

DRGANIA WYMUSZONE PARAMETRYCZNIE W UKŁADZIE Z NIELINIOWĄ BEZWŁADNOŚCIĄ

RYSZARD GRYBOŚ (GLIWICE)

1. Wstęp

Jedną z charakterystycznych cech układów nieliniowych jest możliwość wzbudzenia w nich drgań o częstościach ω różnych od częstości θ siły wymuszającej. Stosunek ω/θ może wyrażać się ułamkiem n/m , gdzie n , m są dowolnymi liczbami naturalnymi; wtedy mówimy o istnieniu rezonansu subharmonicznego rzędu n/m . Przy $n/m = 1/2$ występuje tzw. rezonans główny. Ma on podstawowe znaczenie techniczne z uwagi na szczególnie silną niestateczność układu drgającego (duże amplitudy) oraz największą szerokość obszaru niestateczności.

Rezonans subharmoniczny był przedmiotem licznych badań [1-3, 5-8, 10-13], przy czym najwięcej uwagi poświęcono układom z nieliniowością typu Duffinga. W niniejszej pracy zajmiemy się dynamiką układu z nieliniową bezwładnością z uwagi na możliwość wzbudzenia drgań subharmonicznych rzędu $1/2$ przy wymuszeniu parametrycznym.

Zagadnieniem tym zajmowali się W. W. BOŁOTIN [2] i G. SCHMIDT [11]. Pierwszy z nich przeprowadził obliczenia przybliżone opierając się na wariacyjnej metodzie Galerkina; autor ten stwierdza (str. 139), iż problem wymaga dalszych badań. W. W. BOŁOTIN rozpatrywał także zagadnienie sprzężonych drgań podłużno-giętnych pręta z masą skupioną na końcu ruchomym, jednakże w rozważaniach tych pomijał masę samego pręta ([2], § 31).

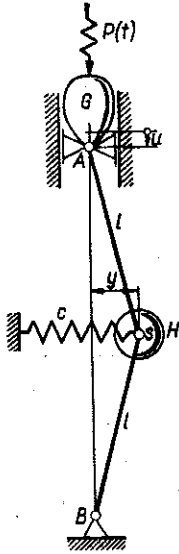
G. SCHMIDT badał omawiane zagadnienie w ujęciu ogólniejszym, uwzględniając oprócz nieliniowej bezwładności także nieliniową sprężystość oraz nieliniowe tłumienie. Przy zastosowaniu bardziej precyzyjnego niż BOŁOTIN aparatu matematycznego otrzymał on jednakże wyniki mało przejrzyste, nie uwydatniające wpływu nieliniowej bezwładności na powstawanie rezonansu.

W tym sensie rozważania poniższe stanowią uzupełnienie badań nad głównym rezonansem subharmonicznym w układzie z nieliniową bezwładnością.

2. Równanie drgań

Weźmy pod uwagę układ przedstawiony na rys. 1. Istnienie ciężarka G , który jest związany z ruchomym przegubem A , sprawia, że w równaniu ruchu ciężarka H pojawia się wyraz charakterystyczny dla tzw. nieliniowej bezwładności. Zakłada się, że pręty AS i BS są nieważkie, a sprężyna ma liniową charakterystykę i sztywność c .

W pracy [4] rozpatrzono drgania swobodne takiego układu, przy czym wskazano tam na jego analogię z prętem ciągłym z dodatkowym ciężarem na końcu, o ile pominiemy ściśliwość osi pręta, czyli założymy nieskończenie wielką prędkość propagacji fali sprężystej. To ostatnie uproszczenie jest równoznaczne z pominięciem drgań podłużnych pręta.



Rys. 1

Niechaj na przegub ruchomy działa siła

$$P(t) = P_0 + P_t \cos \Theta t, \quad P_0, P_t, \Theta = \text{const}$$

w kierunku prostej pionowej, przechodzącej przez punkty A i B .

Ponieważ przemieszczenie u punktu przyłożenia siły związane jest z przemieszczeniem y ciężarka H zależnością przybliżoną $u = y^2/l$ (por. [4], wzór (2.7)), przeto przesunięcie przygotowane $\delta u = 2y\delta y/l$, a praca przygotowana siły $P(t)$

$$P(t) \delta u = 2(P_0 + P_t \cos \Theta t) y \delta y/l.$$

Jest to zatem wymuszenie parametryczne względem przemieszczeń y . Jeżeli uwzględnimy tarcie liniowe (o współczynniku h), towarzyszące poziomym przemieszczeniom ciężarka H , to otrzymamy następujące równanie ruchu (por. [4], równanie (3.1)):

$$(2.1) \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} + h \frac{dy}{d\tau} + \omega^2 y + \frac{\kappa}{l^2} \left[\frac{d^2 y}{d\tau^2} y^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 y \right] = (p_0 + p_t \cos \theta \tau) y,$$

gdzie

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tau &\equiv t \sqrt{g/l}, & \theta &\equiv \Theta \sqrt{l/g}, & p_0 &\equiv 2P_0/H > 0, & p_t &\equiv 2P_t/H > 0, \\ \kappa &\equiv 1 + 4G/H, & \omega^2 &\equiv (cl - H - 2G)/H > 0. \end{aligned}$$

Jeżeli w (2.1) pominąć wyraz nieliniowy, to otrzymamy równanie Mathieu, co jest oczywiste z uwagi na parametryczny charakter wymuszenia. Teoria tego równania jest dobrze znana (np. [9]). Jednakże nieliniowa bezwładność, jak się przekonamy, wprowadza istotne zmiany w zachowaniu się pręta obciążonego pulsującą siłą osiową.

Zauważmy, iż równanie (2.1) jest silnie nieliniowe, albowiem współczynnik κ/l^2 , stojący przed wyrazem nieliniowym, na ogół nie może być traktowany jako mały wobec pozostałych współczynników równania, gdyż $\kappa \in (1, \infty)$.

Jeżeli wprowadzimy współzrędną uogólnioną $x = \kappa y/l$, a różniczkowanie względem τ oznaczać będziemy kropką, to (2.1) przyjmie następującą postać:

$$(2.3) \quad \ddot{x} + h\dot{x} + n^2 x + \frac{1}{\kappa} (-px \cos \theta \tau + \ddot{x}x^2 + \dot{x}^2 x) = 0;$$

tutaj $p \equiv \kappa p_t$, zaś $n \equiv (\omega^2 - p_0)^{1/2}$ jest bezwymiarową częstością własną układu liniowego (tzn. bez ciężarka G) przy działaniu stałej siły osiowej P_0 przyłożonej w przegubie A .

3. Główny rezonans parametryczny przy $\theta = 2n$

Rozpatrzmy najpierw istotny dla dalszych rozważań przypadek, kiedy pulsacja siły wymuszającej $\theta = 2n$. Pomijając na razie tłumienie ($h \equiv 0$) otrzymamy zamiast (2.3)

$$(3.1) \quad \ddot{x} + n^2 x + \frac{1}{\kappa} (-p \cos 2n\tau + \ddot{x}x + \dot{x}^2) x = 0.$$

Nie trudno przekonać się, że równanie to posiada rozwiązanie subharmoniczne:

$$(3.2) \quad x = a_n \sin n\tau \equiv x_n, \quad a_n = \text{const} > 0,$$

które jest rozwiązaniem dokładnym. Podstawienie (3.2) w (3.1) daje bowiem równanie

$$(a_n/\kappa) (n^2 a_n^2 - p) \sin n\tau \cos 2n\tau = 0,$$

które jest spełnione niezależnie od τ dla $a_n = \sqrt{p}/n$. Oznacza to, że przy $\theta = 2n$ można w układzie wzbudzić «czyste» drgania subharmoniczne rzędu $1/2$, tzn. bez udziału wyższych harmonicznnych.

Powstaje pytanie, czy drgania te mogą wystąpić przez dowolnie długi okres czasu. Odpowiedź na nie daje analiza stateczności rozwiązania (3.2).

W tym celu zbadajmy zachowanie się układu po wywołaniu małego zaburzenia w jego ruchu. Przypuśćmy, że amplitudę drgań ciężarka H zmieniliśmy nieznacznie o a , tzn. $a = a_n + a$. Ponieważ w układach nieliniowych zmiana amplitudy pociąga za sobą zmianę okresu drgań, przeto, aby zachować ich subharmoniczny charakter względem wymuszenia, musimy ponadto uwzględnić zmianę częstości drgań. Dlatego zamiast $\sin n\tau$ będziemy pisali $\sin(n\tau + \sigma)$. Odnośnie wariacji a i σ zauważmy, że są one wielkościami:

1) zmiennymi, tzn. $a = a(\tau)$, $\sigma = \sigma(\tau)$,

2) na tyle małymi, że wyrazy zawierające a^2 , σ^2 , $a\sigma$ itp. mogą być pominięte. Wtedy podstawienie $x = (a_n + a) \sin(n\tau + \sigma)$ do (3.1) daje równanie

$$\left[\ddot{a} - 2na_n \dot{\sigma} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{3}{4} a_n^2 \ddot{a} - \frac{3}{2} n^2 a_n^2 a - na_n^3 \dot{\sigma} + \frac{1}{2} pa \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\kappa} (n^2 a_n^3 - pa_n) \right] \sin(n\tau + \sigma) + \left[2n\dot{a} + a_n \dot{\sigma} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2} na_n^2 \dot{a} + \frac{1}{4} a_n^3 \ddot{\sigma} \right) \right] \times \\ \times \cos(n\tau + \sigma) + \text{wyrazy zawierające wyższe harmoniczne} = 0.$$

Badając stateczność subharmoniki podstawowej uwagę naszą możemy skupić wyłącznie na wyrażeniach stojących przy $\sin(n\tau + \sigma)$ i $\cos(n\tau + \sigma)$. Uwzględnivszy, że $a_n = \sqrt{p}/n$, otrzymujemy następujące równania w wariacjach:

$$(3.3) \quad \ddot{a} - 2\sqrt{p} \dot{\sigma} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{3}{4n^2} p \ddot{a} - pa - \frac{1}{n^2} p^{3/2} \dot{\sigma} \right) = 0$$

oraz

$$(3.4) \quad 2n\dot{a} + \frac{1}{n} \sqrt{p} \dot{\sigma} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2n} p \dot{a} + \frac{1}{4n^3} p^{3/2} \ddot{\sigma} \right) = 0.$$

Jeżeli rozwiązanie tego układu równań jest stateczne, wówczas to samo można powiedzieć o rozwiązaniu równania (3.1). Badanie równania w wariacjach jest bowiem równoważne określeniu czy amplituda drgań opisanych równaniem (3.1) wzrasta, czy też maleje z upływem czasu po zaburzeniu.

Weźmy najpierw pod uwagę równanie (3.4); jeżeli przepiszemy je w postaci

$$2n(1+p/4\kappa n^2)\dot{a} = -(\sqrt{p}/n)(1+p/4\kappa n^2)\ddot{\sigma},$$

to po uproszczeniu przez $(1+p/4\kappa n^2) \neq 0$ i po scałkowaniu otrzymamy

$$(3.5) \quad \dot{\sigma} = -\frac{2n^2}{\sqrt{p}}a + \text{const.}$$

Następnie wynik ten podstawiamy w (3.3) otrzymując ostatecznie

$$(3.6) \quad (1+3p/4\kappa n^2)\ddot{a} + (4n^2+p/\kappa)a = \text{const.}$$

Ponieważ wszystkie wyrazy zawarte w obu nawiasach są dodatnie, przeto równanie powyższe opisuje ruch harmoniczny prosty. Wynika stąd, że a jest okresową funkcją τ o stałej amplitudzie. Amplitudalne zaburzenie ruchu nie wzrasta, ani też nie maleje wraz z czasem, wywołując jedynie tzw. dudnienie, czyli drgania o amplitudzie oscylującej pomiędzy wartościami a_n+a i a_n-a . Jest to szczególny przypadek równowagi dynamicznej o charakterze obojętnym, który można uznać jako szczególny przypadek stateczności orbitalnej. Wynik ten niewątpliwie jest rezultatem pominięcia oporów ruchu, albowiem przy uwzględnieniu liniowego tłumienia otrzymalibyśmy znany efekt asymptotycznego zanikania amplitudy zaburzenia. O ile jakieś zaburzenie ruchu zanika przy $t \rightarrow \infty$, to analizowane drgania układu są asymptotycznie stateczne.

Zagadnienie to rozpatrzmy jeszcze w ogólniejszym ujęciu w p. 6 przeprowadzając odpowiednie rozważania energetyczne. Ostatecznie stwierdzamy, że przy parametrycznym wzbudzeniu drgań siłą o dowolnej amplitudzie i częstotliwości $\theta = 2n$ w rozpatrywanym układzie dynamicznym pojawią się stateczne drgania subharmoniczne rzędu 1/2.

4. Rezonans parametryczny przy $\theta \neq 2n$. Równanie energii

Jeżeli $\theta \neq 2n$, to oprócz podstawowej subharmoniki rzędu 1/2 wystąpią jeszcze harmoniczne wyższych rzędów. Aby ustalić warunki, przy których możliwe jest w tym przypadku wzbudzenie ustalonych drgań subharmonicznych, wykorzystamy metodę małego parametru przy równoczesnym zastosowaniu wariacji stałych. Ten sposób podejścia (stosowany w nieco odmiennej postaci przez STRUBLE'A i YIHOULISA [12]) jest szczególnie korzystny w rozpatrywanym tutaj zagadnieniu, albowiem prowadzi do układu równań nieliniowych, które dają się scałkować przez kwadraturę.

Najpierw musimy wprowadzić do rozważań mały parametr ε . Jako taki można uznać odwrotność współczynnika nieliniowości $\kappa = 1+4G/H > 1$, czyli

$$(4.1) \quad \varepsilon = \frac{1}{\kappa} = \frac{H}{H+4G}, \quad \varepsilon > 0.$$

Poza tym, z uwagi na dalsze rozważania, będziemy przyjmowali, że częstość wymuszenia θ może być zmienna pisząc $p \cos 2\psi(\tau)$, tak że chwilowa wartość tej częstości $\theta = 2\dot{\psi}$. Zaniedbując w dalszych rozważaniach tłumienie otrzymamy następujące równanie ruchu w postaci quasi-liniowej:

$$(4.2) \quad \ddot{x} + n^2 x = \varepsilon (px \cos 2\psi - \ddot{x}x^2 - \dot{x}^2 x).$$

W punkcie 3 wykazaliśmy, że gdy $\theta = 2n$, to równanie (4.2) ma rozwiązanie subharmoniczne $x_n = a_n \cos n\tau$, w którym amplituda $a_n = \sqrt{p/n} = \text{const}$. Gdy $\theta \neq 2n$, to zarówno amplitudę a , jak i częstość k drgań będziemy traktować jako wielkości zmienne, tzn. $a = a(\tau)$, $k = k(\tau)$. Badając drgania subharmoniczne musimy oczywiście założyć, że w każdej chwili spełniona jest równość $\theta = 2k$, czyli $k = \dot{\psi}(\tau)$. W związku z tym subharmoniczne rozwiązanie równania (4.2) w N -tym przybliżeniu przyjmiemy w postaci następującego szeregu skończonego:

$$(4.3) \quad x(\tau) = a(\tau) \sin \psi(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots + \varepsilon^N x_N(\tau).$$

Ograniczymy się do rozwiązania w pierwszym przybliżeniu. Podstawienie (4.3) do (4.2) przy zachowaniu wyrazów zawierających ε w potęgę nie wyższej od 1 daje następujące równanie:

$$(4.4) \quad [\ddot{a} + (n^2 - \dot{\psi}^2) a] \sin \psi + (2\dot{a}\dot{\psi} + a\ddot{\psi}) \cos \psi + \varepsilon (\ddot{x}_1 + n^2 x_1) = \\ = \frac{\varepsilon}{4} [-2pa - 3(\ddot{a}a + \dot{a}^2)a + 2a^3 \dot{\psi}^2] \sin \psi + \frac{\varepsilon}{4} (-a^3 \ddot{\psi} - 2\dot{a}a^2 \dot{\psi}) \cos \psi + \\ + \frac{\varepsilon}{4} [2pa + (\ddot{a}a + \dot{a}^2)a - 2a^3 \dot{\psi}^2] \sin 3\psi + \\ + \frac{\varepsilon}{4} (a^3 \ddot{\psi} + 2\dot{a}a^2 \dot{\psi}) \cos 3\psi + O(\varepsilon^2).$$

Równanie to będzie spełnione z dokładnością do małych rzędu ε^2 , jeżeli przyjmiemy

$$(4.5) \quad \ddot{a} + (n^2 - \dot{\psi}^2) a = -\frac{1}{2} \varepsilon pa - \frac{3}{4} \varepsilon (\ddot{a}a + \dot{a}^2) a + \frac{1}{2} \varepsilon a^3 \dot{\psi}^2,$$

$$(4.6) \quad 2\dot{a}\dot{\psi} + a\ddot{\psi} = -\frac{1}{4} \varepsilon a^3 \ddot{\psi} - \frac{1}{2} \varepsilon \dot{a}a^2 \dot{\psi},$$

$$(4.7) \quad \ddot{x}_1 + n^2 x_1 = \frac{1}{4} [2pa + (\ddot{a}a + \dot{a}^2) a - 2a^3 \dot{\psi}^2] \sin 3\psi + \frac{1}{4} (a^3 \ddot{\psi} + 2\dot{a}a^2 \dot{\psi}) \cos 3\psi.$$

Weźmy najpierw pod uwagę równanie (4.6); przepisujemy je w postaci następującej:

$$2\dot{a}\dot{\psi} (1 + \varepsilon a^2/4) = -a\ddot{\psi} (1 + \varepsilon a^2/4);$$

stąd

$$2\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}},$$

a uwzględniając, że $\ddot{\psi} = d\dot{\psi}/d\tau$, mamy po wyeliminowaniu τ autonomiczne równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$2 \frac{da}{a} = - \frac{d\dot{\psi}}{\dot{\psi}}.$$

Całkowanie daje $a^2 \dot{\psi} = \text{const}$, przy czym stałą całkowania wyznaczmy z warunku, że dla $\dot{\psi} = n$, tzn. $\theta = 2n$ mamy $a = \sqrt{p/n}$; ostatecznie otrzymujemy następującą całość równania (4.6):

$$(4.8) \quad a^2 \dot{\psi} = p/n.$$

Wzór powyższy wymaga pewnego wyjaśnienia. Siła wymuszająca działając na rozpatrywany układ dynamiczny z dowolną częstością θ na ogół wprowadza ten układ w stan nieustalony, czyli wywołuje drgania o zmiennej amplitudzie. Wiadomo jednak, że w układach nieliniowych okres drgań zależy od amplitudy. Jeżeli zatem drgania mimo ich nieustalonego charakteru mają być subharmoniczne względem wymuszenia, tzn. w każdej chwili ma być spełniona równość $\theta = 2k$, to częstość chwilowa $\dot{\psi}$ drgań podstawowych, a tym samym częstości wymuszenia $2\dot{\psi}$ muszą zmieniać się odpowiednio do zmieniającej się amplitudy. Tą «odpowiedniość» w układzie z nieliniową bezwładnością określa właśnie wzór (4.8).

Przejdźmy z kolei do równania (4.5). Jeżeli wprowadzimy do rozważań prędkość zmiany amplitudy $\dot{a} = b$, to $\ddot{a} = b db/da$, a wyraz charakterystyczny dla nieliniowej bezwładności przekształca się następująco (por. [4], p. 5.1):

$$a(\ddot{a}a + \dot{a}^2) = a(a\dot{a})' = a(ab)' = a \frac{d(ab)}{da} \dot{a} = ab \frac{d(ab)}{da}.$$

Po dokonaniu tych podstawień okazuje się, że w równaniu (4.5) można także rozdzielić zmienne:

$$b db + \left[\left(n^2 + \frac{1}{2} \varepsilon p \right) a - \frac{\varepsilon p^2}{2n^2} \frac{1}{a} - \frac{p^2}{n^2} \frac{1}{a^3} \right] da + \frac{3}{4} \varepsilon ab d(ab) = 0.$$

Jest to już równanie autonomiczne; po scałkowaniu otrzymujemy

$$(4.9) \quad b^2 + (n^2 + \varepsilon p/2) a^2 - \varepsilon (p/n)^2 \ln a + (p/n)^2 a^{-2} + (3/4) \varepsilon a^2 b^2 = c_0.$$

Pierwsza całka równania ruchu jak wiadomo określa energię mechaniczną układu. Ponieważ w równaniu (4.9) występują nie dowolne, lecz amplitudalne wartości wychylenia, przy których energia kinetyczna jest równa zeru, przeto lewa strona wspomnianego równania określa amplitudalną wartość energii potencjalnej układu.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$(4.10) \quad (n^2 + \varepsilon p/2) a^2 + (p/n)^2 a^{-2} - \varepsilon (p/n)^2 \ln a \equiv \Phi(a), \\ 1 + (3/4) \varepsilon a^2 \equiv \Psi(a),$$

to dla danych warunków początkowych $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$ stałą całkowania określa wzór

$$(4.11) \quad c_0 = \Phi(a_0) + b_0^2 \Psi(a_0).$$

Równanie energii przy oznaczeniach (4.10) przyjmuje postać następującą:

$$(4.12) \quad \Phi(a) + b^2 \Psi(a) = c_0.$$

Wynika z niego, że amplitudalna wartość energii potencjalnej układu jest stała nawet w stanie nieustalonym, tzn. przy $b \neq 0$, o ile tylko zachowany zostanie przy tym warunek rezonansu $\theta = 2k$. Tym niemniej amplitudalna energia kinetyczna, a tym samym i całkowita energia mechaniczna układu w stanie nieustalonym może ulegać zmianie.

Stałe a_0 i b_0 oznaczają amplitudę oraz prędkość jej zmiany w momencie początkowym, tzn. w chwili, kiedy zaczęła działać siła wymuszająca. Ze wzoru (4.10) wynika, że dla $a \rightarrow 0$, $\Phi(a) \rightarrow \infty$, przeto, aby $c_0 < \infty$, powinno być $a_0 > 0$. Wnioskujemy stąd, że dla wywołania drgań wymuszonych układ w momencie przyłożenia siły $P(\tau)$ powinien już znajdować się w stanie wstępnego wzbudzenia, przy czym b_0 może być dodatnie, ujemne lub równe zeru.

5. Stany ustalone i nieustalone. Portrety fazowe

W stanie nieustalonym amplituda drgań zmienia się, czyli $b \neq 0$. Zależność $b(a)$ można wyznaczyć z równania energii (4.12):

$$(5.1) \quad b = \left[\frac{c_0 - \Phi(a)}{\Psi(a)} \right]^{1/2}.$$

Jeżeli zrealizujemy odpowiednie warunki wymuszenia (o których będzie mowa w dalszym ciągu), to można układ doprowadzić do stanu ustalonego, w którym wystąpią drgania subharmoniczne o stałej amplitudzie $a = a_*$.

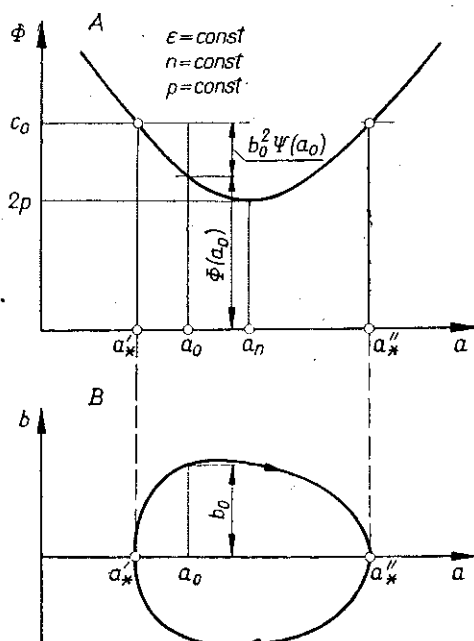
Ponieważ wtedy $b = 0$, przeto wartości a_* są miejscami zerowymi równania

$$(5.2) \quad \Phi(a_*) = c_0.$$

Zagadnieniem stateczności tych drgań zajmiemy się w punkcie następnym.

Przy ustalonych wartościach ε, n, p obrazem funkcji $\Phi(a)$ jest krzywa przedstawiona na rys. 2A.

Łatwy rachunek wykazuje, że funkcja $\Phi(a)$ ma minimum bezwzględne zawsze, tzn. przy każdej dodatniej wartości liczb ε, n i p . Jest rzeczą znaną, iż dla $\varepsilon p \ll n^2$ (co w praktyce przeważnie ma miejsce) minimum to występuje przy $a = \sqrt{p/n} \equiv a_n$, czyli gdy $\theta = 2n$ i jest bliskie wartości $2p$. Widzimy zatem, że «czyste» drgania subharmoniczne, omówione w p. 3, występują przy minimum funkcji $\Phi(a)$; wiąże się

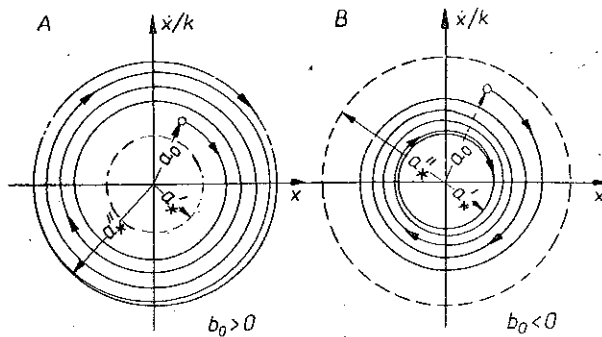


Rys. 2

to ze szczególnym stanem równowagi układu, o czym będzie jeszcze mowa w punkcie następnym.

Mając do dyspozycji krzywą $\Phi(a)$ możemy wyznaczyć amplitudy drgań ustalonych, oczywiście, jeżeli ponadto określony mamy stan początkowego wzbudzenia za pomocą parametrów a_0 i b_0 . W tym celu do rzędnej $\Phi(a_0)$ dodajemy odcinek $b_0^2 \Phi(a_0)$, poczem przez jego koniec prowadzimy prostą poziomą do przecięcia z krzywą $\Phi(a)$. Z wyjątkiem przypadku $a_0 = a_n$ oraz $b_0 = 0$, kiedy wspomniana prosta jest styczna, otrzymujemy zawsze dwa punkty przecięcia, których odcięte a'_* i a''_* wyznaczają amplitudy drgań ustalonych. Nie trudno bowiem zauważyć, że tylko w tych punktach spełniona jest równość (5.2).

Jeżeli w układzie współrzędnych a, b wykreślimy zależność $b(a)$, wykorzystując w tym celu wzór (5.1), to otrzymamy pewną zamkniętą trajektorię, która przecina oś odciętych w punktach a'_* i a''_* (rys. 2B). Ponieważ dodatnim wartościom b towarzyszy narastanie amplitudy, a ujemnym — zmniejszanie, przeto punkt reprezentujący stan kinematyczny układu może w górnej półpłaszczyźnie (gdzie $b > 0$) przemieszczać się po trajektorii tylko z lewa na prawo, a w dolnej (gdzie $b < 0$) — na odwrót. Odpowiada to stanom przejściowym, po których następuje ustalenie się drgań z amplitudą a'_* (przy $b_0 < 0$) lub a''_* (przy $b_0 > 0$). Widoczna jest decydująca w tym względzie rola znaku prędkości początkowej b_0 .



Rys. 3

Zagadnienie to obrazują również krzywe fazowe wykreślone w układzie «wychylenie — prędkość ciężarka H ». Ograniczając rozważania wyłącznie do podstawowej subharmoniki zachowujemy w szeregu (4.3) tylko wyraz główny, tzn. pierwszy. Wtedy dla $x(\tau) = a(\tau) \sin \psi(\tau)$ mamy $\dot{x}(\tau) = a(\tau) k(\tau) \cos \psi(\tau) + b(\tau) \sin \psi(\tau)$ i eliminując w tych wzorach τ znajdujemy zależność $x = f(\dot{x}/k)$; jej obrazem są portrety fazowe przedstawione na rys. 3. W stanie nieustalonym, gdy $b \neq 0$, otrzymujemy spirale o równaniu

$$\dot{x} = \frac{b}{a} x + \frac{p}{na} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Przy wyprowadzaniu tej zależności częstość k wycelowano za pomocą wzoru (4.8).

O ile prędkość zmiany amplitudy jest niewielka, to nie trudno określić «skok» spirali, czyli zmianę Δa amplitudy za okres T . W tym przypadku możemy bowiem

przyjąć w przybliżeniu $\Delta a/T \approx b$, a ponieważ przy częstotliwości k , która wg (4.8) wynosi p/na^2 , mamy $T = 2\pi/k = 2\pi na^2/p$, przeto ostatecznie $\Delta a \approx 2\pi na^2 b/p$; zależność $b(a)$ podaje wzór (5.1). Przy $b_0 > 0$, a tym samym $b > 0$, mamy $\Delta a > 0$, czyli promień wodzący punktu poruszającego się po spirali po każdym pełnym obrocie zwiększa się o Δa ; oznacza to, że spirala «rozwija się» (rys. 3A). Natomiast przy $b_0 < 0$ mamy $\Delta a < 0$ i punkt porusza się w kierunku odwrotnym (rys. 3B).

W obu przypadkach spirale te w miarę ustalania się drgań przechodzą w okręgi o promieniach a'_* lub a''_* . Aby to udowodnić, wystarczy do wzorów na $x(\tau)$ i $\dot{x}(\tau)$ podstawić $b = 0$, $a = a'_*$ lub a''_* ; otrzymujemy wtedy $x(\tau) = a_* \sin \psi(\tau)$ oraz $\dot{x}(\tau)/k = a_* \cos \psi(\tau)$, a więc parametryczne równanie okręgu.

Należy podkreślić z naciskiem, że wspomniane «przechodzenie» spirali w okrąg nie ma charakteru asymptotycznego «nawijania» się trajektorii fazowej na tzw. cykl graniczny, jak to ma miejsce przy drganiach samowzbudnych. W rozważanym przypadku nie może być mowy o cyklu granicznym w klasycznym znaczeniu tego terminu, albowiem

- 1) wymuszenie jest okresowo zmienne,
- 2) rozpatrujemy układ zachowawczy.

Gdy $\theta = 2n$ i $b_0 = 0$, trajektoria $b(a)$ degeneruje się do punktu, a w płaszczyźnie fazowej $(x, \dot{x}/k)$ otrzymujemy pojedynczy okrąg o promieniu a_n , który określa jedyną możliwą w tym przypadku amplitudę drgań ustalonych.

Należy podkreślić, że stany nieustalone reprezentowane przez krzywe z rys. 2B lub 3 występują tylko wtedy, gdy zachowany jest warunek rezonansu, tzn. $\theta = 2k$; dlatego krzywe te będziemy w dalszym ciągu nazywać trajektoriami rezonansowymi. Realizacja tych drgań wymaga oczywiście odpowiedniej [w sensie stosowalności wzoru (4.8)] modulacji częstotliwości wymuszenia.

W związku z tym drganiom ustalonym z amplitudą a_* odpowiada ściśle określona częstotliwość wymuszenia θ i na odwrót; parametry te są bowiem powiązane zależnością

$$(5.3) \quad \theta = 2p/na_*^2,$$

wynikającą ze wzoru (4.8).

Amplitudalne wychylenie ciężarka H , czyli maksymalne wygięcie pręta reprezentowanego przez model pokazany na rys. 1, obliczamy następująco:

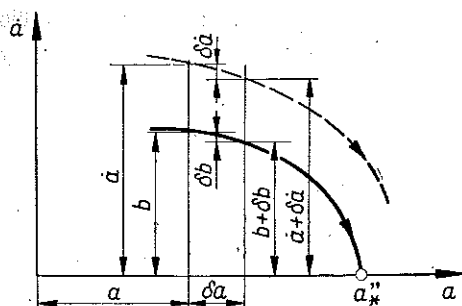
$$(5.4) \quad |\max y| = (1/\kappa) |\max x| = \epsilon la_*.$$

6. Badanie stateczności drgań

Zbadajmy stateczność drgań subharmonicznych rozpatrywanych w dwóch poprzednich rozdziałach. Jak zwykle przy badaniach tego rodzaju wywołujemy w układzie drgającym małe zaburzenie za pomocą pewnego impulsu zewnętrznego. O stateczności lub niestateczności drgań będziemy rozstrzygać na podstawie analizy stanów energetycznych układu przed i po zaburzeniu.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, kiedy układ znajduje się w stanie nieustalonym tak, że amplituda zmienia się z pewną prędkością chwilową \dot{a} . Jeżeli mimo tego

zachowany jest warunek rezonansu subharmonicznego, tzn. częstość wymuszenia jest stale dwukrotnie większa od chwilowej częstości drgań ciężarka H , to $\dot{a} = b$ i punkt reprezentujący stan kinematyczny układu porusza się po trajektorii rezonansowej, przedstawionej na rys. 4 linią ciągłą.



Rys. 4

Jak wynika z rozważań przeprowadzonych w p. 4 amplitudalna energia potencjalna układu jest wtedy stała i zgodnie ze wzorem (4.12)

$$(6.1) \quad V(a, b) = \Phi(a) + b^2 \Psi(a) = \text{const.}$$

O ile jednak warunek rezonansu $\theta = 2k$ nie jest spełniony, to $\dot{a} \neq b$, w związku z czym otrzymamy inną trajektorię nierezonansową; na rys. 4 oznaczono ją linią przerywaną. Amplitudalna wartość energii potencjalnej układu w tym przypadku nie jest już stała w czasie:

$$(6.2) \quad V(a, \dot{a}) = \Phi(a) + \dot{a}^2 \Psi(a) = \text{var.}$$

Przypuśćmy, że stan kinematyczny układu przed zaburzeniem scharakteryzowany był parametrami a i \dot{a} . Przyłożenie impulsu zewnętrznego spowodowało zmianę amplitudy o δa oraz zmianę prędkości \dot{a} o $\delta \dot{a}$ (rys. 4). Związana z tym zmiana energii potencjalnej układu

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial a} \delta a + \frac{\partial V}{\partial \dot{a}} \delta \dot{a}$$

lub po wykorzystaniu wzoru (6.2)

$$(6.3) \quad \delta V = \frac{\partial \Phi}{\partial a} \delta a + \dot{a}^2 \frac{\partial \Psi}{\partial a} \delta a + 2\dot{a} \Psi \delta \dot{a}.$$

Znak wariacji δV będzie decydował o stateczności drgań. Jeżeli $\delta V > 0$, to znaczy, że stanowi zaburzonemu odpowiada wyższy poziom energetyczny, czyli dla przeprowadzenia układu w ten stan należy dostarczyć do niego pewną ilość energii z zewnątrz. Wynika stąd dalej, że drgania w stanie niezaburzonym odbywały się przy minimum energii potencjalnej, co zgodnie z kryterium Lagrange'a-Dirichleta dowodzi stateczności drgań. Gdy $\delta V < 0$, mamy drgania niestateczne, natomiast przy $\delta V = 0$ występuje stan równowagi dynamicznej o charakterze obojętnym. Stan ten występuje m.in. przy rezonansowych drganiach nieustalonych, które odbywają się przy $V = \text{const.}$

Teraz już możemy rozstrzygnąć kwestię stateczności drgań ustalonych. Gdy $a = a_* = \text{const.}$, to $\dot{a} = 0$ i wzór (6.3) daje

$$(6.4) \quad [\delta V]_* = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]_* \delta a,$$

gdzie $[]_*$ oznacza wartość wyrażenia ujętego nawiasem w punkcie $a = a_*$. Zbadajmy najpierw drgania z amplitudą a_*' . Trajektoria rezonansowa (a także ewentualna inna trajektoria nierezonansowa) «dociera» do tego punktu poprzez dodatnie wartości \dot{a} , czemu odpowiada przyrost amplitudy, a więc $\delta a > 0$. Z drugiej strony patrząc na rys. 2A widzimy, że punkt $a = a_*'$ leży w tym przedziale wartości a , w którym krzywa $\Phi(a)$ jest monotonicznie rosnąca i dlatego $[\partial\Phi/\partial a]_*' > 0$. Okazuje się przeto, że $[\delta V]_*' > 0$, czyli ustalone drgania z amplitudą a_*' są stateczne.

Analogiczny wynik otrzymujemy dla drgań z amplitudą a_*'' ; w tym przypadku mamy bowiem $\delta a < 0$ oraz $[\partial\Phi/\partial a]_*'' < 0$, co w iloczynie daje także $[\delta V]_*'' > 0$.

Zanalizujmy jeszcze pokrótce przypadek rezonansu przy $\theta = 2n$, rozpatrywany szczegółowo w p. 3. Wtedy amplituda drgań ustalonych $a_* = a_n$. Ale w p. 5 stwierdziliśmy, że przy tej wartości a występuje minimum funkcji $\Phi(a)$, a zatem w tym punkcie $\partial\Phi/\partial a = 0$. Tym samym $[\delta V]_* = 0$, czyli mamy tu stan równowagi obojętnej; jest to rezultat analogiczny z uzyskanym na innej drodze w p. 3.

Zauważmy jeszcze, że przez odpowiednią modulację częstości θ można w układzie zrealizować tzw. dudnienie, czyli drgania o amplitudzie «tętniącej» pomiędzy wartościami a_*' i a_*'' . Punkt reprezentujący obiega wtedy trajektorię rezonansową okresowo dookoła w kierunku pokazanym na rys. 2B strzałkami. Natomiast w płaszczyźnie fazowej $x, \dot{x}/k$ obserwujemy cykliczny ruch tego punktu po spiralach związających i rozwijających się, jak na rys. 3A i 3B, z tym jednak, że są to spirale «pełne», tzn. ich punkty początkowe i końcowe leżą na odpowiednich okręgach granicznych.

7. Składowa harmoniczna rzędu 3/2

Jeżeli $\theta \neq 2n$, a tym samym $p(na_*)^{-2} \neq 1$, to oprócz subharmoniki podstawowej wystąpią jeszcze harmoniczne wyższych rzędów. Rozpatrzmy bardziej szczegółowo składową rzędu 3/2, albowiem amplituda tych drgań w pewnych warunkach może osiągnąć wartości godne uwagi. Drgania harmoniczne rzędu 3/2 opisane są równaniem (4.7), przy czym dla stanu ustalonego należy do prawej strony tego równania podstawić $a = a_*$, $\dot{\psi} = p/na_*^2$, $\dot{a} = \ddot{a} = \ddot{\psi} = 0$. W rezultacie otrzymujemy równanie

$$(7.1) \quad \ddot{x}_1 + n^2 x_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{n^2 a_*^2} \right) p a_* \sin 3\theta\tau,$$

którego całka szczególna $x_1 = h_* \sin 3\theta\tau$, gdzie

$$(7.2) \quad h_* \equiv \frac{p a_*}{2n^2} \frac{1 - p(na_*)^{-2}}{1 - 9p^2(na_*)^{-4}}.$$

A zatem subharmoniczne rozwiązanie równania ruchu (4.2) dla drgań ustalonych w pierwszym przybliżeniu ma następującą postać:

$$(7.3) \quad x(\tau) = a_* \sin \theta\tau + s h_* \sin 3\theta\tau.$$

Ze wzoru (7.2) wynika, że przy $3p/n^2 a_*^2 \rightarrow 1$, $h_* \rightarrow \infty$, czyli następuje nieograniczony wzrost amplitudy składowej harmonicznej rzędu 3/2. Jednakże rezultat ten wynika z ograniczonej dokładności przytoczonego rozwiązania, albowiem wśród

wyrazów zawierających ε^2 , ε^3 itd., a więc pominiętych w rozważaniach pierwszego przybliżenia znajdują się m.in. także harmoniczne rzędu 3/2. Uwzględnienie tych wyrazów zmieniłoby oczywiście budowę wzoru (7.2). Z tego powodu wzór ten należy traktować jedynie jako przybliżony i słuszny w tych przypadkach, gdy $3p(na_*)^{-2}$ różni się od 1.

8. Nieliniowa sprężystość

Jeżeli materiał pręta stanowiącego element układu dynamicznego wykazuje nieliniowe własności sprężyste, to w modelu zastępczym wg rys. 1 należy sprężynę liniową zastąpić odpowiednią sprężyną nieliniową, np. o charakterystyce typu Duffinga. Wtedy siła w sprężynie odkształconej wynosi $c_1 y + c_2 y^3$ ($c_2 \geq 0$) i w równaniu ruchu ciężarka H pojawia się dodatkowy wyraz $\gamma_1 x^3$ ($\gamma_1 \sim c_2$). Załóżmy, że nieliniowość ta jest słaba, dzięki czemu można napisać $\gamma_1 = \varepsilon \gamma$. Ponadto rozważania nasze ograniczymy do przypadku, kiedy pręt w czasie drgań odkształca się pod względem jakościowym w sposób podobny, jak przy materiale liniowo-sprężystym, tzn. jego oś przyjmuje kształt półfali. Dzięki temu możemy nadal posługiwać się modelem z rys. 1. Zamiast (4.2) mamy teraz

$$(8.1) \quad \ddot{x} + n^2 x = \varepsilon (p x \cos 2\psi - \ddot{x} x^2 - \dot{x}^2 x - \gamma x^3), \quad \gamma \leq 0.$$

Uogólnienie powyższe nie nastęrcza zasadniczych trudności matematycznych, ponieważ pierwszą całkę równania ruchu, podobnie jak w p. 4, można wyznaczyć przez kwadraturę. W rezultacie zamiast (4.9) otrzymuje się następujące równanie energii:

$$(8.2) \quad b^2 + (n^2 + \varepsilon p/2) a^2 - \varepsilon (p/n)^2 \ln a + (p/n)^2 a^{-2} + (3/4) \varepsilon a^2 b^2 + (3/8) \varepsilon \gamma a^4 = c'_0,$$

gdzie

$$(8.3) \quad c'_0 \equiv (1 + 3\varepsilon a_0^2/4) b_0^2 + (n^2 + \varepsilon p/2) a_0^2 - \varepsilon (p/n)^2 \ln a_0 + (p/n)^2 a_0^{-2} + (3/8) \varepsilon \gamma a_0^4.$$

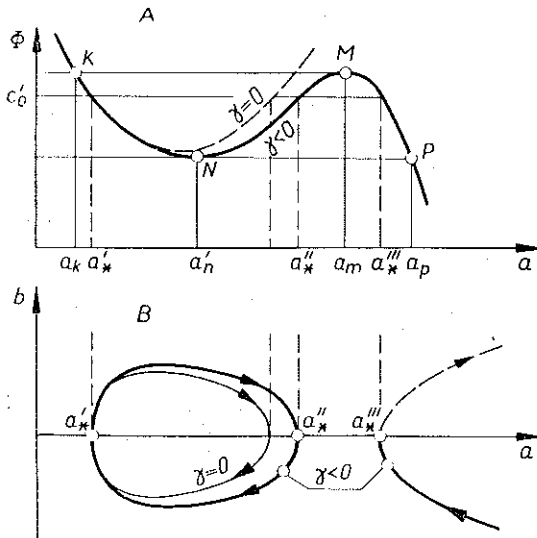
Stany stacjonarne układu określamy jak poprzednio z równania (5.2), w którym jednakże

$$(8.4) \quad \Phi(a) \equiv (n^2 + \varepsilon p/2) a^2 + (p/n)^2 a^{-2} - \varepsilon (p/n)^2 \ln a + (3/8) \varepsilon \gamma a^4.$$

Analiza pierwiastków równania (5.2) prowadzi teraz do następujących wyników: jeżeli sprężyna jest twarda, czyli $\gamma > 0$, to istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste dodatnie lub w szczególnym przypadku, gdy $c'_0 = \min \Phi(a)$, mamy jeden pierwiastek. Sytuacja jest więc pod względem jakościowym podobna jak przy sprężynie liniowej.

Natomiast gdy sprężyna jest miękka, czyli $\gamma < 0$, to równanie (5.2) może mieć jeden, dwa lub trzy pierwiastki. Krzywa $\Phi(a)$ ma bowiem wtedy kształt pokazany na rys. 5A linią ciągłą. Gdy $c'_0 > \Phi(a_m)$ lub $c'_0 < \Phi(a'_n)$, to istnieje jeden pierwiastek, przy czym $a'_* < a_k$ lub $a'_* > a_p$. W przypadku szczególnym, gdy $c'_0 = \Phi(a'_n)$ lub $c'_0 = \Phi(a_m)$, istnieją dwa pierwiastki przy $a'_* = a'_n$ i $a'''_* = a_p$ lub przy $a'_* = a_k$ i $a'''_* = a_m$. Wreszcie gdy $\Phi(a_m) < c'_0 < \Phi(a'_n)$, to równanie (5.2) ma trzy pier-

wiastki rzeczywiste i dodatnie, które wyznaczają amplitudy drgań ustalonych. W płaszczyźnie współrzędnych a , b mamy wtedy sytuację przedstawioną na rys. 5B; oprócz trajektorii zamkniętej pojawia się jeszcze trajektoria otwarta z wierzchołkiem w punkcie a_*''' . Jej górna gałąź określa stan nieustalony, w którym amplituda stale wzrasta; te drgania oczywiście nie mogą doprowadzić do stanu ustalonego.



Rys. 5

Natomiast jeżeli zrealizujemy warunki początkowe takie, że $a_0 > a_*'''$, $b_0 < 0$, to zachowując warunek rezonansu $\theta = 2k$ można układ doprowadzić do drgań ustalonych z amplitudą a_*''' .

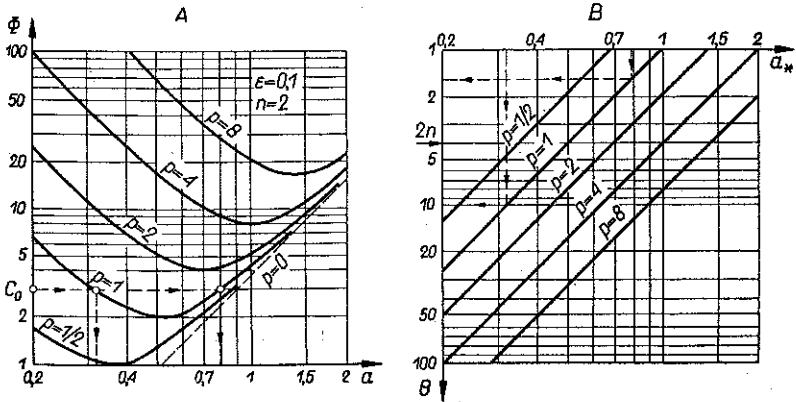
Zbadajmy stateczność tych drgań. Trajektoria rezonansowa $b(a)$ «dochodzi» do punktu a_*''' przez ujemne wartości b , a więc $\delta a < 0$. Z rysunku 5A widoczne jest, że w tym punkcie $[\partial\Phi/\partial a]_* < 0$, a więc $[\partial\Phi/\partial a]_* \delta a > 0$, czyli analizowane drgania są stateczne. Zauważmy jednak, że gdy sprężyna jest słabo nieliniowa, to amplituda a_m , a tym bardziej a_*''' , może okazać się na tyle duża, że odpowiadające jej drgania nie mogą już być opisane równaniem (3.1); równanie to zostało bowiem wyprowadzone przy założeniu, że drgania są małe w sensie stosowalności przybliżonego wzoru $u \approx y^2/l$ (por. [4], p. 2.3). Z tego względu rozważany tutaj przypadek drgań może mieć znaczenie praktyczne jedynie przy dość silnej nieliniowości sprężystej.

9. Przykład liczbowy

Rozpatrzmy dla przykładu drgania układu z nieliniową bezwładnością podanego na rys. 1 przyjmując $2l = 100$ cm, $n = 2$, $G/H = 2,25$, czyli $\varepsilon = (1 + 4G/H)^{-1} = 0,1$.

Załóżmy najpierw, że sprężyna ma liniową charakterystykę. Za pomocą wzorów (4.10) i (5.2) sporządzamy wykresy zależności $\Phi(a)$ oraz $\theta(a_*)$, najlepiej w układzie podwójnie logarytmicznym; na rys. 6 przedstawione są te zależności dla kilku

amplitud p siły wymuszającej. Korzystając z tych wykresów z łatwością wyznaczamy podstawowe parametry drgań ustalonych. Np. jeżeli przy $p = 1$ zrealizujemy takie warunki początkowe, że $c_0 = 3$, to na lewym wykresie znajdujemy $a'_* = 0,32$, $a''_* = 0,80$ i następnie na prawym: $\theta' = 10,0$, $\theta'' = 1,56$. Odpowiednie amplitudy drgań ciężarka H , obliczone za pomocą wzoru (5.4) wynoszą: $|\max y'| = 0,1 \times 50 \times 0,32 = 1,55$ cm przy częstotliwości $\Theta' = \theta' (g/l)^{1/2} = 10,0 (981/50)^{1/2} = 46$ sek.⁻¹ oraz $|\max y''| = 0,1 \times 50 \times 0,80 = 4,0$ cm przy częstotliwości $\Theta'' = 1,56 (981/50)^{1/2} = 6,9$ sek.⁻¹.



Rys. 6

Za pomocą wzoru (7.2) obliczamy amplitudy składowej harmonicznej rzędu $3/2$: $\epsilon h'_* \approx 10^{-4}$ i $|\epsilon h''_*| \approx 0,0165$, czemu odpowiadają wartości bezwzględne: 5×10^{-4} cm i 0,0825 cm. Są to jak widać wielkości bardzo małe wobec amplitud drgań podstawowych.

Rozpatrzmy jeszcze układ z rys. 1 zakładając, że sprężyna jest nieliniowa typu «miękkiego». Zachowując parametry ϵ , n , p i l bez zmiany przyjmijmy $\epsilon \gamma = -2$. Gdy $2 < c_0 < 5$, równanie (5.2) posiada trzy pierwiastki; np. dla $c_0 = 3$ znajdujemy: $a'_* \approx 0,32$, $a''_* \approx 0,9$, $a'''_* \approx 2,3$. W porównaniu z układem posiadającym sprężynę liniową widzimy nieznaczny wzrost amplitudy a'_* oraz pojawienie się nowej wartości a'''_* . Wzbudzenie drgań rezonansowych z amplitudą a'''_* możliwe byłoby przy zastosowaniu następujących warunków początkowych: $a_0 \geq 2,3$; $b_0 \leq 0$. Natomiast gdy $c_0 > 5$, to możliwy jest tylko jeden stan stacjonarny z amplitudą $a'_* < 0,23$ przy warunkach początkowych: $a_0 \geq 0,23$; $b_0 < 0$.

10. Wnioski

Aby w układzie z nieliniową bezwładnością zrealizować drgania wymuszone parametrycznie, należy go wstępnie pobudzić, po czym działając siłą okresową i odpowiednio modulując jej częstotliwość można układ doprowadzić do ustalonych statecznych drgań subharmonicznych z określoną amplitudą; jej wartość zależy w sposób istotny od stanu kinematycznego, w jakim znajdował się układ w momencie

przyłożenia siły wymuszającej. Amplitudy drgań ustalonych wyznaczamy z równania (5.2), a odpowiadające im częstości ze wzoru (5.3).

Gdy siła wymuszająca działa z częstością dwukrotnie większą od częstości własnej odpowiedniego układu liniowego (czyli pręta dwuprzegubowego bez ciężarka G), wówczas występują stateczne drgania subharmoniczne «czyste», tzn. bez udziału wyższych harmonicznnych. W przypadku ogólnym, gdy $\theta \neq 2n$, drganiom subharmonicznym towarzyszą także wyższe harmoniczne.

Przez odpowiednią modulację częstości wymuszenia można w rozpatrywanym układzie dynamicznym wywołać drgania o charakterze dudnienia.

Literatura cytowana w tekście

1. A. J. BELLIN, *Non-autonomous systems*, Advances in Appl. Mech. vol. 3, New York 1953.
2. В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Москва 1956.
3. W. J. CUNINGHAM, *Introduction to nonlinear analysis*, New York 1958.
4. R. GRYBÓŚ, *Drgania swobodne układu z nieliniową bezwładnością*, Rozp. Inżyn., 1, 13 (1965).
5. Сн. HAYASHI, *Forced oscillations in nonlinear systems*, Osaka 1953.
6. Y. H. KU, YANG TSU-TE, *Analysis of parametrically excited systems* J. of the Franklin Inst. 274, nr 6, 1962.
7. И. Г. МАЛКИН, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Москва 1956.
8. N. W. MC LACHLAN, *Ordinary nonlinear differential equations in engineering and physical sciences*, Oxford 1956.
9. N. W. MC LACHLAN, *Theory and Applications of Mathieu Functions*, Oxford 1951.
10. N. MINORSKY, *Modern trends in nonlinear mechanics*, Advances in Appl. Mech., vol. I. New-York 1948.
11. G. SCHMIDT, *Über die Biegeschwingungen des gelenking gelagerten axial pulsierend belasteten Stabes*, Math. Nachr., z. 2, 1961.
12. R. A. STRUBLE, S. M. YIHOULIS, *General perturbational solution of the harmonically forced Duffing equation*, Arch. for Rational Mechanics and Analysis, 9, nr 5/1962.
13. F. WEIDENHAMMER, *Nichtlineare Biegeschwingungen des axial pulsierend belasteten Stabes*. Ing. Arch., 5, 20 (1962).

Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ОБЛАДАЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНЕРЦИОННОСТЬЮ

Исследовались условия возникновения главного субгармонического резонанса в системе с нелинейной инерционностью, при параметрическом вынуждении гармонической силой. Сперва, решается случай, когда частота вынуждения двукратно больше собственной частоты линейной системы (т.е. без массы, сосредоточенной на подвижном конце стержня) и исследуется устойчивость приведенного решения.

Затем, применяя метод малого параметра совместно с методом вариация постоянных, решается случай для произвольной частоты вынуждения.

Дается уравнение движения в первом приближении и исследуется его устойчивость. Рассматривается, также, случай нелинейной упругости.

S u m m a r y

PARAMETRIC VIBRATION IN A SYSTEM WITH NONLINEAR INERTION

The conditions of main subharmonic resonance excited parametrically by a harmonic force are studied for a system with nonlinear inertion. First is solved the case when the excitation frequency is twice as great as the natural frequency of the linear system (i.e. without the concentrated mass at the end of the bar). The stability of the solution is investigated.

The next case under consideration is that of any excitation frequency. This problem is solved, by means of the perturbation method combined with the method of variation of constants.

Solution is found in the first approximation. The stability of the solution is investigated.

The case of nonlinear elasticity is also considered.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1965 r.
