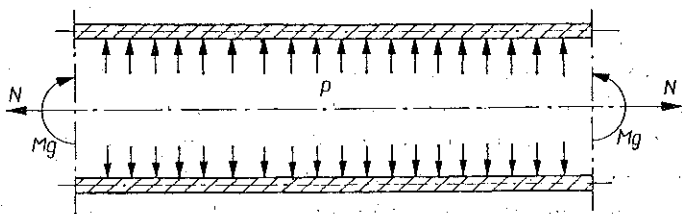


KRZYWE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ DLA CIENKOŚCIENNEGO RUROCIĄGU PODDANEGO CIŚNIENIU WEWNĘTRZNEMU I ZGINANIU

MIECZYŚLAW MROWIEC i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W pracy rozpatrujemy rurociąg cienkościenny, poddany jednoczesnemu działaniu ciśnienia wewnętrznego p i momentu zginającego M_g (rys. 1); uwzględnimy również możliwość działania siły podłużnej N . Jej udział będziemy charakteryzowali zdefiniowanym później bezwymiarowym współczynnikiem ψ .



Rys. 1

Celem pracy jest podanie możliwie prostych a dostatecznie dokładnych równań krzywych nośności granicznej w układzie p , M_g przy sile N jako dodatkowym parametrze (nośność graniczna przekroju poprzecznego). W przypadku rurociągu statycznie wyznaczalnego krzywe te wyznaczą jednocześnie nośność samego rurociągu, bowiem moment zginający i siła podłużna są wtedy danymi funkcjami obciążeń zewnętrznych, natomiast w przypadku statycznej niewyznaczalności uzyskane wyniki będą mogły stanowić podstawę do dalszych obliczeń.

Rozpatrywane zagadnienie można zaliczyć do problemów nośności granicznej powłok walcowych kolistych nie wykazujących osiowej symetrii. Jednakże, z jednej strony, teoria nośności granicznej takich powłok jest jeszcze dość słabo rozwinięta (w przeciwieństwie do powłok osiowo-symetrycznych), a z drugiej strony, dla celów praktycznych dogodniejsze jest nawiązywanie do teorii prętów, posługującej się pojęciem przekroju poprzecznego i uogólnionych sił wewnętrznych w tym przekroju (w stosunku do sił wewnętrznych «powłokowych» siły wewnętrzne w przekroju pręta są już w pewnym stopniu wielkościami integralnymi).

Kierując się powyższymi przesłankami jeden z autorów skonstruował dla rozpatrywanego rurociągu w pracy [3] pewne statycznie dopuszczalne pola naprężeń

rozpatrując równowagę pierścienia (łuku) wyciętego z rurociągu sąsiednimi przekrojami poprzecznymi. Założono przy tym, że pierwszy przegub plastyczny pojawi się w łuku w miejscu najbardziej wyężonym (gdzie obwodowe naprężenia rozciągające spotykają się z największymi co do wartości bezwzględnej naprężeniami osiowymi ściskającymi) i że w stanie granicznym cały łuk ulegnie uplastycznieniu. Warunek plastyczności przyjęto w postaci Hubera-Misesa-Hencky'ego dla płaskiego stanu naprężenia. W stosunku do pokrewnej pracy M. I. JERCHOWA [1] różnica polega przede wszystkim na uwzględnieniu obwodowego zginania ścianki rury oraz wprowadzeniu dodatkowej wielkości siły podłużnej N (w pracy M. I. Jerchowa siła ta odpowiadała ciśnieniu na denka zbiornika, co upraszczało zagadnienie w sposób istotny, ale na ogół nie odpowiadało rzeczywistym warunkom pracy rurociągu). Niniejsza praca stanowi bezpośrednią kontynuację pracy M. MROWCA [3].

Omówienie pokrewnej literatury oraz pewną ogólną klasyfikację problemów obciążeń złożonych w teorii plastyczności zawierają prace M. Mrowca [3] i M. ŻYCZKOWSKIEGO [8].

2. Statycznie dopuszczalne pole naprężeń

Konstruując w pracy [3] statycznie dopuszczalne pole naprężeń, które doprowadzi nas w efekcie do kresu dolnego nośności granicznej rurociągu, przyjęto, że w ściance rury występują naprężenia normalne: obwodowe σ_θ i osiowe σ_z (podano tam również sposób uwzględnienia naprężeń $\tau_{z\theta}$ odpowiadających istnieniu siły poprzecznej). Założono, że naprężenia te zależą od zmiennej θ (kąta w układzie walcowym), natomiast jeżeli chodzi o zmienną naprężeń na grubości, to przyjęto, iż σ_z jest stałe, a σ_θ zmienia się skokowo tak, by z jednej strony spełnić warunek plastyczności, a z drugiej — zrównoważyć istnienie obwodowego momentu zginającego w ściance rury. Współrzedną graniczną na grubości $\xi = \xi(\theta)$ oraz naprężenie $\sigma_z = \sigma_z(\theta)$ wyznaczono z warunków równowagi wewnętrznej wyciętego pierścienia (łuku). Ponadto założono istnienie skokowej zmiany naprężenia σ_z jako funkcji kąta θ (charakterystyczne np. dla czystego zginania), oznaczając odpowiednią współrzedną graniczną przez φ_0 ; przy czystym zginaniu $\varphi_0 = 0$, natomiast w przypadku złożonym można się spodziewać, iż $-\pi/2 \leq \varphi_0 \leq 0$ (rys. 2).

Ostatecznie naprężenia σ_z określono za pomocą wzoru

$$(2.1) \quad \frac{\sigma_z}{Q_r} = A + B \sin \theta \pm (C + D \sin \theta),$$

gdzie stałe współczynniki wynoszą

$$(2.2) \quad A = \frac{q}{2},$$

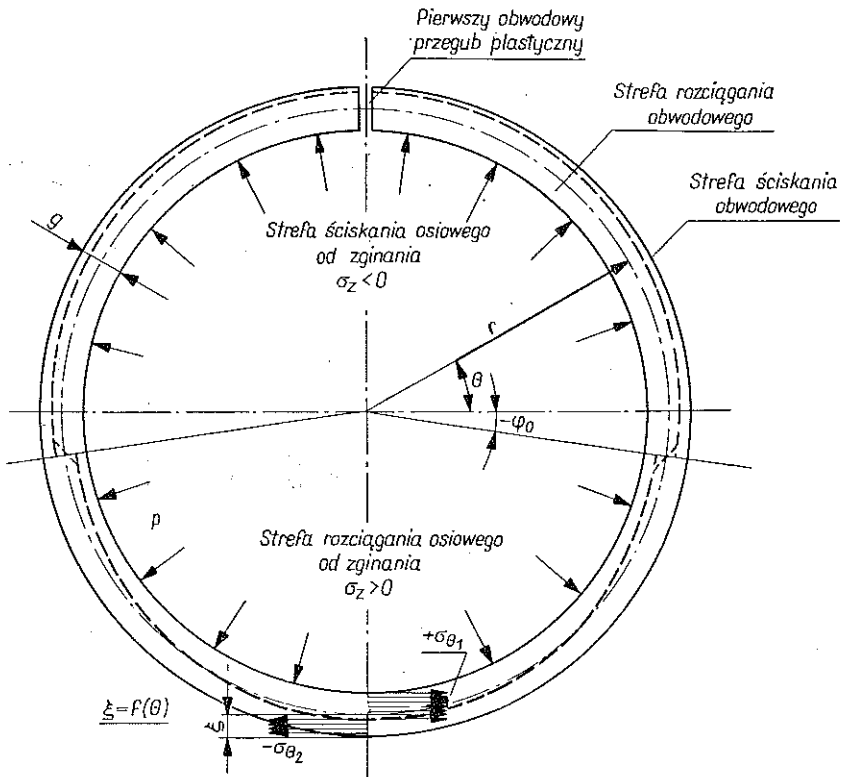
$$B = - \frac{(1 - 2\psi) t q \pi \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2 + 4t\varphi_0} \left(1 - \frac{3}{4} q^2\right)}{2(8\varphi_0 + 3tq \cos \varphi_0 + 8 \cos \varphi_0)},$$

$$(2.2) \quad C = \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} - \frac{2(1 - 2\psi) q\pi + 8\varphi_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}{8\varphi_0 + 3tq \cos \varphi_0 + 8 \cos \varphi_0},$$

$$[c.d] \quad D = \left(\frac{3}{4} q + \frac{2}{t}\right) \frac{(1 - 2\psi) tq\pi + 4t\varphi_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}{8\varphi_0 + 3tq \cos \varphi_0 + 8 \cos \varphi_0}.$$

Bezwymiarowe wielkości wprowadzone tu za pomocą następujących wzorów:
bezwymiarowe ciśnienie wewnętrzne

$$(2.3) \quad q = \frac{r}{gQ_r} p,$$



Rys. 2

bezwymiarowa grubość rurociągu

$$(2.4) \quad t = \frac{g}{r},$$

bezwymiarowa siła podłużna w rurociągu

$$(2.5) \quad \psi = \frac{N}{2\pi r^2},$$

przy czym g oznacza grubość ścianki, r średni promień oraz Q_r granicę plastyczności materiału rurociągu. Znak plus należy w równaniu (2.1) przyjąć dla przedziału $-\pi/2 < \theta < \varphi_0$, a znak minus dla przedziału $\varphi_0 < \theta < \pi/2$.

Naprężenia obwodowe σ_θ są określone warunkiem plastyczności, mianowicie

$$(2.6) \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{Q_r^2 - \frac{3}{4} \sigma_z^2},$$

przy czym znak plus odnosi się do strefy wewnętrznej (strefa rozciągania obwodowego), znak minus do zewnętrznej (strefa ściskania obwodowego). Wzoru na współrzędną graniczną ξ nie przytaczamy, gdyż nie będziemy z niego korzystali w obecnej pracy.

Przez odpowiednie scałkowanie naprężeń σ_z obliczono moment zginający M_g . Mamy mianowicie

$$(2.7) \quad M_g = -gr^2 \int_0^{2\pi} \sigma_z \sin \theta \, d\theta,$$

a po rozbiściu tej całki na dwie (w związku z nieciągłością σ_z) i wykonaniu całkowania otrzymano

$$(2.8) \quad m = \frac{4}{\pi} \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} - \frac{4 \cos \varphi_0}{t} - \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin \varphi_0 \right) \left(\frac{3}{4} q + \frac{2}{t} \right) \right] \frac{(1 - 2\psi) t q \pi + 4 t \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}}{8 \varphi_0 + 8 \cos \varphi_0 + 3 t q \cos \varphi_0},$$

gdzie m oznacza bezwymiarowy moment zginający, przy czym

$$(2.9) \quad m = \frac{M_g}{\pi Q_r g r^2}.$$

Równanie (2.8) jest równaniem poszukiwanej krzywej granicznej $m = m(q)$, a właściwie powierzchni granicznej $m = m(q, \psi)$, określającej nośność graniczną rurociągu. Stanie się ono efektywne po odpowiednim doborze swobodnego dotychczas parametru φ_0 , tj. współrzędnej granicznej, określającej skokową zmianę naprężeń osiowych σ_z . Zgodnie z podstawowymi twierdzeniami odnoszącymi się do statycznie dopuszczalnych pól naprężeń w teorii plastyczności należałoby dobrać φ_0 tak, by moment m określony wzorem (2.8) osiągnął wartość największą. Jednakże w naszym przypadku metoda taka nie jest możliwa: przy pewnej wartości φ_0 z przedziału $-\pi/2 < \varphi_0 < 0$ mianownik we wzorze (2.8) staje się równy zeru i moment m rośnie nieograniczenie. Rozwiązanie traci sens fizyczny, bowiem wtedy współrzędna ξ , oddzielająca strefę rozciągania obwodowego od strefy ściskania obwodowego, nie jest zawarta w przedziale $0 \leq \xi \leq g$, czyli jedna ze stref wychodziłaby poza ściankę rury, a druga byłaby ujemną. Dla uzyskania ostatecznego równania krzywej nośności granicznej postępujemy więc inaczej.

Założymy mianowicie, że przy niewielkim ciśnieniu wewnętrznym w stosunku do zginania oś nieciągłości naprężeń σ_z pokrywa się stałe z główną środkową osią bezwładności przekroju, czyli $\varphi_0 = 0$ i przedstawimy rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego zmiennej q («wokół czystego zginania»). Z drugiej strony przyjmijemy, że przy niewielkim udziale zginania naprężenia σ_z są określone funkcją ciągłą, co odpowiada usytuowaniu osi nieciągłości na brzegu przekroju, $\varphi_0 = -\pi/2$. Odpowiednie rozwiązanie przedstawimy w postaci szeregu potęgowego zmiennej $\bar{q} - q$, gdzie \bar{q} oznacza nośność rurociągu przy czystym ciśnieniu wewnętrznym ewentualnie z wpływem siły podłużnej (rozwińcie «wokół czystego ciśnienia wewnętrznego»).

Dysponując wreszcie rozwinięciami w szeregi potęgowe, czyli kilku pierwszymi pochodnymi poszukiwanej funkcji (w punktach $q = 0$ i $q = \bar{q}$), przedstawimy tę funkcję wielomianem aproksymacyjnym przy warunkach zgodności typu Hermite'a na brzegach przedziału.

3. Przedstawienie równania krzywej nośności granicznej przy pomocy szeregów potęgowych

3.1. Rozwinięcie «wokół czystego zginania». Podstawiając do (2.8) $\varphi_0 = 0$ otrzymamy najpierw

$$(3.1) \quad m = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4}q^2} + \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4}q^2} - \frac{4}{t} \right) \frac{2(1 - 2\psi) tq}{8 + 3tq},$$

a po rozwinięciu w szereg potęgowy zmiennej q przy parametrach t i ψ uzyskujemy stąd

$$(3.2) \quad m = \frac{4}{\pi} - (1 - 2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t \right) q - \left[\frac{3}{2\pi} - \frac{3}{8} (1 - 2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t \right) t \right] q^2 + \dots$$

3.2. Rozwinięcie «wokół czystego ciśnienia wewnętrznego» Podstawienie do (2.8) $\varphi_0 = -\pi/2$ otrzymamy po pewnych przekształceniach

$$(3.3) \quad m = \left[1 + \left(\frac{3}{8} q + \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4}q^2} \right) t \right] \left[\sqrt{1 - \frac{3}{4}q^2} - \frac{1}{2} (1 - 2\psi) q \right].$$

Równanie $m = 0$ określa nośność rurociągu przy ciśnieniu wewnętrznym z udziałem siły osiowej. Otrzymujemy wtedy

$$(3.4) \quad q = \bar{q} = \frac{1}{\sqrt{1 - \psi + \psi^2}}.$$

Jest to wartość ścisła, bowiem podane statycznie dopuszczalne pole naprężeń w tym przypadku pokrywa się z rozwiązaniem ścisłym. Dla uzyskania poszukiwanego rozwinięcia wprowadzimy teraz nową zmienną

$$(3.5) \quad \vartheta = \bar{q} - q = \frac{1}{\sqrt{1 - \psi + \psi^2}} - q$$

i uzyskaną funkcję rozwinieemy w szereg zmiennej ϑ , równej zero przy braku momentu zginającego. Ponieważ

$$(3.6) \quad \sqrt{1 - \frac{3}{4}q^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\psi+\psi^2}} - \vartheta \right)^2} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{1-\psi+\psi^2}} \sqrt{(1-2\psi)^2 + 6\vartheta\sqrt{1-\psi+\psi^2} - 3\vartheta^2(1-\psi+\psi^2)},$$

więc rozwinięcie będzie miało różną postać przy $\psi \neq 1/2$ i przy $\psi = 1/2$ (M.I. Jerchow [1] rozpatrywał tylko ten ostatni przypadek). Przy $\psi \neq 1/2$ możemy $(1-2\psi)$ wyciągnąć przed pierwiastek i ostatecznie otrzymujemy zwyczajny szereg potęgowy

$$(3.7) \quad m = \frac{\sqrt{1-\psi+\psi^2}}{2(1-2\psi)} [(2-\psi)t + 4\sqrt{1-\psi+\psi^2}] \vartheta + 0(\vartheta^2),$$

gdzie symbol 0 oznacza rząd pierwszego pominiętego wyrazu. Zbieżność tego szeregu pogarsza się przy zmierzaniu parametru ψ do $1/2$. Przy $\psi = 1/2$ pierwszy składnik pod pierwiastkiem (3.6) znika i otrzymujemy ostatecznie uogólniony szereg potęgowy [7]

$$(3.8) \quad m = \sqrt[4]{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4} t \right) \sqrt{\vartheta} + \frac{t\sqrt{3}}{4} \vartheta + 0(\vartheta^{3/2}).$$

Pojawienie się w szeregu (3.8) wyrażenia $\sqrt{\vartheta}$ oznacza, iż w punkcie $\vartheta = 0$, czyli $q = \bar{q}$, mamy wtedy pionową styczną do krzywej nośności granicznej $m = m(q)$. W związku z tym przypadek $\psi = 1/2$ potraktujemy oddzielnie; aproksymacja wielomianem nie może tu znaleźć zastosowania.

4. Przedstawienie równania krzywej nośności granicznej przy pomocy wielomianów aproksymacyjnych

Dysponując wartościami funkcji $m = m(q)$ i jej kilku pierwszych pochodnych w punktach $q = 0$ i $q = \bar{q}$, będziemy mogli przedstawić ją przy pomocy wielomianów aproksymacyjnych nakładając na te wielomiany warunki zgodności typu Hermite'a.

Szacowanie błędu takiej aproksymacji można znaleźć np. w monografii I. P. NATANSONA [4]; M. ŻYCZKOWSKI [5] podaje gotowe wzory na współczynniki wielomianów. Zastosowanie dokładniejszej aproksymacji «jednokrotnie optymalnej» (M. ŻYCZKOWSKI [6]) nie będzie tu możliwe z uwagi na brak znajomości wartości funkcji wewnątrz przedziału i z uwagi na pojawienie się dwóch dodatkowych parametrów ψ i t .

Wielomiany aproksymacyjne zapiszemy w postaci

$$(4.1) \quad m = \sum_{j=0}^k \alpha_{jk} q^j;$$

przyjmiemy kolejno $k = 3$ i $k = 4$, gdyż mniejsza liczba wyrazów dawałaby przybliżenie zbyt mało dokładne, a większa prowadziłaby do wzorów zbyt skomplikowanych.

W przypadku $k = 3$ mamy do dyspozycji cztery warunki zgodności; przyjmiemy aproksymację brzegową Hermite'a typu 2+2 (po dwa warunki zgodności na każdym brzegu przedziału $0 \leq q \leq \bar{q}$). W takim razie dwa pierwsze współczynniki są wprost równe współczynnikom szeregu potęgowego (3.2):

$$(4.2) \quad \alpha_{03} = \frac{4}{\pi}, \quad \alpha_{13} = -(1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right),$$

a współczynniki α_{23} i α_{33} obliczymy z warunku zgodności w punkcie $q = \bar{q}$. W punkcie tym $m = 0$ natomiast pierwsza pochodna wobec (3.7) wynosi

$$(4.3) \quad \left[\frac{dm}{dq} \right]_{q=\bar{q}} = \left[\frac{dm}{d\vartheta} \right]_{\vartheta=0} \frac{d\vartheta}{dq} = - \left[\frac{dm}{d\vartheta} \right]_{\vartheta=0} = \\ = - \frac{\sqrt{1-\psi+\psi^2}}{2(1-2\psi)} [(2-\psi)t + 4\sqrt{1-\psi+\psi^2}].$$

Ze wzorów podanych w pracy [5] obliczymy teraz współczynniki α_{23} i α_{33} otrzymując

$$(4.4) \quad \alpha_{23} = \frac{1-\psi+\psi^2}{2\pi(1-2\psi)} [\pi t(2-\psi) - 24(1-2\psi) + 4\pi\sqrt{1-\psi+\psi^2}] + \\ + 2(1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) \sqrt{1-\psi+\psi^2}, \\ \alpha_{33} = -(1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) (1-\psi+\psi^2) + \frac{8}{\pi} (1-\psi+\psi^2)^{3/2} - \\ - \frac{(1-\psi+\psi^2)^2}{2(1-2\psi)} \left[4 + \frac{t(2-\psi)}{\sqrt{1-\psi+\psi^2}} \right].$$

Tak więc wielomian aproksymacyjny jest w zupełności określony. Dokładność aproksymacji przy niezbyt dużych wartościach ψ wydaje się zupełnie dobra (zilustrujemy ją później wykreslnie), jednak przy ψ zmierzającym do 1/2 szybko maleje, bowiem wtedy pochodna (4.3) rośnie nieograniczenie, a efekt ten nie daje się ująć przyjętym typem aproksymacji wielomianami.

Pewną poprawę dokładności uzyskamy przez przyjęcie wielomianu aproksymacyjnego czwartego stopnia ($k = 4$); mamy wtedy do dyspozycji pięć warunków zgodności, które podzielimy według schematu 3+2, aby bardziej wykorzystać szereg (3.2), który jest lepiej zbieżny. W takim razie trzy pierwsze współczynniki są teraz równe wprost współczynnikom szeregu (3.2):

$$(4.5) \quad \alpha_{04} = \frac{4}{\pi}, \quad \alpha_{14} = -(1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right), \\ \alpha_{24} = -\frac{3}{2\pi} + \frac{3}{8} (1-2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t\right) t,$$

a pozostałe obliczamy z warunku $m = 0$ dla $q = \bar{q}$ i z warunku zgodności pochodnej (4.3) w tym punkcie. Ostatecznie otrzymujemy następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{34} = & \sqrt{1 - \psi + \psi^2} \left[\frac{3}{\pi} - \frac{3}{4} (1 - 2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t \right) t \right] + \\
 & + 3 (1 - \psi + \psi^2) (1 - 2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t \right) - \frac{16}{\pi} (1 - \psi + \psi^2)^{3/2} + \\
 & + \frac{(1 - \psi + \psi^2)^{3/2}}{2(1 - 2\psi)} [4 \sqrt{1 - \psi + \psi^2} + (2 - \psi) t], \\
 (4.6) \quad \alpha_{44} = & - (1 - \psi + \psi^2) \left[\frac{3}{2\pi} - \frac{3}{8} (1 - 2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t \right) t \right] - \\
 & - 2 (1 - \psi + \psi^2)^{3/2} (1 - 2\psi) \left(1 - \frac{\pi}{16} t \right) + \frac{12}{\pi} (1 - \psi + \psi^2)^2 - \\
 & - \frac{(1 - \psi + \psi^2)^2}{2(1 - 2\psi)} [4 \sqrt{1 - \psi + \psi^2} + (2 - \psi) t].
 \end{aligned}$$

Krzywa nośności granicznej jest tu więc określona za pomocą wielomianu aproksymacyjnego (4.1) z podstawieniem (4.5) i (4.6). Można powiedzieć, że wielomian ten określa powierzchnię graniczną $m = m(q, \psi)$ w obszarze niezbyt bliskim $\psi = 1/2$.

5. Przypadek szczególny $\psi = 1/2$ (rura zamknięta dnami)

W przypadku $\psi = 1/2$ styczna do krzywej granicznej $m = m(q)$ jest w punkcie $q = \bar{q} = 2/\sqrt{3}$ pionowa i nie możemy stosować aproksymacji wielomianami. Sytuacja w tym przypadku jest jednak znacznie prostsza, bowiem wzory (3.1) i (3.3) przybierają tu odpowiednio postać

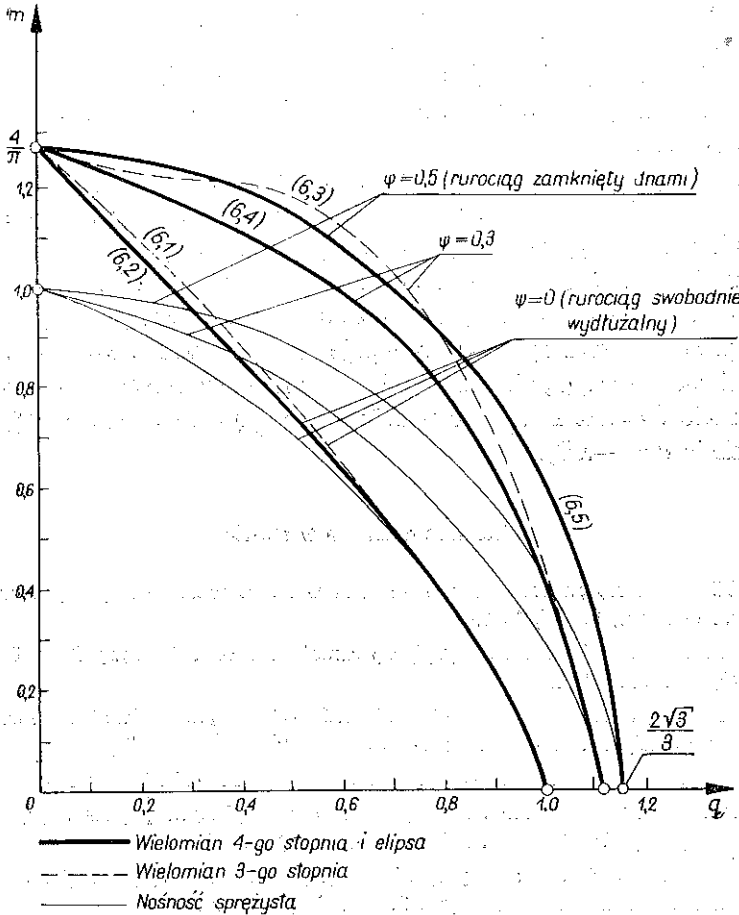
$$(5.1) \quad m = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2},$$

$$(5.2) \quad m = \left[1 + \frac{3}{8} \left(q + \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2} \right) t \right] \sqrt{1 - \frac{3}{4} q^2}.$$

Równanie (5.1) jest równaniem elipsy; elipsę tę uzyskuje się również przez odpowiednie przekształcenie wzorów podanych przez M. I. JERCHOWA [1]. Krzywa (5.2) odbiega tylko nieznacznie od elipsy, a przy $t = 0$ (rurociąg o bardzo cienkiej ściance) również przechodzi w elipsę leżącą jednak w całości wewnątrz (5.1). Ponieważ przy zastosowaniu metody statycznej otrzymuje się w efekcie kres dolny nośności granicznej, zatem równanie (5.1) prowadzące do większych wartości momentu m jest dokładniejsze od równania (5.2). Równanie (5.1) spełniające wszystkie wymagane warunki zgodności przyjmujemy tu zatem jako ostateczne równanie krzywej granicznej.

6. Przykłady liczbowe

Podamy obecnie kilka przykładów liczbowych i zilustrujemy je wykresnie. We wszystkich przykładach przyjmujemy wartość parametru $t = g/r = 0,1$, natomiast rozważymy trzy wartości parametru ψ : $\psi = 0$ (brak siły podłużnej, idealna



Rys. 3

kompensacja), $\psi = 0,3$ (w zakresie sprężystym ta wartość parametru odpowiadała płaskiemu stanowi odkształcenia [2]) oraz $\psi = 0,5$ (rura zamknięta dnami).

Dla $\psi = 0$ wielomiany aproksymacyjne (4.1) dla $k = 3$ i $k = 4$ posiadają odpowiednio postać:

$$(6.1) \quad m = 1,273 - 0,979q + 0,240q^2 - 0,534q^3,$$

$$(6.2) \quad m = 1,273 - 0,979q - 0,440q^2 + 0,825q^3 - 0,679q^4.$$

Dla $\psi = 0,3$ otrzymujemy

$$(6.3) \quad m = 1,273 - 0,392q + 1,351q^2 - 1,781q^3,$$

$$(6.4) \quad m = 1,273 - 0,392q - 0,462q^2 + 1,450q^3 - 1,445q^4.$$

Natomiast, gdy $\psi = 0,5$, wykorzystamy równanie (5.1):

$$(6.5) \quad m = 1,273\sqrt{1 - 0,75q^2}.$$

Odpowiednie wykresy rozkładu naprężeń σ_θ i σ_z podano w pracy M. MROWCA [3].

Wyniki obliczeń zestawiono na rys. 3. Wielomiany (6.1) i (6.2) dają wyniki bardzo bliskie, natomiast pomiędzy (6.3) i (6.4) rozbieżności są znacznie większe. Aproksymacja (6.3) wydaje się już zbyt mało dokładna. Dla porównania przytoczono też zaczerpnięte z pracy M. MROWCA [2] krzywe nośności sprężystej przy tych samych wartościach parametru ψ .

Zwraca uwagę dość znaczny wpływ parametru ψ . Dla przypadku rurociągu zamkniętego dnami obecna praca potwierdza wynik M. I. JERCHOWA [1]. Natomiast rurociąg nie przenoszący rozciągających sił podłużnych ($\psi = 0$) posiada na ogół wyraźnie mniejszą nośność graniczną od zamkniętego dnami i stosowanie w tym przypadku wzoru Jerchowa mogłoby prowadzić do znacznych błędów, zawsze na niekorzyść pewności. Przy $\psi = 0$ występuje bowiem poważny wpływ obwodowego zginania ścianki rurociągu, nie uwzględnianego przez JERCHOWA (naprężenie zastępcze w punkcie $\theta = \pi/2$ może być w zakresie sprężystym nawet o 73% większe, niż w punkcie $\theta = -\pi/2$).

Literatura cytowana w tekście

1. М. И. Ерхов, *Несущая способность надземного тонкостенного трубопровода*; Строит. мех. и расчет сооруж., 1960/6, 19–23.
2. M. MROWIEC, *Analiza nośności sprężystej rurociągu cienkościennego*; Czas. Techn. Polit. Krak., 8 (44), 66 (1961), 17–21.
3. M. MROWIEC, *Stan graniczny rurociągu cienkościennego w przypadku ciśnienia wewnętrznego i zginania*, Rozpr. Inżyn., 3, 14 (1966), 513–527.
4. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИИЛ Москва 1949.
5. M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sił krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozpr. Inżyn., 3, 4 (1956), 367–412.
6. M. ŻYCZKOWSKI, *O tak zwanej aproksymacji jednostronnie optymalnej i niektórych jej zastosowaniach w mechanice*, Rozpr. Inżyn., 3, 11 (1963), 463–490.
7. M. ŻYCZKOWSKI, *Operations on generalized power series*, Z. ang. Math. Mechanik, 4, 45 (1965), 235–244.
8. M. ŻYCZKOWSKI, *Combined loading in the theory of plasticity*, Int. J. of Non-Linear Mechanics, 2, 2 (1967), 173–205.

Резюме

КРИВЫЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО ТРУБОПРОВОДА ПОДВЕРЖЕННОГО ДЕЙСТВИЮ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ИЗГИБА

В работе рассматривается несущая способность трубопровода, подверженного одновременно внутреннему давлению p и изгибающему моменту M_θ ; учитывается также возможность существования продольной силы, вводя соответствующий коэффициент ψ (2.5).

Один из авторов привел в работе [3] некоторое, статически допускаемое, поле напряжений, определенное рис. 2 и формулами (2.1) и (2.6) и предварительный вид уравнения кривой несущей способности $m = m(q, \psi)$ — формула (2.8). Она включает неопределенный параметр φ_0 , определяющий разрывность осевых напряжений σ_z . В настоящей работе определяется сперва предельная кривая с помощью степенных рядов: принимая $\varphi_0 = 0$ получается разложение определяющее влияние внутреннего давления на несущую способность трубопровода под влиянием изгиба (3.2), а принимая $\varphi_0 = -\pi/2$ — разложение, определяющее влияние изгиба на несущую способность трубопровода под влиянием давления и продольной силы (3.7) и (3.8).

В дальнейшем, применяется аппроксимация типа Гермита, учитывающую условия согласованности на краях интервала. Уравнение кривой несущей способности аппроксимируется полиномами третьей и четвертой степени (4.1). В случае $\psi = 1/2$ (труба закрытая днищами) кривая несущей способности аппроксимируется эллипсом (5.1). Примеры кривых несущей способности при разных диапазонах величины ψ даются на рис. 3. Как это видно, продольная растягивающая сила в области до $\psi = 1/2$, отчетливо повышает способность трубопровода.

Summary

LIMIT LOAD CURVES OF A THIN-WALLED PIPELINE UNDER INTERNAL PRESSURE AND BENDING

Limit was of a thin-walled pipeline under internal pressure p and bending moment M_g , is analysed; possible presence of a longitudinal force is taken into consideration by introducing an appropriate coefficient ψ (2.5).

In Ref. [3] one of the present authors determined a certain statically admissible stress field described by Fig. 2 and Eqs. (2.1) and (2.6). He gave also a preliminary form of the equation of the limit load curve $m = m(q, \psi)$, Eq. (2.8). It involves an unknown parameter φ_0 describing the discontinuity of the axial stress σ_z . In the present paper the limit curve is determined first by means of power series. Assuming $\varphi_0 = 0$ a power expansion is obtained determining the influence of the internal pressure on the load-carrying capacity of the pipe under bending (3.2). Assuming $\varphi_0 = -\pi/2$ an expansion is obtained determining the influence of bending on the load-carrying capacity of the pipe line under the action of a pressure and a longitudinal force (3.7) and (3.8).

Next, Hermitian approximation is used taking into consideration the compatibility conditions at the edges of the interval. The equation of the limit load curve is approximated by polynomials of the third and fourth degree, (4.1). In the case of $\psi = 1/2$ (a pipe having bottoms at both ends) the limit curve is approximated by means of an ellipse (5.1). Examples of limit load curves are given in Fig. 3 for various values of ψ . It is seen that a tension force up to $\psi = 1/2$, improves considerably, the load-carrying capacity of the pipe.

KATEDRA APARATURY PRZEMYSŁOWEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ,

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ,

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 stycznia 1967 r.