyta sprężona dwukierunkowymi kablami prostymi*, Zesz. Nauk. Polit. Krak., z. 6, Kraków.
7. J. K. TYSZOWIECKI, *Ogólne równanie płyty prostokątnej sprężonej kablami o trasie zakrzywionej*, Czasopismo Techniczne, 5, Kraków 1957.
8. J. K. TYSZOWIECKI, *Problemy statyczne wstęпно sprężonych płyt typu «Lift slab»*, Czasopismo Techniczne, 3, Kraków 1962.
9. J. K. TYSZOWIECKI, *Zginanie płyty prostokątnej sprężonej cięgnami o dowolnej krzywiznie i dowolnym rozkładzie siły sprężającej*, Arch. Inż. Łądown., 2, 10 (1964).
10. J. K. TYSZOWIECKI, *Die Anwendung der Variationsmethoden zur Lösung von Scheiben- und Biege problemen vorgespannter Platten*, Wiss. Zeitschr. Techn. Univ. Dresden, 1, 13 (1964).
11. A. C. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1956.

Резюме

СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ПЛАСТИНОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В работе рассматриваются произвольные пластинки переменной толщины подверженные конечным вертикальным перемещениям и предварительно напряженные в двух направлениях, с помощью тонких струн произвольной формы e_x и e_y , образующих в плане, две взаимно ортогональные системы k_x и k_y . Эти струны предварительно напряжены силами S_x и S_y , с произвольно переменным распределением в домкнутой области пластинки.

Условие непрерывности (3.6) и шесть уравнений равновесия (4.1) и (4.2) в деформированном состоянии, сводятся к двум уравнениям с частными произвольными (5.4) по неизвестным функциям F и w , описывающих статическое напряженное и деформированное состояние

предварительно напряженных пластинок. Формулируются, также, краевые условия, касающиеся основных видов опирания краев.

Формулы, приведенные в работе, будут основой рассуждений следующей статьи, касающейся вопроса определения формы предварительно напряженных пластинок.

S u m m a r y

EQUATIONS OF INTERCONNECTED PLATES OF VARIABLE THICKNESS

The object of the considerations are plates of any form and variable thickness, undergoing finite vertical displacement and interconnected in two directions by means of elements of any form, e_x and e_y , constituting in the horizontal plane two orthogonal sets k_x and k_y . The elements are prestressed with the forces S_x and S_y of any distribution in the closed region of the plate.

The continuity equation (3.6) and the six equilibrium equations (4.1) and (4.2) in the deformed state are reduced to two equations (5.4) with partial derivatives with respect to the unknown functions F and w describing the state of stress and strain of the plates. The boundary conditions are formulated for the fundamental types of edge support.

The equations contained in this paper will constitute a basis for the next paper devoted to the design problem of prestressed plates.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 maja 1965 r.