

PRZYBLIŻONE OBLICZANIE CZĘSTOŚCI SKRĘTNYCH DRGAŃ WŁASNYCH
PRĘTA O ZMIENNYM PRZEKROJU

RYSZARD ŁACZKOWSKI (ELBLĄG)

Ważniejsze oznaczenia

- x bieżąca współrzędna wzdłuż długości pręta w cm,
 θ amplituda kąta skręcania przekroju poprzecznego pręta w rd,
 M amplituda momentu skręcającego w kG cm,
 C sztywność skręcania przekroju poprzecznego w kG cm²,
 I moment bezwładności masy pręta zastępczego względem osi skręcania pręta w kG cm sek.²,
 c stała sprężystości na skręcanie pręta zastępczego w kG cm/rd
 r stała sprężystości katowej podpory w kG cm/rd,
 G moduł Kirchhoffa w kG/cm²,
 p częstość katowa w sek.⁻¹,
 f częstość w Hz,
 g przyśpieszenie ziemskie w cm/sek.²,
 γ ciężar właściwy w kG/cm³.

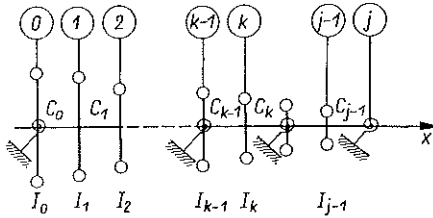
1. Założenia

Model matematyczny pręta wykonującego skrętne drgania własne zbudowano przy następujących założeniach:

- 1) drgania skrętne mogą być rozważane niezależnie od drgań giętych,
- 2) środki ścinania przekrojów poprzecznych pręta leżą na prostej zwanej osią skręcania,
- 3) drgania skrętne pręta wywołują obrót przekrojów poprzecznych około osi skręcania, przy czym przekroje te nie ulegają zniekształceniu,
- 4) sprężystość podpór oddziałuje wyłącznie na odkształcenia skrętne pręta w płaszczyznach prostopadłych do osi skręcania,
- 5) masy podpór są skupione na osi skręcania,
- 6) w rozważaniach pominięto wpływy zewnętrznego i wewnętrznego tłumienia.

Pręt o ciągłej masie zastąpiono wielomasowym modelem złożonym z nieważkich prętów zastępczych o stałej sztywności skręcania C równej średniej arytmetycznej sztywności skręcania przekrojów brzegowych odcinka pręta rzeczywistego. Na lewym brzegu każdego pręta zastępczego umieszczono masę zastępczą, której

biegunowy moment bezwładności I obliczono jako średnią arytmetyczną momentów bezwładności przyległych odcinków. Długości prętów zastępczych ustala się w zależności od kształtu pręta, rozmieszczenia podpór i elementów zamocowanych

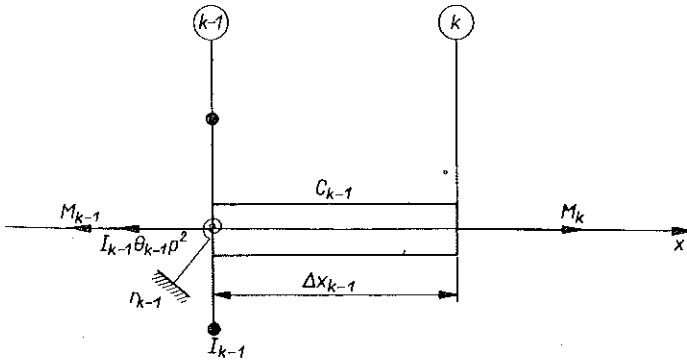


Rys. 1. Schemat modelu obliczeniowego

na pręcie oraz od wymaganej dokładności obliczeń. Opisany model obliczeniowy przedstawiono na rys. 1.

2. Macierzowe równanie skrętnych drgań własnych

Do dalszych rozważań przyjęto pręt pokazany na rys. 2. Jest to nieważki odcinek $k-1$ o stałej sztywności skręcania C_{k-1} . Na jego lewym brzegu znajduje się podpora sprężysta oraz masa zastępcza o momencie bezwładności I_{k-1} , który jest równy średniej arytmetycznej momentów bezwładności odcinków $k-2$ i $k-1$.



Rys. 2. Pręt zastępczy $k-1$

Oddziaływanie odrzuconych części pręta zastąpiono momentami skręcającymi M_{k-1} i M_k , które na rys. 2 zaznaczono jako dodatnie. Z zasady d'Alemberta otrzymano równanie

$$(2.1) \quad M_k = M_{k-1} + I_{k-1} \theta_{k-1} p^2 - r_{k-1} \theta_{k-1}.$$

Z elementarnego kursu wytrzymałości materiałów znana jest zależność

$$(2.2) \quad \theta_k = \theta_{k-1} - \frac{M_k \Delta x_{k-1}}{C_{k-1}}.$$

Podstawiając równanie (2.1) do (2.2) i wprowadzając oznaczenie $c_{k-1} = \Delta x_{k-1} / C_{k-1}$ otrzymano następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \theta_k &= (1 - c_{k-1} I_{k-1} p^2 + c_{k-1} r_{k-1}) \theta_{k-1} - c_{k-1} M_{k-1}, \\ M_k &= (I_{k-1} p^2 - r_{k-1}) \theta_{k-1} + M_{k-1}. \end{aligned}$$

W zapisie macierzowym ma on postać

$$(2.3) \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} V_{k-1} A_{k-1},$$

gdzie $\varepsilon_k = [\theta, M]_k$ oznacza wektor amplitud w przekroju k ,

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 - cIp^2 & Ip^2 \\ -c & 1 \end{bmatrix}_{k-1}$$

macierz pręta zastępczego ($k-1$),

$$V_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{k-1}$$

macierz sprężystości podpory. Jeżeli w rozważanym przekroju nie ma podpory, wówczas należy przyjąć $r = 0$.

Za pomocą równania (2.3) można określić wektor amplitud w przekroju k , jeśli jest znany wektor w przekroju $k-1$. Dla odcinka k można napisać analogiczne równanie

$$(2.4) \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k V_k A_k.$$

Podstawiając (2.3) do (2.4) otrzymano

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k-1} V_{k-1} A_{k-1} V_k A_k.$$

Dla przekroju $n+1$ będzie więc

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{k-1} \prod_{i=k-1}^n V_i A_i.$$

Jeżeli obliczenia zacznie się od lewego brzegu pręta i zakończy na prawym, to ostatnia zależność przyjmie postać

$$(2.5) \quad \varepsilon_j = \varepsilon_0 X,$$

gdzie $\varepsilon_0 = [\theta_0, M_0]$ oznacza lewy wektor brzegowy, $\varepsilon_j = [\theta_j, M_j]$ prawy wektor brzegowy oraz $X = \prod_{i=0}^{j-1} V_i A_i$ macierz przejścia.

W obliczeniach należy przyjmować za V_0 macierz jednostkową, ponieważ wpływ podpory na lewym brzegu pręta został już uwzględniony w ε_0 . Podobnie wektor ε_j uwzględnia wpływ podpory na prawym brzegu pręta. Ostatnim czynnikiem iloczynu X jest macierz odcinkowa A_{j-1} , dla której należy obliczyć I_{j-1} jako sumę połowy momentu bezwładności pręta $j-2$ i całkowitego momentu bezwładności pręta $j-1$.

Macierz przejścia jest macierzą kwadratową drugiego stopnia o postaci

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}.$$

Równanie (2.5) nazwano macierzowym równaniem skrętnych drgań własnych. Dla określonych warunków brzegowych jest ono spełnione tylko dla częstości własnych p_w .

3. Równanie częstości własnych

Po wykonaniu mnożenia wektora ε_0 przez macierz X równanie (2.5) przyjmie postać

$$[\theta_j, M_j] = [\theta_0 X_1 + M_0 X_3, \theta_0 X_2 + M_0 X_4].$$

Porównując odpowiednie elementy macierzy wierszowych i podstawiając zależności $M_j = r_j \theta_j$ oraz $M_0 = -r_0 \theta_0$ otrzymano następujący układ równań:

$$\theta_j = \theta_0 (X_1 - r_0 X_3), \quad r_j \theta_j = \theta_0 (X_2 - r_0 X_4).$$

Dzieląc równania stronami uzyskano po przekształceniu równanie częstości własnych

$$(3.1) \quad F(p) = r_j (X_1 - r_0 X_3) - X_2 + r_0 X_4 = 0.$$

Równanie to nie zależy od geometrycznych warunków brzegowych θ_0 i θ_j , natomiast istotnie wpływają na nie wartości r_0 i r_j . W praktycznych zastosowaniach rozważa się często układy, w których stałe sprężystości podpór przyjmują graniczne wartości: zero lub nieskończoność. W tabelicy 1 zestawiono równania częstości otrzymane ze wzoru (3.1) dla różnych warunków brzegowych.

Tablica 1. Szczególne przypadki równania częstości

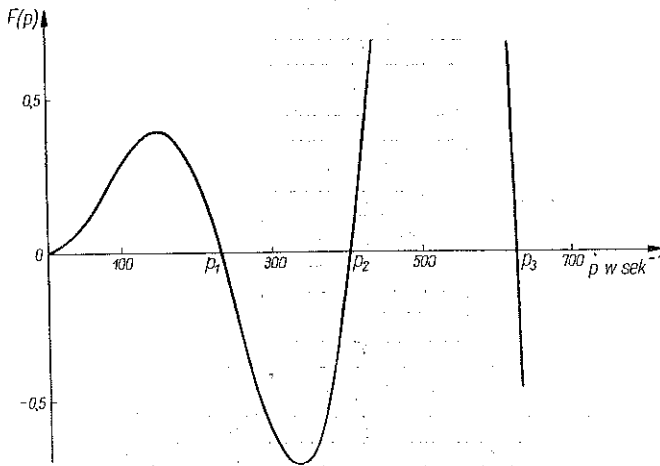
L.p.	Schemat podparcia	Warunki brzegowe				r_0	r_j	Równanie częstości
		θ_0	M_0	θ_j	M_j			
1		θ_0	$r_0 \theta_0$	θ_j	$r_j \theta_j$	r_0	r_j	$r_j (X_1 - r_0 X_3) - X_2 + r_0 X_4 = 0$
2		θ_0	0	θ_j	$r_j \theta_j$	0	r_j	$r_j X_1 - X_2 = 0$
3		θ_0	$r_0 \theta_0$	θ_j	0	r_0	0	$r_0 X_4 - X_2 = 0$
4		0	M_0	θ_j	$r_j \theta_j$	∞	r_j	$r_j X_3 - X_4 = 0$
5		θ_0	$r_0 \theta_0$	0	M_j	r_0	∞	$r_0 X_3 - X_1 = 0$
6		θ_0	0	θ_j	0	0	0	$X_2 = 0$
7		0	M_0	θ_j	0	∞	0	$X_4 = 0$
8		θ_0	0	0	M_j	0	∞	$X_1 = 0$
9		0	M_0	0	M_j	∞	∞	$X_3 = 0$

Równanie (3.1) jest spełnione tylko dla częstości własnych p_w obliczanego układu, tzn.

$$F(p) = 0 \quad \text{dla} \quad p = p_w,$$

$$F(p) \neq 0 \quad \text{dla} \quad p \neq p_w.$$

Obliczając dla różnych częstości p wartości funkcji $F(p)$, można wyznaczyć z pewną dokładnością jej miejsca zerowe, którym odpowiadają poszukiwane częstości własne. Na rysunku 3 pokazano wykres funkcji $F(p)$ wyznaczonej przy obliczaniu drgań skrętnych wału turbiny parowej.



Rys. 3. Wykres funkcji częstości $F(p)$

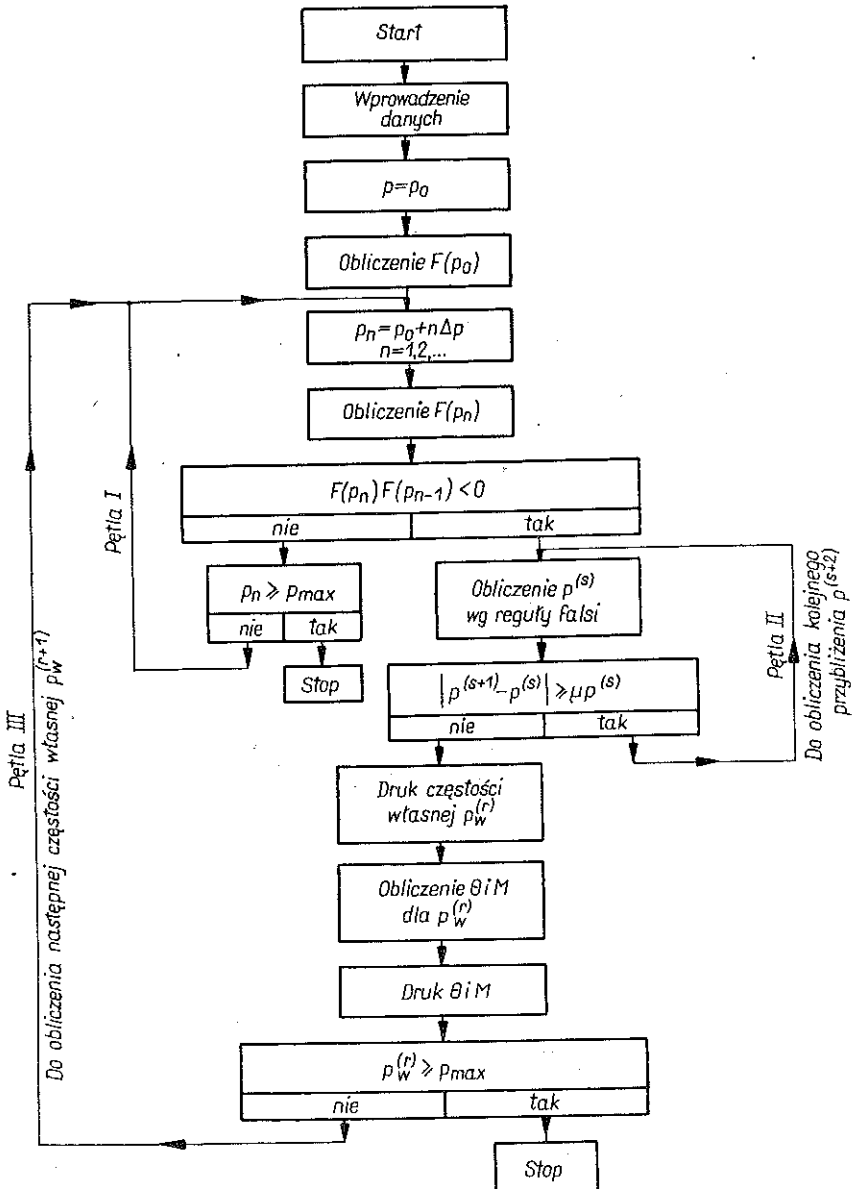
Za pomocą wzoru (2.3) można obliczyć w każdym przekroju pręta wektory amplitud ε dla odpowiednich częstości własnych. W tym celu należy zacząć obliczenia od lewego brzegu pręta przyjmując dla θ_0 lub M_0 dowolną wartość. Przechodząc kolejno od przekroju do przekroju można określić względny rozkład θ i M wzdłuż pręta drgającego z częstością własną.

4. Metoda obliczeń na elektronicznych maszynach cyfrowych

Przedstawiona metoda obliczeniowa, zwana dalej macierzową, wymaga wykonania bardzo wielu działań matematycznych. W takich przypadkach współczesna technika obliczeniowa stosuje elektroniczne maszyny cyfrowe. Na rysunku 4 pokazano schemat logiczny, według którego można opracować program opisanych obliczeń dla każdej maszyny cyfrowej.

Maszyna oblicza wartości funkcji $F(p)$ dla częstości wybieranych z ustalonego przedziału $[p_1, p_{\max}]$. Obliczenia są wykonywane w pętli I aż do zmiany znaku funkcji $F(p)$. Od tej chwili zaczynają się w pętli II obliczenia kolejnych przybliżeń częstości własnych $p^{(s)}$ za pomocą reguły fałsi. Wyjście z pętli II następuje, jeżeli $|p^{(s+1)} - p^{(s)}| < \mu p$, gdzie μ jest dopuszczalnym błędem względnym. Obliczona

w ten sposób częstość własna $p_w^{(r)} = p^{(s+1)}$ jest drukowana na taśmie wyników. Następnie maszyna oblicza i drukuje kąty skręcania i momenty dla każdego przekroju pręta. Jeżeli obliczona częstość własna $p_w^{(r)} < p_{\max}$, to maszyna otrzymuje rozkaz obliczenia następnej częstości własnej w pętli III. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, maszyna kończy obliczenia.



Rys. 4. Schemat logiczny obliczeń numerycznych

Dla przedstawionego algorytmu opracowano w Ośrodku Badawczym Zakładów Mechanicznych w Elblągu program dla maszyny cyfrowej Elliot 803. Obejmuje on wszystkie warunki brzegowe podane w tablicy 1. Za pomocą tego programu wykonuje się najczęściej obliczenia drgań skrętnych łopatek turbinowych i wirników turbin przekładniowych.

5. Dokładność metody

Błąd metody macierzowej określono dla pręta o stałym przekroju kołowym i długości $l = 40$ cm.

Wiadomo, że częstość skrętnych drgań własnych pręta o stałym przekroju można obliczyć za pomocą wzoru

$$f = \frac{k}{2\pi l} \sqrt{\frac{C}{\bar{I}}},$$

gdzie \bar{I} oznacza moment bezwładności masy 1 cm długości pręta względem osi skręcania w kgsek^2 , k pierwiastek równania częstości.

Dla przekroju okrągłego $C = GJ$. Ponieważ $\bar{I} = J\gamma/g$, przeto wzór ostatni przyjmuje postać

$$(5.1) \quad f = \frac{k}{2\pi l} \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}}.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że częstość własna nie zależy od średnicy pręta, lecz tylko od jego długości i własności mechanicznych materiału. Do obliczeń przyjęto materiał, dla którego $G = 0,8 \cdot 10^6$ kG/cm^2 i $\gamma/g = 0,8 \cdot 10^{-5}$ $\text{kGcm}^{-4} \text{sek}^2$.

Założono, że pręt jest na jednym końcu zamocowany sztywno, a na drugim swobodnie. Dla takich warunków brzegowych pierwiastek równania częstości k

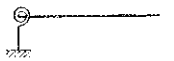


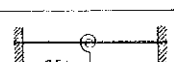
Tablica 2. Zależność błędu obliczeniowego od ilości prętów zastępczych

Ilość odcinków	Częstość I rzędu w Hz obliczona		Błąd w %	Częstość II rzędu w Hz obliczona		Błąd w %
	analitycznie	metodą macierzową		analitycznie	metodą macierzową	
10	1976	2052	3,85	5928	6099	2,88
20		2001	1,27		5989	1,03
40		2001	1,27		6001	1,23
80		1989	0,66		5966	0,64

przyjmuje wartości $(n - 1/2)\pi$, gdzie n jest liczbą naturalną. Częstotliwości własne obliczone wzorem (5.1) dla $n = 1$ i $n = 2$ mają wartości $f_1 = 1976$ Hz i $f_2 = 5928$ Hz.

Ten sam pręt obliczono metodą macierzową za pomocą maszyny cyfrowej Elliot 803. W tabelicy 2 zestawiono wyniki otrzymane dla różnej ilości podziałów długości pręta oraz podano błędy względne w odniesieniu do wyniku otrzymanego wzorem (5.1). Wynika stąd, że częstotliwości obliczone metodą macierzową są nieznacznie wyższe od wartości dokładnej, przy czym podział na 20 odcinków daje już wystarczającą dokładność obliczeń, określoną błędem względnym 1,3%.

Tablica 3. Zależność błędu obliczeniowego od warunków brzegowych

Schemat podparcia	Częstotść I rzędu w Hz obliczona		Błąd w %
	analitycznie	metodą macierzową	
	1258	1262	+0,3
	2441	2500	+2,4
	2793	2761	-1,1
	4491	4438	-1,1

W tabelicy 3 zestawiono wyniki obliczeń częstotliwości skrętnych drgań własnych wyżej opisanego pręta dla czterech wariantów podparcia. Stała sprężystości podpory wynosi w każdym przypadku $r = 10^5$ kGcm/rd. Pręt dzielono za każdym razem na 20 odcinków zastępczych. Z tabelicy wynika, że względny błąd obliczeń numerycznych w porównaniu z wynikami analitycznymi [1] nie przekracza 2,4%.

6. Przykład zastosowania metody macierzowej

Jako przykład wybrano obliczenia łopatkki turbinowej o następujących danych:

długość pióra łopatkki

$$l = 76,5 \text{ cm,}$$

gęstość materiału

$$\gamma = 8 \cdot 10^{-6} \text{ kGcm}^{-4} \text{ sek.}^2,$$

moduł Kirchhoffa

$$G = 0,858 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2,$$

pole przekroju poprzecznego

por. $F(x)$ na rys. 5,

minimalny moment bezwładności przekroju poprzecznego

por. $I_1(x)$ na rys. 5,

maksymalny moment bezwładności przekroju poprzecznego

por. $I_2(x)$ na rys. 5,

odległość środka ścinania od środka ciężkości przekroju

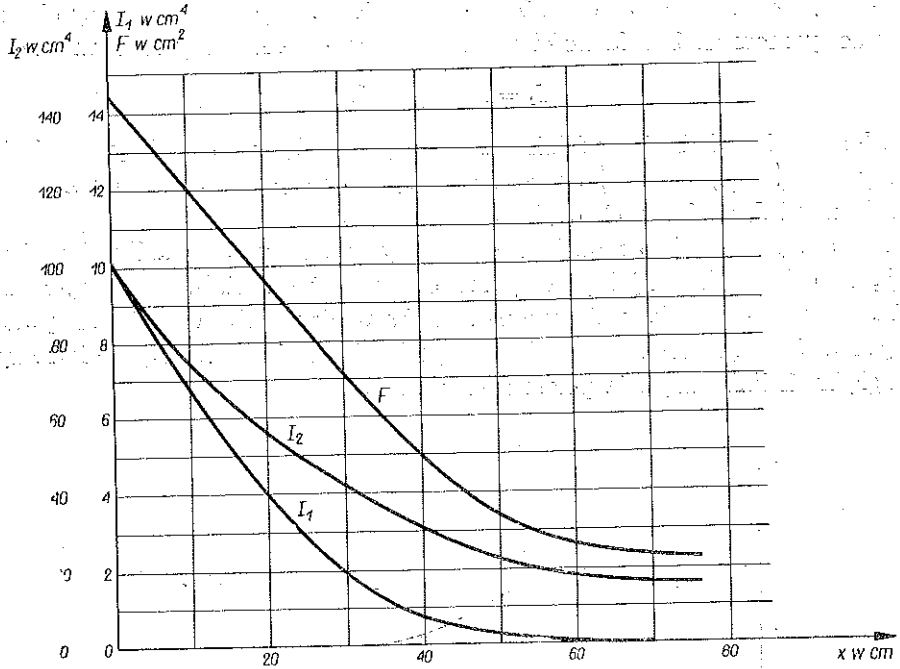
por. $h(x)$ na rys. 6,

poprzecznego

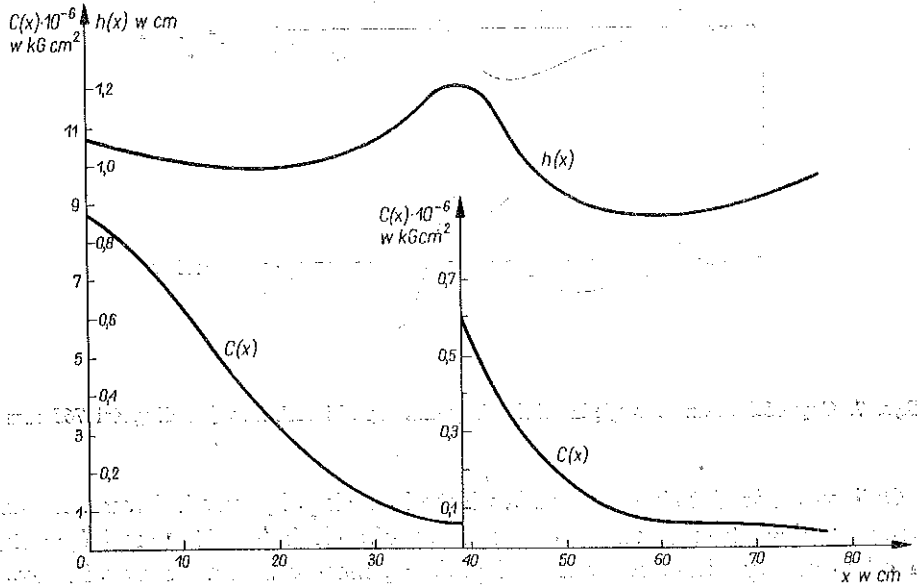
por. $C(x)$ na rys. 6.

szttywność skręcania przekroju poprzecznego

Wartości $h(x)$ i $C(x)$ obliczono metodą opisaną w pracy [2].



Rys. 5. Wykresy I_1 , I_2 i F dla łopatki turbinowej o długości 765 mm



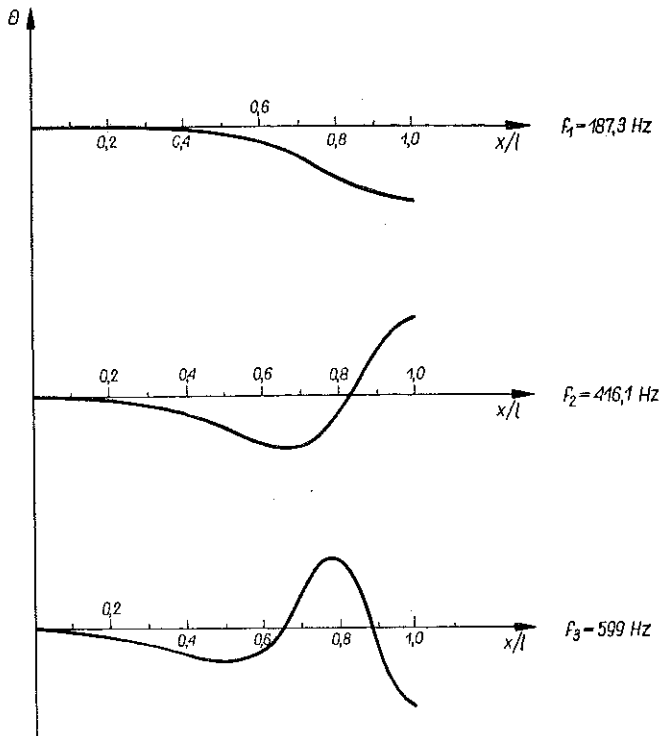
Rys. 6. Wykresy $C(x)$ i $h(x)$ dla łopatki turbinowej o długości 765 mm

W założeniach przyjęto, że w czasie drgań skrętnych każdy przekrój poprzeczny obraca się wokół swojego środka ścinania. Względem tego punktu należy obliczyć biegunowy moment bezwładności przekroju. Jest on określony znanym wzorem

$$I_s = I_1 + I_2 + Fh^2.$$

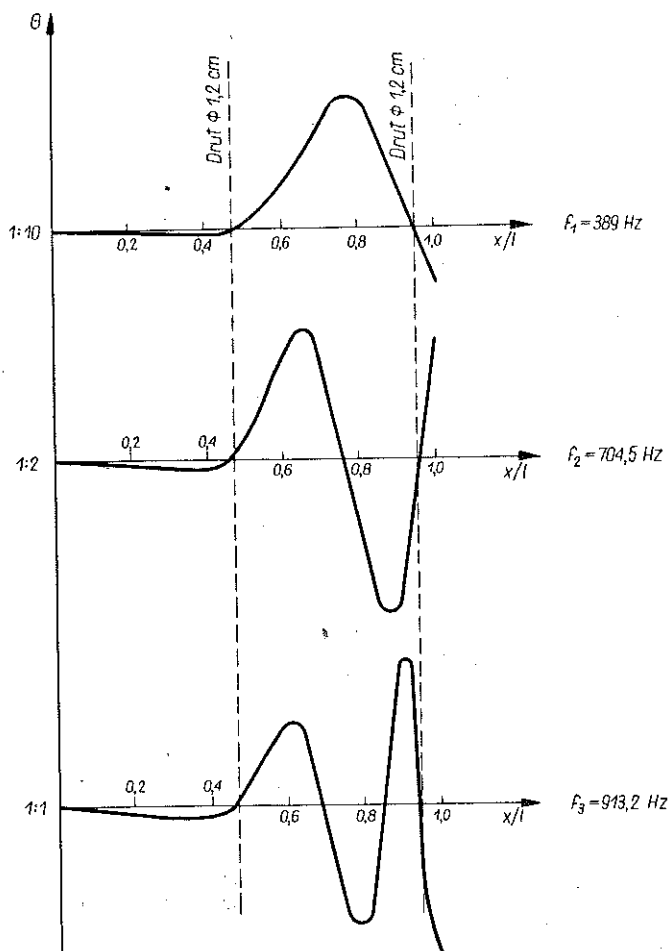
Moment bezwładności odcinka zastępczego względem osi skręcania będzie równy $I = I'_s \Delta x \mu$, gdzie I'_s oznacza średnią arytmetyczną wartości momentów bezwładności I_s na brzegach odcinka zastępczego.

Dla obliczeń przyjęto model matematyczny umieszczony w tabelicy 1 pod pozycją 7. Pióro obliczanej łopatki podzielono na 40 odcinków zastępczych. Dla każdego z tych odcinków obliczono moment bezwładności I oraz średnią sztywność skręcania C . Otrzymane w ten sposób dane posłużyły do obliczenia częstości własnych i względnych linii skręcania pokazanych na rys. 7.



Rys. 7. Częstości własne i względne linie skręcania łopatki turbinowej o długości 765 mm

Obliczono również skrętne drgania własne łopatek połączonych dwoma drutami o średnicy $d = 1,2$ cm, umieszczonych na wysokościach $l_1 = 32,0$ cm i $l_2 = 72,5$ cm od podstawy pióra. Rozważane łopatki są mocowane na tarczy wirnikowej i łączone drutami zamkniętymi w nieprzerwany krąg. Można wówczas przyjąć, że każda łopatka drga w identycznych warunkach. Dzięki temu drgania całego



Rys. 8. Częstości własne i względne linie skręcania pakietu łopatek o długości 765 mm

wieńca łopatek można zastąpić drganiami pojedynczej łopatki usztywnionej odcinkami drutów o długościach równych odpowiednim podziałkom. Stałe sprężystości drutów obliczono według [3] wzorem

$$r_a = \frac{12E_a I_a R_a}{t_a},$$

gdzie E_a oznacza moduł Younga drutu w kG/cm^2 , I_a moment bezwładności przekroju poprzecznego drutu względem średnicy w cm^4 , t_a podziałkę drutu w cm oraz R_a współczynnik sprężystości połączenia drutu z łopatką [3].

W rozważanym przypadku stałe sprężystości wynosiły: dla drutu dolnego $4,46 \cdot 10^5 \text{ kGcm/rd}$ i dla drutu górnego $6,34 \cdot 10^5 \text{ kGcm/rd}$.

Na rysunku 8 podano częstości własne i względne linie skręcania obliczone dla wyżej opisanego pakietu łopatek.

W tabelicy 4 zestawiono obliczone częstości skrętnych drgań własnych łopatki i pakietu oraz porównano te ostatnie z wynikami eksperymentalnymi.

Tablica 4. Zestawienie obliczonych i pomierzonych częstości własnych łopatki i pakietu

Częstości własne w Hz	I	II	III
obliczone dla łopatki	187	416	599
obliczone dla pakietu	389	704	913
pomierzone dla pakietu	357—394	663	—

Literatura cytowana w tekście

1. И. В. Анасьев, *Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем*, Москва 1946.
2. R. ŁACZKOWSKI, *Obliczanie współrzędnych środka ścinania dowolnego przekroju asymetrycznego o brzegu jednorodnym*, Rozpr. Inżyn., 1, 15 (1967).
3. R. ŁACZKOWSKI i Cz. ŻELAZOWSKI, *Badania współczynnika sprężystości połączenia drutu wiążącego z łopatką*, Praca D015 (wewnętrzna) Ośrodka Badawczego Zakładów Mechanicznych w Elblągu, Elbląg 1958.

Резюме

КРУТИЛЬНЫЕ, СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГООПОРНОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящей работе рассматриваются крутильные собственные колебания переменного сечения с произвольным количеством упругих опор. Сплошной стержень заменен дискретной моделью, для которой выводится матричное уравнение собственных колебаний. Для разных краевых условий получаются уравнения частоты, нулевые точки которых являются собственными частотами. Дается метод расчета этих частот и соответствующих им относительных линий кручения, приводя также логическую схему расчета для электронных цифровых машин. Определяется погрешность матричного метода в зависимости от краевых условий и от количества отрезков, на которые разделяется упомянутый стержень. В качестве примера даются результаты расчета крутильных собственных колебаний лопасти турбины, которые сравниваются с экспериментальными.

Summary

NATURAL TORSIONAL VIBRATION OF A BAR WITH VARIABLE SECTION, RESTING ON AN ARBITRARY NUMBER OF SUPPORTS

The supports mentioned in the title are assumed to be elastic. The continuous bar is replaced by a model composed of many masses for which the matrix equation of natural vibration is derived. For various boundary conditions frequency equations are obtained the zeros determining the natural frequencies. A method for computing these frequencies as well as the corresponding relative torsion lines is described a computation scheme being also given for an electronic digital computer. The error of the matrix method is determined in function of the boundary conditions and the number of segments into which the bar has been divided. As an example the results of computation of natural torsional vibrations of a turbine blade, are confronted with experimental methods.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 marca 1967 r.