

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRZEKROJU PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO JEDNOCZEŚNIE SKRĘCANEGO I ZGINANEGO

STANISŁAW MAZURKIEWICZ I MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W pracy będziemy się zajmowali optymalnym ukształtowaniem przekroju pręta poddanego jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego M_s i momentu gnącego M_g . Przypadek jednoczesnego skręcania i zginania występuje często w zastosowaniach.

Ogólnie wiadomo, iż zarówno przy skręcaniu jak i przy zginaniu w pełni wykorzystane mogą być tylko warstwy odległe od osi pręta; pozostawienie tylko tych warstw prowadzi w konsekwencji do prętów cienkościennych (powłok walcowych). Przekrój takiego pręta można w pełni określić dwiema funkcjami jednej zmiennej. Jeżeli mianowicie przyjmijemy dogodny tu układ współrzędnych biegunowych płaskich ϱ, θ (czyli dla całego pręta układ współrzędnych walcowych), to funkcjami tymi będą np. $\varrho = \varrho(\theta)$ oraz $g = g(\theta)$; pierwsza z nich określa położenie linii środkowej przekroju powłoki (pręta), natomiast druga zmianę grubości ścianki g . Problem ten oznaczono symbolem B2 w klasyfikacji przeprowadzonej w pracy W. KRZYSIA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [5].

Jako kryterium optymalności przyjmijemy kryterium minimalnego ciężaru pręta. Przy założeniu stałych wartości momentów M_s i M_g wzdłuż osi pręta przekrój będzie również stały; dodatkowe założenia jednorodności materiału sprowadzi więc kryterium minimalnego ciężaru pręta do minimalnej powierzchni przekroju.

Zasadnicze znaczenie dla kształtowania będą posiadały warunki poboczne nałożone na konstrukcję. Spośród różnych możliwych warunków weźmiemy pod uwagę tylko dwa, zapewniające bezpieczeństwo konstrukcji. Będzie to, po pierwsze, warunek wytrzymałościowy; w oparciu o hipotezę Hubera-Misesa-Hencky'ego, zakładając jedynie istnienie naprężenia normalnego $\sigma_z = \sigma$ od zginania oraz stycznego do konturu naprężenia $\tau_{z\theta} = \tau$ od skręcania, napiszemy go w postaci

$$(1.1) \quad \sigma_0^2 = \sigma^2 + 3\tau^2 \leq k^2,$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem zredukowanym, k przyjętym naprężeniem dopuszczalnym przy jednoosiowym rozciąganiu. Sam warunek (1.1) nie jest oczywiście wystarczający, gdyż prowadziłby do nieskończenia małej grubości ścianek przy dużych wymiarach poprzecznych przekroju; pręt o takim przekroju utraciłby stateczność ścianki, więc

musimy dodatkowo narzucić warunek stateczności. Warunek ten można by napisać w postaci ogólnej

$$(1.2) \quad M_0 j \leq J \left[g(\theta), \varrho(\theta); E_i, l, \frac{M_g}{M_s} \right],$$

gdzie symbol J oznacza funkcjonal, zależny od funkcji $g(\theta)$ i $\varrho(\theta)$, a ponadto od modułów sprężystości oznaczonych wspólnym symbolem E_i , długości powłoki (pręta) l oraz od założonego stosunku momentów M_g/M_s . Symbolem M_0 oznaczono tu pewną intensywność momentów (np. moment zredukowany), a j oznacza przyjęty stopień bezpieczeństwa ze względu na stateczność ścianki. Fizycznie funkcjonal ten oznacza krytyczną intensywność momentu M_{0k} ze względu na stateczność ścianki. Oczywiście, że efektywne określenie tego funkcjonala, czyli rozwiązanie problemu stateczności powłoki walcowej na ogół niekolistej o zmiennej grubości ścianki przy danym obciążeniu złożonym, przedstawia bardzo trudny problem teorii stateczności powłok i warunku w postaci (1.2) nie będziemy mogli zastosować. W pewnym przybliżeniu, czynionym dość często w teorii stateczności powłok, można go jednak zastąpić przez warunek lokalny, odnoszący się do poszczególnych punktów powłoki, mianowicie przez warunek

$$(1.3) \quad \sigma_0(\theta) j \leq \varphi \left[g(\theta), R(\theta), E_i, l, \frac{\sigma}{\tau} \right],$$

gdzie tym razem φ oznacza nie funkcjonal, lecz funkcję zmiennej θ , złożoną za pośrednictwem funkcji $g(\theta)$ — grubości ścianki w danym punkcie, oraz funkcji $R(\theta)$, promienia krzywizny powłoki, określonego za pomocą znanego wzoru

$$(1.4) \quad R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}{\varrho^2 - \varrho\varrho'' + 2\varrho'^2}.$$

Funkcja φ określa krytyczne naprężenie zastępcze ze względu na stateczność ścianki. Będziemy więc stosowali warunek typu (1.3) przy założeniu znacznej długości powłoki (pręta) l . Innych warunków stateczności (np. ze względu na zwichrzenie belki jako całości) nie będziemy uwzględniali.

Ograniczymy się do założenia utraty stateczności jedynie w zakresie sprężystym. Założenie to będzie spełnione, gdy

$$(1.5) \quad k j \leq S,$$

gdzie S oznacza granicę sprężystości przy jednoosiowym rozciąganiu (ściskaniu). Warunek ten będzie spełniony przy dopuszczeniu niezbyt wysokich naprężeń k lub przy niewielkim stopniu bezpieczeństwa ze względu na stateczność j . Przy korzystaniu z liniowej teorii stateczności powłok (a taką będziemy się posługiwać) przyjmuje się wprawdzie dość duże wartości j ze względu na wyrównanie błędów obliczeń, ale ten fakt jest bez znaczenia, bowiem wtedy należy również pozornie podwyższyć granicę sprężystości S .

W pracy [6] poświęconej kształtowaniu skrzynekowego profilu prętów, poddanych czystemu skręcaniu i czystemu zginaniu, stwierdzono, iż przy założeniu sprężystości

wyoboczenia ścianki minimum ciężaru pręta jest realizowane przy możliwie wysokich wartościach naprężeń; zakładając, że wniosek ten słuszny jest i w rozważanym przez nas obecnie przypadku, zamiast (1.1) napiszemy

$$(1.6) \quad \sigma^2 + 3\tau^2 = k^2$$

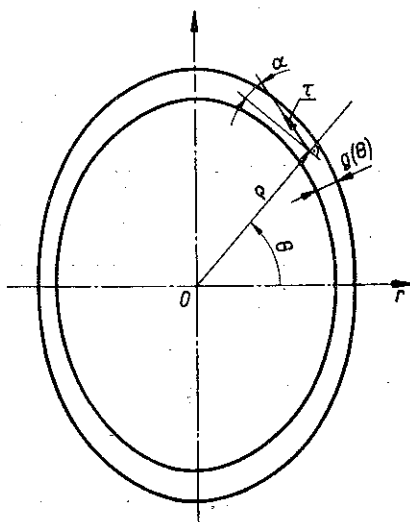
i będziemy poszukiwali kształtu optymalnego spośród prętów o ściankach «równej wytrzymałości». Równanie (1.6) wiąże dwie poszukiwane funkcje, $\rho(\theta)$ i $g(\theta)$, tak że niezależną pozostaje już tylko jedna z nich. Będziemy więc mieli do czynienia z problemem rachunku wariacyjnego o nie znanej jednej funkcji jednej zmiennej; będzie to jednakże problem «podwójnie izoperymetryczny», gdyż poszukujemy minimum ciężaru przy założeniu stałych wartości obu momentów, M_g i M_s .

Podobne sformułowanie problemu optymalnego kształtowania pręta jednocześnie zginanego i skręcanego nie jest nam znane. W pracy W. KRZYSIA i M. ŻYCKOWSKIEGO [6] ograniczono się przy rozpatrywaniu podobnego zagadnienia do założenia przekroju skrzynkowego i stałej grubości ścianek; w ten sposób problem doboru optymalnych funkcji zredukowano do doboru optymalnych parametrów («parametryczne kształtowanie wytrzymałościowe»). Od innych prac z tej dziedziny (G. STRASSER [9], G. G. BAŁOWNIEW i G. S. TROFIMOW [1], Z. WASIUTYŃSKI [11], V. CADAMBE, S. KRISHNAN [2]) analiza obecna różni się będzie większą ilością «stopni swobody» (doborem funkcji) i uwzględnieniem warunku stateczności. Warunek stateczności uwzględnia natomiast praca R. JANICZKA [4] omawiająca problem czystego skręcania; problem ten jest o tyle prosty, że w wyniku otrzymuje się powłokę walcową kolistą o stałej grubości ścianki. Praca obecna będzie więc uogólnieniem pracy [4] na przypadek obciążenia złożonego: skręcania ze zginaniem.

2. Równanie Eulera-Lagrange'a dla rozpatrywanego problemu

Weźmiemy pod uwagę przekrój przedstawiony na rys. 1. Interesujące nas funkcjonały: pole powierzchni przekroju F , moment skręcający M_s i moment zginający M_g wyrażają się następująco:

$$(2.1) \quad F = \oint g \, ds, \quad M_s = \oint \tau \rho g \cos \alpha \, ds, \\ M_g = \oint \sigma \rho g \sin \theta \, ds.$$



Rys. 1

Do wzorów tych podstawimy obecnie wyrażenia na wielkości geometryczne ds i $\cos \alpha$, naprężenia σ i τ oraz wyrugujemy funkcję $g(\theta)$ korzystając z warunku wytrzymałościowego (1.6).

Element długości łuku ds wyraża się we współrzędnych biegunowych za pomocą wzoru

$$(2.2) \quad ds = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} d\theta,$$

a kierunek naprężeń stycznych określi wzór

$$(2.3) \quad \cos \alpha = \frac{\varrho d\theta}{ds} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}.$$

Przyjmijmy, iż ma zastosowanie hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego. Zatem naprężenie normalne zmieniać będzie swą wartość według zależności

$$(2.4) \quad \sigma = C_1 \varrho \sin \theta,$$

a naprężenie styczne zgodnie z analogią hydrodynamiczną (M. T. HUBER [3]) wyniesie

$$(2.5) \quad \tau = \frac{C_2}{g},$$

gdzie C_1 i C_2 są wielkościami zależnymi od M_g i M_s , chwilowo nieokreślonymi. Wobec tego warunek (1.6) przyjmie postać

$$(2.6) \quad C_1^2 \varrho^2 \sin^2 \theta + 3 \frac{C_2^2}{g^2} = k^2,$$

stąd

$$(2.7) \quad g = \frac{C_2 \sqrt{3}}{\sqrt{k^2 - C_1^2 \varrho^2 \sin^2 \theta}}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności do (2.1) otrzymujemy

$$(2.8) \quad F = C_2 \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}{\sqrt{k^2 - C_1^2 \varrho^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} f_0(\theta, \varrho, \varrho') d\theta,$$

$$M_s = C_2 \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\varrho) d\theta,$$

$$M_g = C_1 C_2 \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \sin^2 \theta}{\sqrt{k^2 - C_1^2 \varrho^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} f_2(\theta, \varrho, \varrho') d\theta.$$

Poszukujemy minimum funkcjonału F przy stałych wartościach funkcjonałów M_s i M_g . W tym celu wprowadzamy funkcję Lagrange'a,

$$(2.9) \quad \Phi = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,$$

(gdzie λ_1 i λ_2 oznaczają mnożniki Lagrange'a) i napiszemy równanie Eulera-Lagrange'a w postaci

$$(2.10) \quad \Phi_e - \frac{d}{d\theta} \Phi_{e'} = 0.$$

Po podstawieniu wynikających z (2.8) funkcji f_0 , f_1 i f_2 otrzymujemy następujące równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu:

$$(2.11) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_1 e (k^2 - C_1^2 e^2 \sin^2 \theta)^{3/2} (e^2 + e'^2)^{3/2} + \\ + [(3e \sin \theta - 2e' \cos \theta - e'' \sin \theta) C_1 \lambda_2 e^2 \sin^2 \theta + e - e''] \times \\ \times (k^2 - C_1^2 e^2 \sin^2 \theta) (e^2 + e'^2) + [C_1^2 e \sin^2 \theta (e^2 + e'^2)^2 - \\ - C_1^2 e e' \sin \theta (e' \sin \theta + e \cos \theta) (e^2 + e'^2) + e'^2 (e + e')] \times \\ \times (k^2 - C_1^2 e^2 \sin^2 \theta) (1 + C_1 \lambda_2 e^2 \sin^2 \theta) = 0.$$

Rozwiązanie ściśle równania (2.11) nie wydaje się możliwe. W dalszym ciągu zastosujemy metodę małego parametru ograniczając się do analizy wpływu zginania na kształtowanie pręta skręcanego (moment zginający niewielki w stosunku do skręcającego).

3. Metoda małego parametru

Rozwinięcie w szereg parametru M_g byłoby niedogodne, ponieważ nie występuje on w równaniu (2.11). Jako mały parametr przyjmiemy więc C_1 ; jak widać ze wzoru (2.4) jest on równy zero przy braku zginania. Później dopiero określimy za pomocą szeregu funkcję $M_g = f(C_1)$, a po dokonaniu odwrócenia tego szeregu wyrazimy poszukiwane wielkości poprzez daną wartość momentu M_g .

Ponieważ funkcja $e(\theta)$ oraz mnożnik λ_1 muszą być parzystymi funkcjami parametru C_1 (nie mogą zależeć od znaku momentu zginającego), natomiast mnożnik λ_2 musi być nieparzystą funkcją C_1 (aby iloczyn $\lambda_2 M_g$ był parzystą), przeto założymy rozwinięcia w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} e &= e_0 + e_1 C_1^2 + e_2 C_1^4 + \dots, \\ \lambda_1 &= \lambda_{10} + \lambda_{11} C_1^2 + \lambda_{12} C_1^4 + \dots, \\ \lambda_2 &= \lambda_{20} C_1 + \lambda_{21} C_1^3 + \lambda_{22} C_1^5 + \dots \end{aligned}$$

Teoretycznie należałoby również parametr C_2 rozwinąć w szereg parametru C_1 . Jednakże przyjmiemy, że najmniejsza grubość ścianki, wynosząca

$$(3.2) \quad g(0) = \frac{C_2 \sqrt{3}}{k},$$

określona jest z warunku stateczności. Abstrahując od niewielkiej zmiany promienia krzywizny $R(0)$ związanej z wpływem zginania (co uzasadnimy później bardziej szczegółowo), mamy [wobec $\tau(0) = k/\sqrt{3} = \text{const}$] $g(0) = \text{const}$, a zatem również $C_2 = \text{const}$.

W takim razie grubość ścianki $g(\theta)$ po rozwinięciu wyrażenia (2.7) w szereg parametru C_1 będzie można określić następująco:

$$(3.3) \quad g(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(\theta) C_1^{2i} = \frac{C_2 \sqrt{3}}{k} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho_0^2 \sin^2 \theta}{k^2} C_1^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{8} \frac{\varrho_0^4 \sin^4 \theta}{k^4} + \frac{\varrho_0 \varrho_1 \sin^2 \theta}{k^2} \right) C_1^4 + \dots \right],$$

przy czym $g_0(\theta) = g(0) = \text{const}$.

Rozpatrzmy teraz jako zerowe przybliżenie przypadek czystego skręcania. W przypadku tym $C_1 = 0$; całą równania (2.11) jest wtedy $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$, a ponadto z równania tego otrzymujemy związek

$$(3.4) \quad \lambda_{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2k\varrho_0}.$$

Grubość ścianki jest oczywiście stała, $g = g_0$, i określona wzorem (3.2), a z równań (2.8)₂, (2.8)₁, (3.1)₁ moment skręcający i pole powierzchni przekroju wyraża się wzorami

$$(3.5) \quad M_s = 2\pi C_2 \varrho_0^2, \quad F_0 = \frac{2\pi \varrho_0 \sqrt{3} C_2}{k}.$$

Dla danego momentu skręcającego M_s promień ϱ_0 i powierzchnię przekroju F_0 można wyliczyć przyjmując grubość $g_0 = g(0)$ z warunku utraty stateczności. Zastosujemy tutaj wzór na τ_{kr} , który stosuje się dla rur długich, wyprowadzony po raz pierwszy przez É. SCHWERINA [8] (por. np. S. P. TIMOSZENKO [10]):

$$(3.6) \quad \tau_{kr} = H \left(\frac{g}{\varrho} \right)^{3/2},$$

gdzie

$$(3.7) \quad H = \frac{E}{3\sqrt{2}(1-\nu^2)^{3/4}},$$

a g i ϱ oznaczają odpowiednio grubość i promień kołowo symetrycznej powłoki.

Do wzoru (3.6) podstawimy $\tau_{kr} = j\tau$, gdzie j jest założonym stopniem pewności ze względu na stateczność ścianki; rugując kolejno τ , C_2 i ϱ_0 na podstawie wzorów (2.5), (3.2) i (3.5)₁ otrzymujemy wzór, określający minimalną grubość ścianki g_0 :

$$(3.8) \quad g_0 = \frac{j^{4/9} k^{1/9} M_s^{1/3}}{(2\pi)^{1/3} 3^{1/18} H^{4/9}}.$$

Zwiększenie grubości ścianki jest ze względu na stateczność dopuszczalne, jednak pole powierzchni przekroju jednocześnie wzrasta. Ze wzorów (3.2), (3.5) obliczamy

$$(3.9) \quad C_2 = \frac{j^{4/9} k^{10/9} M_s^{1/3}}{(2\pi)^{1/3} 3^{5/9} H^{4/9}}, \\ \varrho_0 = \frac{3^{5/18} H^{2/9} M_s^{1/3}}{(2\pi)^{1/3} j^{2/9} k^{5/9}} = \varrho_{\max},$$

$$(3.9) \quad F_0 = \frac{(2\pi)^{1/3} 3^{2/9} j^{2/9} M_s^{2/3}}{k^{4/9} H^{2/9}} = F_{0 \min}.$$

Wyniki powyższe są zgodne z podanymi przez R. JANICZKA [4] dla czystego skręcania rur o znacznej długości.

Przejdziemy do całkowania równania (2.11) metodą małego parametru. Całkowanie to, jakkolwiek żmudne, nie stwarza istotnych trudności. Po podstawieniu (3.1) wykonaniu zaznaczonych działań na szeregach [13 i 14] oraz przyrównaniu współczynników przy C_1^{2m} do zera otrzymujemy ciąg równań liniowych typu

$$(3.10) \quad \varrho_m'' + \varrho_m = f_m(\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{m-1}, \theta),$$

przy czym, jak można wykazać indukcją matematyczną, funkcje f_m posiadają po wyrugowaniu $\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{m-1}$ postać

$$(3.11) \quad f_m(\theta) = \sum_{n=0}^P A_{mn} \cos 2n\theta.$$

Warunkami brzegowymi ze względu na symetrię, są następujące:

$$(3.12) \quad \varrho_m'(0) = \varrho_m'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

wynika stąd, iż współczynniki w całkach ogólnych równań jednorodnych muszą być równe zeru, a pozostają jedynie całki szczególne równań niejednorodnych, które posiadają oczywiście postać analogiczną do (3.11):

$$(3.13) \quad \varrho_m(\theta) = \sum_{n=0}^P B_{mn} \cos 2n\theta$$

i spełniają warunki (3.12).

Funkcja $\varrho_1(\theta)$ określona jest równaniem

$$(3.14) \quad \varrho_1'' + \varrho_1 = \left(\frac{2k\varrho_0^2 \lambda_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{3\varrho_0^3}{4k^2} + \frac{3\varrho_0^3 \lambda_{20}}{2} \right) - \left(\frac{3\varrho_0^3}{4k^2} + \frac{3\varrho_0^3 \lambda_{20}}{2} \right) \cos 2\theta,$$

zatem poszukiwaną całką szczególną będzie

$$(3.15) \quad \varrho_1 = \left(\frac{2k\varrho_0^2 \lambda_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{3\varrho_0^3}{4k^2} + \frac{3\varrho_0^3 \lambda_{20}}{2} \right) + \left(\frac{\varrho_0^3}{4k^2} + \frac{\varrho_0^3 \lambda_{20}}{2} \right) \cos 2\theta.$$

We wzorze (3.15) występują dwie nie wyznaczone dotychczas stałe: λ_{11} i λ_{20} . Jedną z nich wyznaczymy z warunku, iż moment skręcający M_s przyjmuje wartość daną, $(2.8)_1$. Warunku danej wartości M_g , $(2.8)_3$, nie możemy wykorzystać, gdyż posłuży on do wyznaczenia C_1 przez M_g . Wobec tego swobodną jeszcze wartość stałej określimy z warunku minimum pola przekroju F przy ustalonych wartościach M_s i M_g .

Wykorzystamy najpierw warunek stałego momentu skręcającego. Podstawienie (3.1) do $(2.8)_1$ daje wzór

$$(3.16) \quad M_s = C_2 \int_0^{2\pi} [\varrho_0^2 + 2\varrho_0 \varrho_1 C_1^2 + (2\varrho_0 \varrho_2 + \varrho_1^2) C_1^4 + 2(\varrho_0 \varrho_3 + \varrho_1 \varrho_2) C_1^6 + \dots] d\theta.$$

Ponieważ moment skracający nie jest funkcją parametru C_1 , więc korzystając z metody równych współczynników otrzymujemy, oprócz (3.5)₁, ciąg równań

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varrho_1 d\theta &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \left(\varrho_2 + \frac{1}{2} \frac{\varrho_1^2}{\varrho_0} \right) d\theta &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \left(\varrho_3 + \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_0} \right) d\theta &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Z pierwszego z warunków (3.17) wynika

$$(3.18) \quad B_{10} = \frac{2k\varrho_0^2 \lambda_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{3\varrho_0^3}{4k^2} + \frac{3\varrho_0^3 \lambda_{20}}{2} = 0,$$

zatem

$$(3.19) \quad \varrho_1 = \left(\frac{\varrho_0^3}{4k^2} + \frac{\varrho_0^3 \lambda_{20}}{2} \right) \cos 2\theta = B_{11} \cos 2\theta.$$

Przyjmujemy, że równanie (3.18) określa λ_{11} jako funkcję λ_{20} , natomiast λ_{20} ustalimy określając optymalną wartość B_{11} we wzorze na pole powierzchni F . W tym celu nie wystarczy jednak podstawić (3.19) do (2.8)₁; musimy ponadto wyrazić C_1 przez M_g , aby móc przeprowadzić różniczkowanie przy ustalonej wartości M_g .

Ponieważ C_1 musi być nieparzystą funkcją momentu zginającego M_g , więc zakładamy rozwinięcie w postaci szeregu

$$(3.20) \quad C_1 = a_1 M_g + a_2 M_g^3 + a_3 M_g^5 + \dots$$

Wykorzystując teraz związek (2.8)₃, do którego podstawiamy (3.1)₁, po rozwinięciu w szereg parametru C_1 i podstawieniu (3.20) otrzymujemy

$$(3.21) \quad M_g = \frac{\pi \sqrt{3} C_2 \varrho_0^3}{k} \left[a_1 M_g + \left(a_2 + \frac{3}{4} \frac{\varrho_0^2}{k^4} a_1^3 \right) M_g^3 + \dots \right],$$

a stąd porównując współczynniki przy M_g po obu stronach uzyskujemy

$$(3.22) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{k}{\pi \sqrt{3} C_2 \varrho_0^3}, \\ a_2 &= -\frac{3\varrho_0^2}{4k^2} a_1^3 = -\frac{k}{4\pi^3 \sqrt{3} C_2^3 \varrho_0^7}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Przejdziemy do obliczenia pola powierzchni przekroju F . Podstawiając do (2.8)₁ szeregi (3.1)₁ i (3.3) otrzymujemy F w postaci szeregu parametru C_1 , przy czym

przy potędze C_1^{2m} występuje całka z funkcji ϱ_m i poprzednich. Całkę z funkcji ϱ_m można jednak wyrugować korzystając z związków (3.17), tak że współczynnik przy C_1^{2m} wyraża się tylko przez funkcje ϱ_{m-1} i poprzednie. Otrzymujemy mianowicie

$$(3.23) \quad F = \frac{C_2 \varrho_0 \sqrt{3}}{k} \left[2\pi + \frac{\pi \varrho_0^2}{2k^2} C_1^2 + C_1^4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\varrho_0 \varrho_1}{2k^2} \sin^2 \theta + \frac{3\varrho_0^4}{8k^4} \sin^4 \theta - \frac{\varrho_1^2}{2\varrho_0^2} + \frac{\varrho_1'^2}{2\varrho_0^2} \right) d\theta + C_1^6 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\varrho_1^2}{2k^2} \sin^2 \theta + \frac{15\varrho_0^3 \varrho_1}{8k^4} \sin^4 \theta + \frac{3\varrho_0 \varrho_2}{2k^2} \sin^2 \theta + \frac{5\varrho_0^6}{16k^6} \sin^6 \theta - \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_0^2} + \frac{\varrho_1'^2}{4k^2} \sin^2 \theta + \frac{\varrho_1' \varrho_2'}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho_1 \varrho_1'}{2\varrho_0^3} \right) d\theta + \dots \right].$$

Wyrażając C_1 przez M_g szeregiem (3.20) i podstawiając za ϱ_1 wyrażenie (3.19) otrzymujemy

$$(3.24) \quad F = \frac{2\pi \sqrt{3} C_2 \varrho_0}{k} \left[1 + \frac{\varrho_0^2 a_1^2}{4k^2} M_g^2 + \left(\frac{a_1 a_2 \varrho_0^2}{2k^2} + \frac{9}{64} \frac{a_1^4 \varrho_0^4}{k^4} - \frac{3}{8} \frac{a_1^4 \varrho_0}{k^2} B_{11} + \frac{3a_1^4}{4\varrho_0^2} B_{11}^2 \right) M_g^4 + \dots \right].$$

Poszukujemy minimum pola powierzchni przekroju ze względu na B_{11} :

$$(3.25) \quad \frac{\partial F}{\partial B_{11}} = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$(3.26) \quad B_{11} = -\frac{\varrho_0^3}{4k^2},$$

zatem po podstawieniu do (3.19)

$$(3.27) \quad \varrho_1 = -\frac{\varrho_0^3}{4k^2} \cos 2\theta$$

oraz

$$(3.28) \quad \lambda_{20} = -\frac{1}{k^2},$$

a ze wzoru (3.18)

$$(3.29) \quad \lambda_{11} = \frac{3\sqrt{3}\varrho_0}{8}.$$

Przejdziemy teraz do określenia drugiego przybliżenia. Grupując wyrazy występujące przy C_1^4 w równaniu (2.11) i przyrównując do zera otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(3.30) \quad \varrho_2'' + \varrho_2 = A_{20} + A_{21} \cos 2\theta + A_{22} \cos 4\theta,$$

gdzie

$$(3.31) \quad \begin{aligned} A_{20} &= \frac{\varrho_0^5}{k^4} \left(-\frac{13}{64} + \frac{2k^5}{\varrho_0^3 \sqrt{3}} \lambda_{12} + \frac{3k^4}{2\varrho_0^2} \lambda_{21} \right), \\ A_{21} &= \frac{\varrho_0^5}{k^4} \left(\frac{1}{4} - \frac{3k^4}{2\varrho_0^2} \lambda_{21} \right), \\ A_{22} &= -\frac{21}{64} \frac{\varrho_0^5}{k^4}. \end{aligned}$$

Poszukiwaną całką szczególną tego równania różniczkowego jest funkcja

$$(3.32) \quad \varrho_2 = A_{20} - \frac{A_{21}}{3} \cos 2\theta - \frac{A_{22}}{15} \cos 4\theta.$$

Wykorzystując drugi z wzorów (3.17) otrzymujemy

$$(3.33) \quad A_{20} = -\frac{1}{64} \frac{\varrho_0^5}{k^4}.$$

Ze wzorów (3.31) możemy wyrazić λ_{12} przez λ_{21} :

$$(3.34) \quad \lambda_{12} = \frac{3\sqrt{3}\varrho_0^3}{32k^5} - \frac{3\sqrt{3}\varrho_0}{4k} \lambda_{21};$$

zatem

$$(3.35) \quad \varrho_2 = -\frac{\varrho_0^5}{k^4} \frac{1}{64} - \frac{\varrho_0^5}{k^4} \left(\frac{1}{12} - \frac{k^4}{2\varrho_0^2} \lambda_{21} \right) \cos 2\theta + \frac{7}{320} \frac{\varrho_0^5}{k^4} \cos 4\theta$$

lub krótko

$$(3.36) \quad \varrho_2 = B_{20} + B_{21} \cos 2\theta + B_{22} \cos 4\theta,$$

przy czym współczynnik B_{21} zawiera nie znaną jeszcze wielkość λ_{21} .

Postępując analogicznie jak dla pierwszego przybliżenia poszukujemy minimum przekroju z warunku $\partial F / \partial B_{21} = 0$ i stąd otrzymujemy

$$(3.37) \quad B_{21} = -\frac{3}{8} \frac{\varrho_0^5}{k^4}, \quad \lambda_{21} = -\frac{7\varrho_0^2}{12k^4}, \quad \lambda_{12} = \frac{17\sqrt{3}\varrho_0^3}{32k^5}.$$

Ostatecznie zatem wykorzystując wzory (3.27), (3.36) oraz rugując C_1 ze wzoru (3.20) mamy

$$(3.38) \quad \varrho = \varrho_0 \left[\left(1 - \frac{1}{36} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right) + \left(-\frac{1}{3} \frac{M_g^2}{M_s^2} + \dots \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{180} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right) \cos 4\theta + \dots \right],$$

$$(3.38) \quad g = g_0 \left[\left(1 + \frac{1}{3} \frac{M_g^2}{M_s^2} - \frac{11}{36} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{3} \frac{M_g^2}{M_s^2} + \frac{1}{9} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right) \cos 2\theta + \left(\frac{7}{36} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right) \cos 4\theta + \dots \right], \\ F = F_0 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{M_g^2}{M_s^2} - \frac{1}{6} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right),$$

gdzie g_0 , q_0 i F_0 określają wzory (3.8), (3.9)₂ i (3.9)₃.

Porównanie pola powierzchni minimalnej F (krzywa 1) z polem powierzchni F^* dla pręta, którego przekrojem jest pierścień kołowy o stałej grubości (krzywa 2), podaje rys. 2.

4. Problem stateczności ścianki

Przy kształtowaniu przekroju prętów cienkościennych poważną rolę odgrywa warunek zabezpieczenia stateczności ścianki. Warunek taki zastosowaliśmy czyniąc jednakże dwa uproszczenia: po pierwsze, warunek «integralny» typu (1.2) zastąpiliśmy przez warunek «lokalny» (1.3); po drugie, minimalną dopuszczalną grubość g_0 określiliśmy z warunku odnoszącego się do czystego skręcania. Zauważymy, że w przypadku czystego skręcania powyższe założenia prowadzą do wyników nie przybliżonych, lecz ścisłych (w sensie liniowej teorii stateczności powłok o znacznej długości); w przypadku obciążenia złożonego natomiast problem stateczności ścianki wymaga dodatkowego wyjaśnienia.

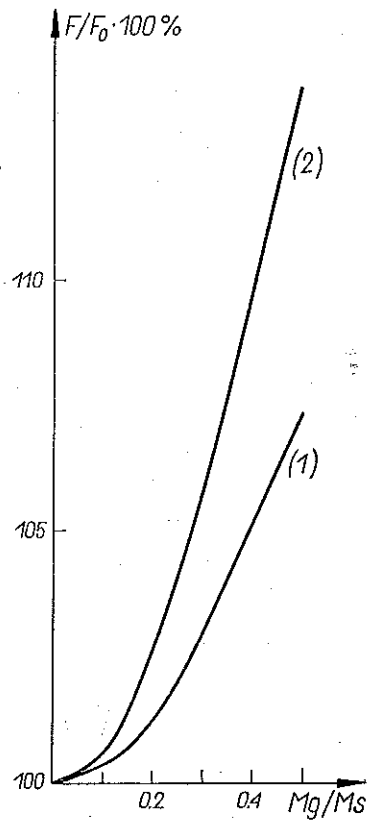
«Lokalny» warunek dla powłoki jednocześnie skręcanej (ściananej) i zginanej (ściskanej) napiszemy za A. S. WOLMIREM [12] i A. PELÜGEREM [7] w postaci

$$(4.1) \quad \frac{j\sigma}{\sigma_{kr}} + \left(\frac{j\tau}{\tau_{kr}} \right)^2 \leq 1,$$

gdzie σ_{kr} jest określona przez wzór

$$(4.2) \quad \sigma_{kr} = 0,605E \frac{g(\theta)}{R(\theta)},$$

natomiast τ_{kr} przez wzór (3.6), w którym q zastąpiono przez $R(\theta)$ — promień krzywizny przekroju pręta (powłoki), (1.4). Po podstawieniu do (1.4) szeregu (3.1)₁ i rozwinięciu możemy promień krzywizny $R(\theta)$ określić szeregiem



Rys. 2

$$(4.3) \quad R = \varrho_0 \left[1 + \left(\frac{\varrho_1''}{\varrho_0} + \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \right) C_1^2 + \left(\frac{\varrho_1''^2}{\varrho_0^2} + \frac{2\varrho_1 \varrho_1''}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho_1'^2}{2\varrho_0^2} + \frac{\varrho_2''}{\varrho_0} + \frac{\varrho_2}{\varrho_0} \right) C_1^4 + \dots \right].$$

Po podstawieniu (3.6), (4.2), (2.4) i (2.5) możemy warunek «lokalny» (4.1) napisać następująco:

$$(4.4) \quad \frac{jC_1 \varrho(\theta) R(\theta) \sin \theta}{0,605 E g(\theta)} + \frac{j^2 C_2^2 R^3(\theta)}{H^2 g^5(\theta)} \leq 1,$$

przy czym funkcje $\varrho(\theta)$, $g(\theta)$ i $R(\theta)$ określone są szeregami (3.38)₁, (3.38)₂, (4.3) a za C_1 należy podstawić szereg (3.20).

Nierówność (4.4) powinna być spełniona w całym przedziale $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Dla punktu $\theta = 0$ otrzymujemy warunek

$$(4.5) \quad \frac{j^2 C_2^2 R^3(0)}{H^2 g^5(0)} \leq 1.$$

Warunek ten nie będzie na ogół spełniony, ponieważ grubość $g(0)$ dobraliśmy z analogicznego warunku, w którym zamiast $R(0)$ występowała mniejsza wartość $\varrho(0)$. Tym niemniej odstępstwa od spełnienia tego warunku są nieznaczne, a utrata stateczności nie wydaje się groźna, bowiem wzór (3.6) wyprowadzono przy założeniu dwóch półfal na półobwodzie powłoki; półfale te musiałyby posiadać znaczną długość, podczas gdy w rozpatrywanej przez nas powłoce z oddaleniem się od punktu $\theta = 0$ jednocześnie wzrasta grubość i maleje promień krzywizny.

Dodatkowo sprawdzimy jeszcze warunek (4.4) dla punktu $\theta = \pi/2$. Promień krzywizny w tym punkcie wynosi

$$(4.6) \quad R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varrho_0 \left(1 - \frac{M_g^2}{M_s^2} - \frac{2}{3} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right),$$

a po podstawieniu (3.38)₁ i (3.38)₂ oraz wykonaniu działań na szeregach napiszemy ten warunek w postaci następującej:

$$(4.7) \quad \frac{4\pi j k^2 \varrho_0^3}{1,815 E} \frac{M_g}{M_s^2} \left(1 - \frac{7}{3} \frac{M_g^2}{M_s^2} + 3 \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right) + \frac{8\pi^3 j^2 k^5 \varrho_0^5}{3^{5/2} H^2 M_s^3} \left(1 - \frac{19}{3} \frac{M_g^2}{M_s^2} + \frac{169}{9} \frac{M_g^4}{M_s^4} + \dots \right) \leq 1.$$

Po sprawdzeniu na przykładzie liczbowym okazuje się, że warunek ten jest zazwyczaj spełniony z dużym nadmiarem bezpieczeństwa.

5. Przykład liczbowy

Dobierzemy optymalne wymiary przekroju pręta cienkościennego, obciążonego momentem skręcającym $M_s = 4 \cdot 10^5$ kGcm i o stosunku $M_g/M_s = 0,5$, wykonanego ze stali o danych $E = 2 \cdot 10^6$ KGcm², $\nu = 0,3$ oraz $k = 2000$ kG/cm². Przyjmijmy stopień pewności ze względu na stateczność $j = 3$.

Ze wzoru (3.8) obliczamy $g_0 = 0,402$ (cm), a ze wzoru (3.2) $C_2 = 462$ kG/cm. Podstawiając za C_2 do wzoru (3.5) otrzymujemy $e_0 = 11,750$ (cm).

Wykorzystując kolejno wzory (3.38) mamy:

$$e(\theta) = e_0 (0,99828 - 0,08333 \cos 2\theta + 0,00233 \cos 4\theta + \dots),$$

$$g(\theta) = g_0 (1,0644 - 0,0764 \cos 2\theta + 0,0120 \cos 4\theta + \dots),$$

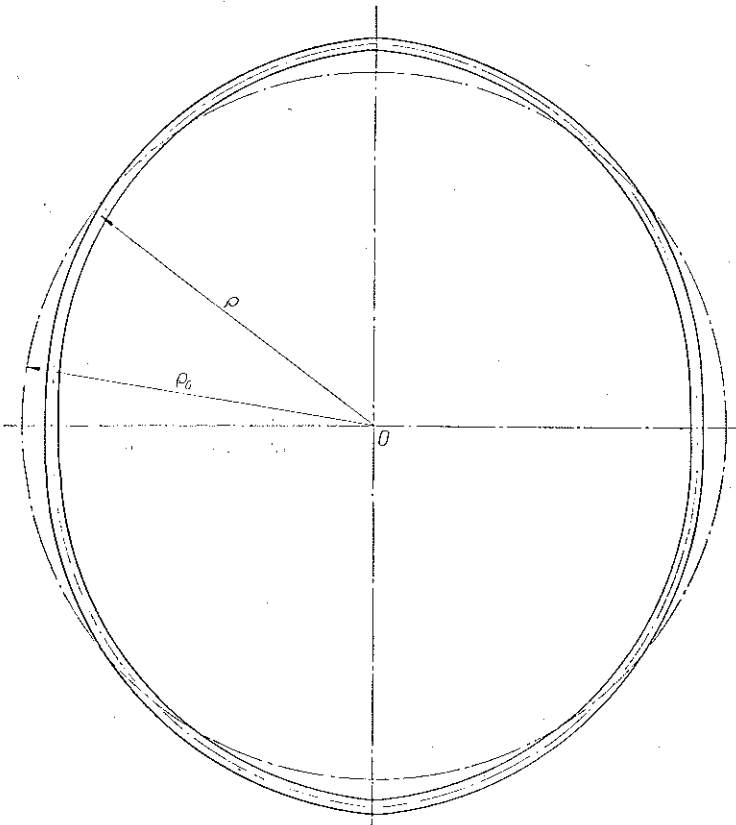
$$F = F_0 (1,0729),$$

gdzie F_0 ze wzoru (3.5)₂ wynosi 29,45 (cm²). Stąd dla $\theta = 0^\circ$ mamy

$$e = 0,91728 \cdot e_0 = 10,774 \text{ (cm)}, \quad g = g_0;$$

dla $\theta = 90^\circ$

$$e = 1,08394 \cdot e_0 = 12,737 \text{ (cm)}, \quad g = 1,1428 \cdot g_0 = 0,457 \text{ (cm)}.$$



Rys. 3

Sprawdzimy «lokalny» warunek stateczności (4.7) dla $\theta = \pi/2$; otrzymujemy $0,03 + 0,12 = 0,15$ co jest znacznie mniejsze od 1; zatem warunek stateczności dla tego punktu przekroju jest spełniony. Rysunek 3 przedstawia przekrój pręta rozważonego w przykładzie liczbowym.

Literatura cytowana w tekście

1. Г. Г. Балловнев, Г. С. Трофимов, *О рациональных формах сечений тонкостенных изогнутых профилей*, Вестник машиностроения, 4, 39 (1959), 3-10.
2. V. CADAMBE, S. KRISHNAN, *Note on the minimum weight of thin walled cells in combined bending and torsion*, J. Roy. Aero. Soc., 60 (1956), 65-66.
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika techniczna*, t. I., PZWS, Warszawa 1951.
4. R. JANICZEK, *Projektowanie prętów i belek według kryterium minimum materiału*, praca habilitacyjna, Częstochowa 1963.
5. W. KRZYŚ i M. ŻYCZKOWSKI, *Klasyfikacja problemów kształtowania wytrzymałościowego*, Czasopismo Techniczne 2, 68 (1963), 1-3.
6. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Pewna metoda tzw. parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego*, Rozpr. Inżyn., 4, 11 (1963), 643-666.
7. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1964.
8. E. SCHWERIN, *Die Torsionsstabilität des dünnwandigen Rohres*, ZAMM, 5 (1925), 235.
9. G. STRASSER, *Optimization of multiweb beams under combined bending and torsional loading*, J. Aero-space Sci., 8, 25 (1958).
10. S. P. TIMOSHENKO, J. N. GERE, *Theory of Elastic Stability*, Mc Graw-Hill, New York 1961.
11. Z. WASIUTYŃSKI, *Kształtowanie belek stalowych o przekrojach dwuteowych lub skrzynkowych*, Księga Jubil. prof. W. Wierzbickiego, Warszawa 1959, 401-427.
12. А. С. Вольмир, *Устойчивость упругих систем*, Физматгиз, Москва 1963.
13. M. ŻYCZKOWSKI, *Tablice współczynników przy potęgowaniu szeregów potęgowych*, Zast. Matematyki 4, 6 (1963), 395-406.
14. M. ŻYCZKOWSKI, *Operations on generalized power series*, ZAMM, 4, 45 (1965), 235-244.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЕЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ, ПОДВЕРЖЕННОГО ОДНОВРЕМЕННОМУ КРУЧЕНИЮ И ИЗГИБУ

Рассматривается задача оптимального проектирования сечения тонкостенного стержня; это сечение определяется, в полярных плоских координатах, с помощью функций $\rho(\theta)$ и $g(\theta)$ (радиус и толщина стенки) рис. 1. Эти функции связаны условием равнопрочности (1.1) так, что задача формулируется, в конце концов, как изопериметрическая проблема вариационного исчисления с одной неизвестной функцией, ставя условие минимальной поверхности сечения, а таким образом минимального веса стержня.

Уравнение Эйлера-Лагранжа решается по методу малого параметра, исследуя, единственно, влияние изгиба на оптимальную форму стержня, подвергаемого кручению. Кроме того, исходя из линейной теории устойчивости оболочек, учитывается устойчивость стенки.

В результате форма сечения определяется формулами (3.38)₁ и (3.38)₂, а минимальная поверхность сечения формулой (3.38)₃. Приводится, также, числовой пример, касающийся отношения моментов $M_g/M_s = 0,5$.

Summary

OPTIMUM DESIGN OF A THIN-WALLED BAR SUBJECTED TO SIMULTANEOUS TORSION AND BENDING

The paper is devoted to the problem of optimum design of the profile of a thin-walled bar. This profile is determined in plane polar coordinates by the functions $\rho(\theta)$ and $g(\theta)$ (the radius and the thickness of the wall, Fig. 1).

These functions are interrelated by means of the condition of equal strength (1.1), so that the problem is formulated, finally, as an isoperimetric problem of the variational calculus with one unknown function, with the condition of minimum cross-sectional area, that is for minimum weight.

The Euler-Lagrange equation is solved by means of the small parameter method. The influence of bending on the optimum form of the twisted bar is the only studied. The stability condition of the wall is considered additionally on the grounds of the linear theory of shell stability.

The resulting form of the profile is determined by Eqs. (3.38)₁ and (3.38)₂ and the minimum cross-sectional area — by Eq. (3.38)₃. A numerical example is given for the ratio of moments $M_g/M_s = 0,5$.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 marca 1965 r.