

KRYTERIA ZNISZCZENIA CIĄGLIWEGO SPOWODOWANEGO SZCZELINĄ OSIOWO- SYMETRYCZNĄ OBCIĄŻONĄ CIŚNIENIEM HYDROSTATYCZNYM

MIŁOSZ WNUK

1. Wstęp

Prawom zniszczenia kruchego poświęcono wiele prac poczynając od fundamentalnej pracy GRIFFITHA [10]. Interesujący przegląd tych prac, ilustrujący rozwój teorii zniszczenia ciał idealnie kruchych (tzn. sprężystych aż do momentu pokonania sił spójności), można znaleźć w monografii SNEDDONA [29]. W przeciwieństwie do tej dobrze dziś rozwiniętej teorii niewiele można znaleźć prac traktujących o zniszczeniu ciał sprężysto-plastycznych. W ostatnich kilku latach w centrum uwagi znalazły się problemy zniszczenia ciał stałych «rzeczywistych», tzn. wykazujących zlokalizowane obszary płynięcia plastycznego, obecne nawet przy niewielkich obciążeniach poprzedzających zniszczenie.

Spośród znanych rozwiązań dla zagadnień sprężysto-plastycznych (szczelina w płaskim stanie odkształcenia lub naprężenia) znaczna część została otrzymana na drodze numerycznej: ALLEN i SOUTHWELL [1], JACOBS [16], STIMPSON i EATON [32]; jedna tylko praca podaje ściśle rozwiązanie dla szczeliny w anty-płaskim stanie odkształcenia (czyste ścinanie), mianowicie HULTA i McCLINTOCKA [14]. Znane są także intuicyjne modyfikacje teorii Griffitha (IRWIN [15] i OROWAN [23 i 24]), rozszerzające jej zakres na materiały ciągliwe. Spośród wielkiej liczby prac doświadczalnych wymienimy tu tylko kilka, wiążących się ściślej z przedmiotem niniejszej pracy: HEAD [13] oraz FROST i DUGDALE [9], których rezultaty umożliwiły później Dugdale'owi [7] sformułować swoją hipotezę. Prace o podobnym charakterze były także wykonane w Związku Radzieckim: RUSINKO [26], JAREMA [38] oraz KORNIŁOW i JAREMA [17]. Doświadczenia GERBERICHA [11] oraz SWEDŁOWA i GERBERICHA [33], wykonane w Kalifornijskim Instytucie Technologicznym, uwiadcniają wpływ wzmocnienia materiału na kształt strefy plastycznej powstającej u brzegów szczeliny: im bardziej ciągliwy materiał (o mniejszym wzmocnieniu), tym wyraźniej strefa plastyczna jest zlokalizowana w płaszczyźnie szczeliny. Materiały, dla których nie obserwuje się żadnego «rozmycia» strefy plastycznej nazywane są często «quasi-kruchymi», co w świetle badań Gerbericha i Swedłowa wydaje się terminem nieco mylącym (właśnie wysoka «ciągliwość» a nie kruchość materiału decyduje o zlokalizowanym kształcie stref plastycznych). Praca zużyta na rozwinięcie deformacji plastycznych jest wielokrotnie większa od pracy przeciw siłom ko-

hezji (dla stali nisko-węglowych obie wielkości różnią się tysiącrotnie), dlatego też usprawiedliwione jest pomijanie pracy przeciw siłom kohezji wobec plastycznej dysypacji energii. Wartość energii dysypowanej została wyznaczona doświadczalnie: FELBECK i OROWAN [23 i 24] oraz analitycznie: GOODIER i FIELD [12] dla problemu płaskiego i OLESIAK i WNUK [22] dla zagadnienia osiowo-symetrycznego.

Opis zjawisk plastycznych, towarzyszących rozwojowi szczeliny, nie jest możliwy w ramach teorii sprężystości, o ile nie zostanie ona uzupełniona dodatkowymi założeniami o naturze sił działających u brzegów szczeliny lub też o ile nie wprowadzimy do teorii pewnych modeli, jak np. modelu Dugdale'a [7] lub modeli używanych w teorii dyslokacji: VITVITSKI i LEONOW [37], BILBY, COTTRELL i SWINDEN [5], BILBY, COTTRELL, SMITH i SWINDEN [6], SWINDEN [34] oraz SMITH [30 i 31]. Można wykazać, że obydwa modele są sobie równoważne i obydwa pozwalają na rozwiązywanie zagadnień sprężysto-plastycznych w ramach teorii sprężystości, przez odpowiednią modyfikację warunków brzegowych [12, 21 i 22] lub też przy założeniu pewnej nieciągłości w przemieszczeniach (teoria dyslokacji). Istnieje także analogia między teoriami traktującymi o zlokalizowanej strefie plastycznej wokół brzegów szczeliny a interpretacją «kohezyjną», rozwiniętą przez szkołę rosyjską: ŻELTOV i KRISTIANOWICZ [27], LEONOW [18] oraz BARENBLATT [2]. Te teorie jednak dotyczą w zasadzie zniszczenia kruchego i stanowią oryginalne uzupełnienie teorii Griffitha.

Niniejsza praca traktuje o zniszczeniu spowodowanym szczeliną osiowo-symetryczną obciążoną ciśnieniem hydrostatycznym, podczas gdy o materiale zakładamy, że jest idealnie sprężysto-plastyczny, wykazujący istnienie strefy plastycznej zlokalizowanej w płaszczyźnie szczeliny. W obszarze plastycznym żąda się, aby składowe tensora naprężeń σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} spełniały warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. Celem pracy jest wyprowadzenie równania opisującego bilans energetyczny przed i w chwili zniszczenia, a także obliczenie ciśnienia krytycznego w oparciu o energetyczne kryterium zniszczenia, a następnie porównanie wartości tego ciśnienia z tą, jaka wynika [22] z kryterium maksymalnego odkształcenia.

2. Rozważania energetyczne dla problemu sprężysto-plastycznego

Energia sprężysta ciała zawierającego szczelinę (rys. 1) i obciążonego stałym ciśnieniem p_0 na powierzchni S_0 oraz ciągnięciem Y na powierzchni S_1 może być wyznaczona ze wzoru Love'a

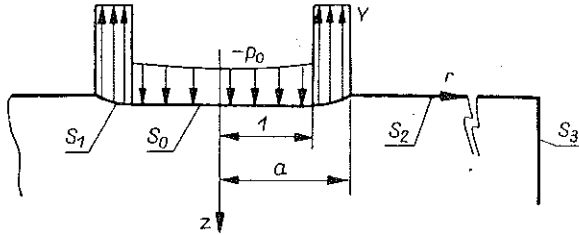
$$(2.1) \quad W_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} u_i dS_j,$$

który w naszym przypadku przybiera postać

$$(2.2) \quad W_e = 2 \left[p_0 \int_0^l - Y \int_l^a \right] \pi r w(r, l) dr.$$

Współczynnik 1/2 znika po uwzględnieniu symetrii. Jest oczywiste, że składniki

odpowiadające powierzchni S_2 oraz S_3 (tj. powierzchni symetrii szczeliny oraz zewnętrznej powierzchni ciała) są równe zero, ponieważ wzdłuż S_2 przemieszczenia są równe zero, natomiast wzdłuż S_3 zarówno przemieszczenia jak i naprężenia równają się zero.



Rys. 1. Model szczeliny (uwidoczniono dolną połowę przestrzeni sprężystej)

Praca plastyczna, zgodnie z naszym modelem szczeliny, jest pracą wykonaną przeciw stałym naprężeniom działającym wzdłuż granicy stref sprężystej oraz plastycznej podczas przemieszczania tej granicy przy nieziennej długości szczeliny i przy stopniowym wzroście obciążenia aż do wartości p_0 , mianowicie

$$(2.3) \quad W_p = \left[2Y \int_l^a \right] w(r, l) \cdot 2\pi r dr.$$

Czynnik 2 wynika z symetrii. Wielkość ta jest oczywiście funkcją długości szczeliny oraz przyłożonego ciśnienia. W ogólnym przypadku praca plastyczna W_p nie jest funkcją stanu lub, innymi słowy, jej wartość końcowa zależy od drogi w przestrzeni składowych stanu naprężenia oraz długości szczeliny.

Rozważmy przyrost pracy plastycznej δW_p związany ze wzrostem długości szczeliny od wartości l do $l + \delta l$. Nowe wiązania zostają zerwane i naprężenia wokół brzegów szczeliny ulegają redystrybucji, tak że naprężenie na odcinku $(l, l + \delta l)$ zostaje zredukowane do zera, podczas gdy maksymalna wartość naprężenia Y zostaje osiągnięta w innym miejscu. Możemy zatem powiedzieć, że długość strefy plastycznej wzrasta od wartości a do $a + \delta a$. Towarzyszy temu zmiana przemieszczeń, natomiast praca wykonana wzdłuż łuku (1) $(l + \delta l, a)$ jest pracą niezbędną dla stworzenia nowej powierzchni swobodnej. Ta praca jest tutaj utożsamiana z przyrostem δW_p , ponieważ pomijamy tutaj pracę przeciw siłom kohezji wobec plastycznej dysypacji energii. Mamy zatem

$$(2.4) \quad \delta W_p = 2Y \int_{l+\delta l}^a [w(r, l + \delta l) - w(r, l)] \cdot 2\pi r dr$$

(1) Dodatki dotyczące odcinków $(l, l + \delta l)$ oraz $(a, a + \delta a)$, na których odpowiednio naprężenia znikają do zera i wzrastają do wartości maksymalnej, są małymi rzędu drugiego względem δl i mogą być pominięte.

lub, jeśli uwzględnimy, że przyczynki od łuku $(l, l + \delta l)$ są małymi drugiego rzędu, tzn. są proporcjonalne do $(\delta l)^2$, ostatnie równanie możemy przepisać w postaci

$$(2.5) \quad \frac{\delta W_p}{\delta l} = 2Y \int_l^a \frac{\partial w(r, l)}{\partial l} \cdot 2\pi r dr.$$

Dla porównania wzorów (2.5) oraz (2.3) policzymy pochodną względem długości szczeliny jako funkcji $W_p(l)$:

$$(2.6) \quad \frac{\partial W_p}{\partial l} = 2Y \left[\int_l^a \frac{\partial w(r, l)}{\partial l} \cdot 2\pi r dr - w(a, l) \cdot 2\pi a \frac{da}{dl} + w(l, l) \cdot 2\pi l \right].$$

Przemieszczenie w wierzchołku szczeliny jest równe zero; z obydwu równań (2.6) oraz (2.5) otrzymamy zatem zależność

$$(2.7) \quad \delta W_p = \frac{\partial W_p}{\partial l} \delta l + 4\pi Y l w(l, l) \delta l,$$

skąd widać, że przyrost δW_p nie jest różniczką zupełną i nie może być wyznaczony, o ile funkcja $W_p(l)$ jest znana. Przyrost ten jest określony bezpośrednio równaniem (2.5).

Pracę sił zewnętrznych otrzymujemy po prostu jako sumę energii sprężystej akumulowanej w ośrodku oraz pracy plastycznej rozproszonej na nieodwracalne deformacje

$$(2.8) \quad W = W_e + W_p.$$

Zakładamy, że istnieje energia potencjalna, do której włączamy zarówno energię sprężystą jak i plastyczną, tj. pomijamy zależność funkcji $W_p(l)$ od drogi w przestrzeni składowych stanu naprężenia i długości szczeliny. Wówczas całkowita energia potencjalna odkształcenia jest równa pracy sił zewnętrznych ze znakiem przeciwnym:

$$(2.9) \quad -V = W_e + W_p;$$

jej przyrost towarzyszący wirtualnemu wzrostowi szczeliny

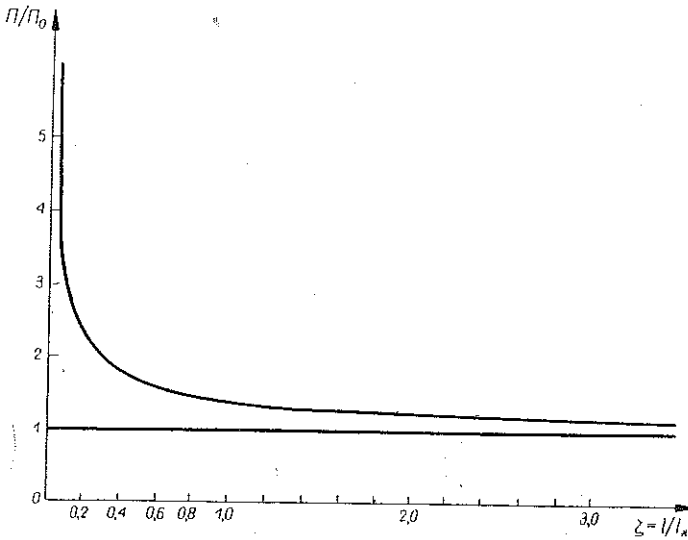
$$(2.10) \quad -\delta V = \delta(W_e + W_p).$$

To ostatnie równanie jest ogólnie prawdziwe, jak to pokazał SWINDEN [34], bez względu na to, czy praca plastyczna jest funkcją stanu, czy też nie. Obydwa równania (2.9) oraz (2.8) będą wykorzystane w następnym punkcie i jakkolwiek pierwsze z nich słuszne tylko w przybliżeniu rzutuje na przybliżony charakter równania opisującego krzywą energii potencjalnej, to punkt krytyczny określony przez maksimum na tej krzywej jest wyznaczony ściśle.

Na koniec wprowadzimy za GOODIEREM i FIELDDEM [12] wielkość nazywaną «plastyczną dysypacją energii» i zdefiniowaną jako stosunek przyrostu pracy plastycznej δW_p , towarzyszącego infitezymalnemu wzrostowi szczeliny, do pola nowo powstałej powierzchni:

$$(2.11) \quad \frac{\delta W_p}{\delta A} = \frac{Y}{l} \int_l^a \frac{\partial w(r, l)}{\partial l} r dr.$$

Równanie to wynika z (2.5), jeśli za δA podstawimy podwojone pole powierzchni pierścienia o szerokości δl . Dysypacja energii dla szczeliny osiowo-symetrycznej była policzona w pracy OLESIAKA i WNUKA [21] i dla stali nisko-węglowej, zawierającej szczelinę o długości 1 cm, wielkość dysypacji była rzędu 10^6 erg/cm², co jest około 1000 razy większe od pracy przeciw siłom kohezji (napięcia powierzchniowego). Zgodnie z naszym obecnym modelem szczeliny, proponowanym dla wyjaśnienia mechanizmu zniszczenia ciągliwego, plastyczna dysypacja energii przy krytycznej wartości obciążenia gra rolę napięcia powierzchniowego. Niektóre własności tej wielkości omówimy w następnym punkcie.



Rys. 2. Krytyczna dysypacja energii jako funkcja długości szczeliny ($\Pi_0 = Y\delta/2$)

Podane wyżej równania zastosujemy obecnie do przypadku szczeliny osiowo-symetrycznej, obciążonej stałym ciśnieniem działającym wzdłuż powierzchni szczeliny. Odpowiedni problem brzegowy dla sprężystej pół-przestrzeni z warunkami brzegowymi zmodyfikowanymi tak, aby problem sprężysto-plastyczny mógł być zredukowany do zagadnienia sprężystego, został rozwiązany w pracy [21]. Tam też obliczono naprężenia w płaszczyźnie symetrii szczeliny ($z = 0$) oraz przemieszczenie normalne do płaszczyzny szczeliny. Ponadto będziemy tu korzystać ze wzorów [21] wiążących zasięg strefy plastycznej z przyłożonym obciążeniem:

$$(2.12) \quad m = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{1+\lambda}$$

lub po odwróceniu

$$(2.13) \quad \lambda = \frac{1 - m^2 + \sqrt{1 - m^2}}{m^2},$$

gdzie λ jest bezwymiarowym obciążeniem, zdefiniowanym jako stosunek ciśnienia p_0 do granicy plastyczności Y , $\lambda = p_0/Y$; natomiast m^{-1} jest bezwymiarową długością strefy plastycznej, $m = l/a$ (l oznacza długość szczeliny oraz a długość strefy plastycznej). Granica plastyczności Y , nazywana też niekiedy «efektywną granicą plastyczności», nie jest po prostu stałą materiałową, lecz zależy od wielkości przyłożonego ciśnienia jak również od schematu obciążenia, ponieważ ośrodek sprężysty otaczający strefę plastyczną reprezentuje więzy («constraint»), które mają wpływ na wartość ciśnienia płynięcia (granicy plastyczności). Wielkość Y może być wyznaczona z bezpośrednich pomiarów lub też, o ile skorzystamy z warunku plastyczności, na przykład wg Hubera-Misesa-Hencky'ego, jak to zrobiono w pracy [21], dostajemy następującą prostą zależność dla przedziału $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$Y = Y_0 [(1 - 2\nu)^{-1} - 0,571p_0/Y_0],$$

gdzie Y_0 jest granicą plastyczności przy jedno-osiowym rozciąganiu. Na przykład gdy $\nu = 0,3$, zakres stosowalności tego równania określony przedziałem $0 \leq \lambda \leq 1$ wynosi $0 \leq p_0 \leq 1,59Y_0$. Wówczas $Y = 2,5Y_0$ dla małych ciśnień p_0 oraz $Y = 1,59Y_0$ dla $p_0 = 1,59Y_0$.

Jeśli skorzystamy z równań (2.12) oraz (2.13), to wzory na przemieszczenie normalne do powierzchni szczeliny wyprowadzone w pracy [22] dla szczeliny osiowo-symetrycznej obciążonej stałym ciśnieniem p_0 mogą być przedstawione w nieco prostszej postaci:

$$(2.14) \quad w(r, l) = \frac{4(1 - \nu^2)lY}{\pi Em} \begin{cases} \left[\lambda \sqrt{1 - \varrho^2} - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \varrho^2}} + \sqrt{1 + 2\lambda} E\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right) \right], & 0 \leq \varrho \leq m, \\ \left\{ \frac{-\lambda m^2}{1 - m^2} \sqrt{1 - \varrho^2} + (1 + \lambda) \left[\frac{m^2 - \varrho^2}{\varrho} F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varrho E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) \right] \right\}, & m \leq \varrho \leq 1, \end{cases}$$

gdzie ϱ jest bezwymiarową współrzędną $\varrho = r/a$ oraz

$$(2.15) \quad \mu_1 = \arcsin \left(\frac{1 - m^2}{1 - \varrho^2} \right)^{1/2}, \quad \mu_2 = \arcsin \left(\frac{1 - \varrho^2}{1 - m^2} \right)^{1/2}.$$

Dla wyznaczenia energii niezbędne jest obliczenie następujących wielkości:

$$(2.16) \quad \int_0^l w(r, l) r dr, \quad \int_l^0 w(r, l) r dr,$$

gdzie $w(r, l)$ dane jest równaniem (2.14). Dostajemy zatem następujące całki do obliczenia:

$$(2.17) \quad I = \int_0^m \sqrt{1 - \varrho^2} \varrho d\varrho - \int_0^m \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}},$$

$$\begin{aligned}
 \text{II} &= \int_0^m E\left(\mu_1, \frac{\varrho}{m}\right) \varrho d\varrho = \int_0^m \varrho d\varrho \int_0^{\arcsin\left(\frac{1-m^2}{1-\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \left(\frac{\varrho}{m}\right)^2 \sin^2 \psi\right]^{1/2} d\psi, \\
 \text{III} &= \int_m^1 F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) \varrho^2 d\varrho = \int_m^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{\arcsin\left(\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \sin^2 \psi\right]^{-1/2} d\psi, \\
 \text{IV} &= \int_m^1 F\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) d\varrho = \int_m^1 d\varrho \int_0^{\arcsin\left(\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \sin^2 \psi\right]^{-1/2} d\psi, \\
 \text{V} &= \int_m^1 E\left(\mu_2, \frac{m}{\varrho}\right) \varrho^2 d\varrho = \int_m^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{\arcsin\left(\frac{1-\varrho^2}{1-m^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \sin^2 \psi\right]^{1/2} d\psi.
 \end{aligned}$$

(2.17)
[c.d]

Całki oznaczone I są elementarne, podczas gdy pozostałe mogą być sprowadzone do elementarnych przez odpowiedni dobór podstawienia, mianowicie

$$(2.18) \quad m^2 - \varrho^2 \sin^2 \psi = x^2$$

dla drugiej całki oraz

$$(2.19) \quad \varrho^2 - mI \sin^2 \psi = x^2$$

dla pozostałych. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_0^l w(r, l) r dr &= \frac{4(1-\nu^2)l^3 Y}{\pi E m^3} (\lambda I + \sqrt{1+2\lambda II}), \\
 \int_i^a w(r, l) r dr &= \frac{4(1-\nu^2)l^3 Y}{\pi E m^3} \left[\frac{-\lambda m^2}{1-m^2} \int_m^1 \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} + (1+\lambda)(m^2 IV + \right. \\
 &\quad \left. - III + V) \right],
 \end{aligned}$$

(2.20)

gdzie

$$\begin{aligned}
 \text{I} &= \frac{1}{3} [3(1-m^2)^{1/2} - (1-m^2)^{3/2} - 2], \\
 \text{II} &= \frac{1}{3m} [3(1-m^2)^{1/2} - (1-m^2)^{3/2} - 2 + 2m^3], \\
 \text{III} &= \frac{2}{9} (1-m^3) + \frac{m^2}{3} (1-m), \\
 \text{IV} &= 1-m, \quad \text{V} = \frac{2}{9} (1-m^3).
 \end{aligned}$$

(2.21)

Trzy ostatnie wyniki zostały zaczerpnięte z pracy [22]. We wzorach końcowych chcielibyśmy wyeliminować długość strefy plastycznej m , wyrażając ją przez

przyłożone obciążenie λ według (2.12). Rugując m oraz korzystając z równań (2.12) i (2.20), otrzymujemy

$$(2.22) \quad 2\pi p_0 \int_0^l w(r, l) r dr = \frac{8(1-\nu^2)l^3 Y^2}{3E} \lambda \frac{-2 - 3\lambda + 2(1+\lambda)\sqrt{1+2\lambda}}{\sqrt{1+2\lambda}},$$

$$2\pi Y \int_l^a w(r, l) r dr = \frac{8(1-\nu^2)l^3 Y^2}{3E} \frac{(1+\lambda - \sqrt{1+2\lambda})^2}{\sqrt{1+2\lambda}}.$$

Dodając ostatnie równania do (2.2), (2.3), (2.8) oraz (2.9) i (2.5) otrzymujemy energię sprężystą W_e , zgromadzoną w ośrodku otaczającym szczelinę oraz energię straconą na deformację plastyczną W_p , a także całkowitą energię potencjalną odkształcenia V i wreszcie z [22] znajdziemy energię dysypowaną na jednostkę nowo powstałej powierzchni (względnie dysypację energii odniesioną do przyrostu długości szczeliny), mianowicie

$$(2.23) \quad W_e = \frac{8(1-\nu^2)l^3 Y^2}{3E} \cdot 2[(1+\lambda)^2 - (1+3\lambda+\lambda^2)(1+2\lambda)^{-1/2}],$$

$$W_p = \frac{8(1-\nu^2)l^3 Y^2}{3E} \cdot 2(1+\lambda - \sqrt{1+2\lambda})^2 (1+2\lambda)^{-1/2},$$

$$-V = \frac{8(1-\nu^2)l^3 Y^2}{3E} \cdot 2[1+\lambda - \lambda^2 - (1-\lambda^2)\sqrt{1+2\lambda}](1+2\lambda)^{-1/2},$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta l} = \frac{8(1-\nu^2)l^2 Y^2}{E} \cdot 2(1+\lambda)(1+\lambda - \sqrt{1+2\lambda})(1+2\lambda)^{-1/2}.$$

Równania te, odnoszące się do przypadku sprężysto-plastycznego, mogą być porównane z odpowiednimi wzorami znanymi w teorii sprężystości (por. p. 4). Czynniki $8(1-\nu^2)l^3 Y^2/3E$ ma pewną interpretację fizyczną: jest to mianowicie energia potencjalna odkształconego ciała, idealnie sprężystego, wynikająca z istnienia osiowo-symetrycznej szczeliny o promieniu l i obciążonej ciśnieniem hydrostatycznym o wielkości Y .

3. Równowaga energetyczna przy zniszczeniu oraz porównanie z kryterium maksymalnego odkształcenia

Aby napisać energetyczne kryterium zniszczenia, które jest warunkiem koniecznym dla zapoczątkowania propagacji szczeliny [20 i 25] badamy całkowitą energię potencjalną układu. Energia ta jest sumą energii odkształcenia V oraz energii powierzchni Ω :

$$(3.1) \quad \varepsilon = V + \Omega.$$

Oczywiście ε zależy od przyłożonego obciążenia oraz długości szczeliny i zakłada się tutaj, że jest ona funkcją stanu, co, jak wskazaliśmy poprzednio, jest słuszne w sensie przybliżonym ze względu na charakter pracy plastycznej, która może nie być funkcją stanu. Tym niemniej najciekawsze jest położenie maksimum na krzywej

$\varepsilon = \varepsilon(l)$, ponieważ stąd otrzymujemy warunek zniszczenia (równowaga nietrwała). Aby obliczyć ciśnienie krytyczne, powodujące propagację szczeliny, wystarczy przyrównać pochodną $\partial(V + \Omega)/\partial l$ do zera, lub innymi słowy, wystarczy korzystać ze wzoru na przyrost $-\delta V = \delta(W_e + W_p)$, który jest ogólnie prawdziwy bez względu na charakter funkcji W_p . Analogiczne stwierdzenie jest słuszne w stosunku do energii powierzchniowej oraz jej przyrostu.

W teorii zniszczenia kruchej energia powierzchniowa jest po prostu iloczynem $2\pi l^2 \gamma$, gdzie γ oznacza napięcie powierzchniowe. Oczywiście, γ nie zależy od długości szczeliny. Przypuśćmy na chwilę, że zależy. Wówczas energię powierzchniową szczeliny o długości l obliczalibyśmy ze wzoru

$$(3.2) \quad 2 \int_0^l \gamma 2\pi x dx,$$

gdzie x jest parametrem całkowania i posiada tutaj sens «chwilowej» długości szczeliny, wzrastającej od zera do wartości końcowej l . Jeśli zgodnie z obecnym modelem zastąpimy napięcie powierzchniowe przez plastyczną dysypację energii $\delta W_p/\delta A$, która jest funkcją zarówno przyłożonego obciążenia jak i długości szczeliny, to całkowita energia powierzchni szczeliny wyniesie

$$(3.3) \quad \Omega = 2 \int_0^l \frac{\delta W_p}{\delta A} \cdot 2\pi x dx = \int_0^l \frac{\delta W_p}{\delta x}(x) dx$$

lub też jeśli podstawimy

$$(3.4) \quad \frac{\delta W_p}{\delta l} = \left[\frac{\delta W_p}{\delta l} \right]_{\text{I}} + \left[\frac{\delta W_p}{\delta l} \right]_{\text{II}},$$

gdzie według (2.7)

$$(3.5) \quad \left[\frac{\delta W_p}{\delta l} \right]_{\text{I}} = \frac{\partial W_p}{\partial l}, \quad \left[\frac{\delta W_p}{\delta l} \right]_{\text{II}} = 4\pi l Y_w(l, l)$$

równanie (3.3) może być przepisane w postaci

$$(3.6) \quad \Omega = \int_0^l \left[\frac{\delta W_p}{\delta x}(x) \right]_{\text{II}} dx + W_p(l).$$

Warto zauważyć, że pierwszy wyraz w tym równaniu znajduje interpretację jako energia swobodnej powierzchni S_0 (rys. 1), natomiast drugi wyraz (2) jest odniesiony

(2) Można łatwo sprawdzić, że stosunek Ω_{Ω}/S_l jest mniejszy niż Ω_{S_0}/S_0 . Rezultat ten jest zgodny z przewidywaniami REBINDERA i FRENKLA [8] dotyczącymi energii właściwej (tj. energii odniesionej do jednostki powierzchni) dla powierzchni swobodnej oraz dla powierzchni «związanej», gdzie istnieją więzy osłabione na skutek działania czynnika mechanicznego lub chemicznego. Aby bezpośrednio porównanie między obecną teorią a rozważaniami Rebindera i Frenkla było możliwe, należałoby interpretować stałe naprężenie działające wokół brzegów szczeliny, tj. na odcinku (l, a) jako siły kohezji raczej, aniżeli ciśnienie płynięcia, jak to ma miejsce w niniejszej pracy. Taka metoda była zaproponowana w pracach BARENBLATTA [2].

do powierzchni S_1 , tj. do tej części powierzchni (rozciągającej się wokół brzegów szczeliny), na której wiązania są wprawdzie osłabione na skutek nieodwracalnych poślizgów, lecz powierzchnia ta pozostaje «związana». Oznaczmy obydwa wyrazy odpowiednio Ω_{S_0} oraz Ω_{S_1} , wówczas (3.6) może być przedstawione po prostu jako $\Omega = \Omega_{S_0} + \Omega_{S_1}$, gdzie

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Omega_{S_0} &= 4\pi Y \int_0^l x w(x, x) dx, \\ \Omega_{S_1} &= 4\pi Y \int_l^a w(r, l) r dr. \end{aligned}$$

Mamy zatem całkowitą energię potencjalną układu w postaci

$$(3.8) \quad \varepsilon = V + \int_0^l \frac{\delta W_p}{\delta x}(x) dx$$

lub też, jeśli V zastąpimy przez sumę energii sprężystej oraz pracy plastycznej (z przeciwnym znakiem),

$$(3.9) \quad \varepsilon = -W_e + \int_0^l \left[\frac{\delta W_p}{\delta x}(x) \right]_{\text{II}} dx.$$

Początek propagacji szczeliny jest wyznaczony przez

$$(3.10) \quad \frac{\partial \varepsilon(l, \lambda)}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon(l, \lambda)}{\partial l^2} < 0,$$

czyli

$$(3.11) \quad \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{\delta W_p}{\delta l} = 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{\partial W_e}{\partial l} + \left[\frac{\delta W_p}{\delta l} \right]_{\text{II}} = 0.$$

Równania te są równoważne i mogą być uważane za uogólnienie warunku Griffitha na przypadek sprężysto-plastyczny. Jak wykazujemy w następnym rozdziale, w przypadku granicznym szczeliny «nierelaksującej», tj. szczeliny w idealnie kruchym ciecie, wielkość V przekształca się w energię sprężystą, natomiast $\delta W_p/\delta l$ może być wówczas zapisane jako $\partial(2\pi l^2 \gamma)/\partial l$. Oznacza to, że równanie (3.11) redukuje się wtedy do równania Griffitha. Obydwie relacje (3.11), które wynikły z warunku $\partial \varepsilon/\partial l = 0$ mogą być zastąpione przez słabe nierówności, ponieważ zniszczenie wystąpi przy wszystkich tych długościach szczeliny, dla których nachylenie krzywej energii potencjalnej jest ujemne lub równe zero. Mamy zatem

$$(3.12) \quad \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{\delta W_p}{\delta l} \leq 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{\partial W_e}{\partial l} - \left[\frac{\delta W_p}{\delta l} \right]_{\text{II}} \geq 0,$$

co zgadza się z kryterium energetycznym, zaproponowanym przez SWINDENA [34] dla przypadku czystego ścinania oraz szczeliny reprezentowanej przez model dyslokacyjny.

Jeśli jednakże spróbujemy skorzystać z powyższych równań i wyznaczyć z nich ciśnienie krytyczne, początkujące propagację szczeliny, to okaże się, że żadne z równań (lub nierówności) nie daje spodziewanego rozwiązania. Podstawmy za $V W_e$ oraz $\delta W_p/\delta l$ odpowiednie wyrażenia wg (2.23) do warunku zniszczenia (3.12). Z pierwszej i drugiej nierówności otrzymujemy odpowiednio

$$(3.13) \quad \frac{1 + \lambda - \lambda^2}{\sqrt{1+2\lambda}} - (1 - \lambda^2) - \frac{(1+\lambda)(1+\lambda - \sqrt{1+2\lambda})}{\sqrt{1+2\lambda}} \geq 0,$$

$$(1+\lambda)^2 - \frac{1+3\lambda+2\lambda^2}{\sqrt{1+2\lambda}} - (1+\lambda) + \sqrt{1+2\lambda} \geq 0.$$

Obydwie te nierówności są oczywiście równoważne i redukują się do nierówności

$$(3.14) \quad \lambda(1 - \sqrt{1+2\lambda}) + \lambda^2 \geq 0,$$

co jest spełnione dla wszystkich wartości bezwymiarowego obciążenia ($\lambda \geq 0$). Innymi słowy, nie dostaliśmy żadnego rozwiązania na ciśnienie krytyczne. Ten wynik nie jest tak bardzo nieoczekiwany, jeśli przypomnimy, że kryterium (3.12) dostarcza jedynie warunku koniecznego dla zapoczątkowania propagacji i wyprowadzone wyżej nierówności pozwalają stwierdzić, że zniszczenie jest możliwe, jeśli zważyć tylko na równowagę energetyczną przy każdej wartości przyłożonego obciążenia. Ten sam «brak rezultatu» otrzymał SWINDEN [34]. Co więcej, w dotychczasowych rozważaniach usiłowaliśmy powiązać ze sobą przyrosty energii dostarczonej oraz energii dysypowanej na nieodwracalne deformacje, lecz nic nie powiedzieliśmy o granicach procesu deformacji plastycznej, który poprzedza zniszczenie. Widocznie stopień zaawansowania deformacji plastycznych nie może być dowolny, lecz jego maksymalna wartość jest określona warunkiem odkształceniowym (por. [22]). Warunek ten jest warunkiem dostatecznym na zniszczenie. Niniejsze rozważania uzupełnimy zatem dodatkową informacją o granicach plastycznej dysypacji energii. Postulujemy mianowicie istnienie krytycznej dysypacji energii II . Absorpcja tej ilości energii oznacza koniec procesu deformacji plastycznej oraz początek zniszczenia. Wykorzystamy tutaj dane [22] w nieco zmienionej postaci:

$$(3.15) \quad \left(\frac{\delta W_p}{\delta A} \right)_{\text{kryt}} = II(\zeta) = II_0 [1 + (\zeta + \sqrt{2\zeta})^{-1}],$$

gdzie $II_0 = Y\delta/2$ jest krytyczną dysypacją energii na jednostkę powierzchni, jeżeli zniszczenie jest zapoczątkowane przez szczeliny dostatecznie długie (tzn. o długościach znacznie większych od stałej materiałowej l_*), ζ jest bezwymiarową długością szczeliny $\zeta = l/l_*$; natomiast stałe strukturalne δ oraz l_* są ze sobą powiązane w następujący sposób:

$$(3.16) \quad l_* = \frac{\pi E \delta}{8(1 - \nu^2) Y}.$$

Obydwie te stałe posiadają fizyczną interpretację: δ równa się podwojonemu

przemieszczeniu krytycznemu ⁽³⁾ u wierzchołka szczeliny (lub też jest to krytyczna odległość między granicami strefy plastycznej, mierzona na końcu szczeliny); l_* jest tą długością szczeliny, jak pokazano w [22], przy której zniszczenie może nastąpić jedynie na skutek daleko sięgającego uplastycznienia, o ile obciążenie przyłożone jest w nieskończoności. To samo zjawisko wystąpi dla wszystkich szczelin o długości mniejszej niż l_* .

Widać też, że krytyczna dysypacja energii $\Pi(\zeta)$ nie zależy od własności materiałowej, jak to było w przypadku napięcia powierzchniowego i ciał kruchych, lecz zależy ona także od długości szczeliny z wyjątkiem szczeliny, dla których $l \gg l_*$. Wówczas wyraz $(\zeta + \sqrt{2\zeta})^{-1}$ w równaniu (3.15) może być pominięty, ponieważ $\zeta = l/l_*$ jest liczbą dużą. W ten sposób sugestia OROWANA, że przy długich szczelinach wpływ plastyczności nie powinien zależeć od długości szczeliny, jest tutaj potwierdzona. Oczywiście uważamy wielkość $\Pi(\zeta)$ za miarę wpływu plastyczności materiału na propagację szczeliny. Ta własność $\Pi(\zeta)$, tj. niezależność od długości szczeliny dla szczelin dostatecznie długich, wydaje się argumentem przeciw obiekcji BARENBLATTA [3], że energia dysypowana $\delta W_p/\delta A$, obliczona w pracach [12 i 22], jest wprost proporcjonalna do długości szczeliny: widać łatwo, że l występujące w liczniku we wzorze na $\delta W_p/\delta A$ znika, gdy wyznaczymy krytyczną wartość tej energii $(\delta W_p/\delta A)_{\text{kryt}}$ przez podstawienie za λ odpowiedniej wartości krytycznej wg kryterium maksymalnego odkształcenia [22].

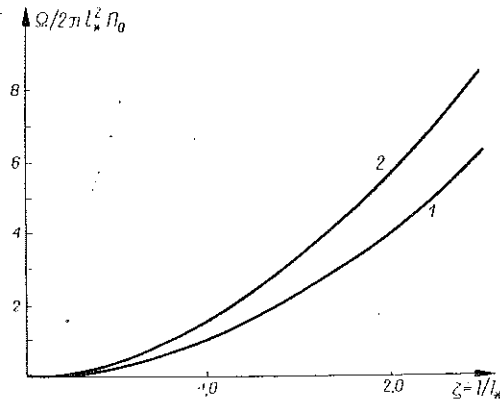
Aby znaleźć ciśnienie krytyczne z warunku energetycznego, obliczamy najpierw energię powierzchniową Ω , zastępując w równaniu (3.3) $\delta W_p/\delta A$ przez Π zgodnie z (3.15). Po scałkowaniu otrzymujemy

$$(3.17) \quad \Omega = 2\pi l_*^2 \Pi_0 \left[\zeta^2 + 2\zeta - 4\sqrt{2\zeta} + 8 \ln \left(\sqrt{\frac{\zeta}{2}} + 1 \right) \right],$$

skąd widać znowu, że dla długości szczelin $\zeta \gg 1$ energia powierzchniowa jest w przybliżeniu równa $2\pi l_*^2 \Pi_0$, jak oczekiwaliśmy. Dla krótkich szczelin wyrażenie w nawiasie prostokątnym można rozwinąć na szereg MacLaurina i wówczas

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \Omega_{\zeta \rightarrow 0} &= A l_*^{3/2}, \\ A &= 4\pi \sqrt{2} l_* \Pi_0 / 3 = \text{const.} \end{aligned}$$

Wykres zależności funkcyjnej energii powierzchniowej od długości szczeliny



Rys. 3. Energia powierzchniowa jako funkcja długości szczeliny:

1—modyfikacja Irwina-Orowana, 2—niniejsza praca

ny według (3.17) jest przedstawiony na rys. 3. Rysunek umożliwia także porównanie

(3) Niekiedy przyjmuje się zapis $\delta = 2\epsilon_L d$, jak np. u GOODIERA i FIELDA [12]. Tutaj ϵ_L oznacza graniczne odkształcenie, natomiast d (zwane «guage width») jest początkowym rozmiarem elementu umiejscowionego między obydwojma granicami stref.

niniejszej zależności z tą, jaka wynika z modyfikacji teorii GRIFFITHA zaproponowanej przez OROWANA i IRWINA: jedynie dla długich szczelin różnice w wartościach rzędnych na obu krzywych (odniesione do energii powierzchniowej wg Orowana-Irwina) znikają. Stąd oraz z rezultatów [22] wnioskujemy, że teoria Orowana-Irwina może być uważana za uproszczoną wersję, odnoszącą się do pewnego szczególnego przypadku niniejszej teorii.

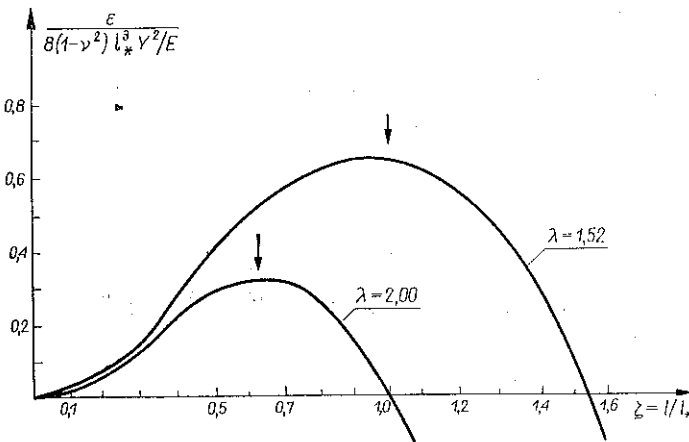
Jeśli dodamy energię potencjalną odkształcenia $V = -[8(1 - \nu^2) l_*^3 Y^2/E] G(\lambda) \zeta^3$ do Ω , to otrzymamy całkowitą energię potencjalną systemu. Jest ona funkcją obciążenia λ oraz długości szczeliny ζ , mianowicie

$$(3.19) \quad \varepsilon(\lambda, \zeta) = \frac{8(1 - \nu^2) l_*^3 Y^2}{E} \left[-\frac{G(\lambda)}{3} \zeta^3 + \zeta^2 + 2\zeta - 4\sqrt{2\zeta} + 8 \ln \sqrt{\frac{\zeta}{2} + 1} \right],$$

gdzie

$$(3.20) \quad G(\lambda) = 2 \frac{1 + \lambda - \lambda^2 - (1 - \lambda^2) \sqrt{1 + 2\lambda}}{\sqrt{1 + 2\lambda}}.$$

Wykres $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, \zeta)$ jest przedstawiony na rys. 4. Posiada on tylko jedno maksimum⁽⁴⁾



Rys. 4. Całkowita energia potencjalna układu
(strzałki wskazują punkt krytyczny)

odpowiadające punktowi niestacystyczności. Kryterium zniszczenia daje

$$(3.21) \quad -\frac{G(\lambda)}{2} \zeta^2 - \frac{G(\lambda)}{\sqrt{2}} \zeta^{3/2} + \zeta + \sqrt{2} \zeta^{1/2} + 1 = 0,$$

skąd wynika równanie na ciśnienie krytyczne

⁽⁴⁾ Jeśli ciśnienie byłoby przyłożone nie na całej powierzchni szczeliny, lecz tylko na stałej części tej powierzchni, to krzywa energii potencjalnej posiadałaby jedno maksimum i jedno minimum [36]. Pierwsze określa początek propagacji, która trwa aż do momentu, gdy długość szczeliny osiągnie wartość «równowagową», tzn. taką, przy której szczelina pozostaje w równowadze z przyłożonym obciążeniem: minimum na krzywej energii potencjalnej.

$$(3.22) \quad 2 \frac{1+\lambda - \lambda^2 - (1-\lambda^2) \sqrt{1+2\lambda}}{\sqrt{1+2\lambda}} = 2\Phi \left(1 + \frac{\Phi}{1 + \sqrt{2\Phi}} \right).$$

Wprowadziliśmy tutaj nową zmienną

$$(3.23) \quad \Phi = 1/\zeta = l_*/l$$

oraz podstawiliśmy wyrażenie (3.20) na miejsce $G(\lambda)$. Równanie (3.22) określa ciśnienie krytyczne; efektywne wyznaczenie tego ciśnienia jednakże nie jest łatwe.

Przeprowadzimy najpierw dyskusję dla dwóch przypadków szczególnych:

- 1) dla szczeliny w ośrodku idealnie kruchym («nierelaksująca» szczelina),
- 2) dla długiej szczeliny w ośrodku sprężysto-plastycznym.

W pierwszym przypadku uważamy (formalnie) Y za bardzo duże; w istocie będziemy przyjmować, że Y jest rzędu modułu Younga, a nie nieskończenie wielkie (jak to przyjął np. SWINDEN [34]). Tak więc rozważana szczelina ulega bardzo nieznacznej «relaksacji»; długość odcinka, na którym działają maksymalne naprężenia, jest rzędu $(p_0/Y)^2$, podobnie jak to ma miejsce w teorii Barenblatta [2]. Mamy zatem $Y \rightarrow E$ oraz $\lambda \rightarrow 0$ (stosunek p_0/E jest mały); sprawdzamy bez trudu, że wówczas lewa strona równania (3.22) zachowuje się jak λ^2 , natomiast prawa redukuje się do 2Φ , ponieważ Φ jest także małe. Istotnie $\Phi = \pi E \delta / 8 (1 - \nu^2) Y l$, co dla $Y \rightarrow E$ staje się rzędu δ/l , podczas gdy δ w idealnie kruchym ciele jest rzędu odległości międzyatomowych. Tak więc kryterium zniszczenia upraszcza się do postaci

$$(3.24) \quad \lambda_{\text{kryt}}^2 = 2\Phi \quad \lambda_{\text{kryt}} = p_{\text{kryt}}/E,$$

skąd wynika

$$(3.25) \quad p^E = \left[\frac{\pi E \gamma}{2(1-\nu^2)} \right]^{1/2}.$$

Indeks E dodaliśmy, aby zaznaczyć, że powyższy wzór został wyprowadzony w oparciu o rozważania energetyczne. Jest to wzór GRIFFITHA-SACKA-SNEDDONA, jak oczekiwaliśmy. Aby przejść od (3.24) do (3.25), podstawiliśmy

$$2\Phi = \frac{\pi E \delta / 2}{2(1-\nu^2) l E} = \frac{\pi \gamma}{2(1-\nu^2) l E}$$

(zastępując Y przez E i korzystając ze wzoru Polanyi $\gamma = E\delta/2$).

Również i w drugim przypadku szczególnym (długie szczeliny) energetyczne kryterium zniszczenia (3.22) upraszcza się znacznie. Funkcja $G(\lambda)$ rośnie monotonicznie z λ , tak więc dla małych Φ ($l \gg l_*$) równanie (3.22) może być spełnione jedynie przez małe λ . Otrzymujemy znowu $\lambda_{\text{kryt}}^2 = 2\Phi$ z tą jedynie różnicą, że λ_{kryt} jest teraz zdefiniowane jako p_{kryt}/Y oraz 2Φ może być wyrażone jako $\pi E \Pi_0 / 2 (1 - \nu^2) l Y^2$, jeśli uwzględnimy prosty wzór $\Pi = \Pi_0 = Y\delta/2$, odnoszący się do długich szczelin. Stąd mamy

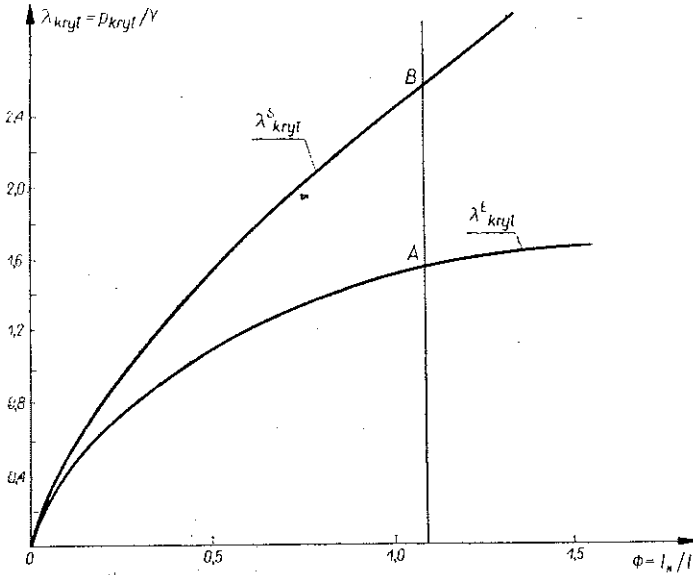
$$(3.26) \quad p_{\text{kryt}}^E = \left[\frac{\pi E \Pi_0}{2(1-\nu^2) l} \right]^{1/2}.$$

Jest to równanie Orowana-Irwina.

W przypadku ogólnym rozwiązanie równania (3.22) może nastęrczać pewne trudności. Stosując interpolację typu Hermite'a znajdujemy (zob. Dodatek) dla zakresu $0 \leq \Phi \leq 1$ przybliżone wyrażenie na ciśnienie krytyczne

$$(3.27) \quad \lambda_{kryt}^E = \sqrt{2\Phi} (1 - 0,070\Phi + 0,146\Phi^2).$$

Wykres bezwymiarowego obciążenia krytycznego jako funkcji Φ zgodnie z równaniem (3.27) jest przedstawiony na rys. 5 wraz z inną krzywą, odpowiadającą równaniu $\lambda^S = \sqrt{2\Phi} + \Phi$, które wynika z kryterium maksymalnego odkształcenia [22]. Rysu-



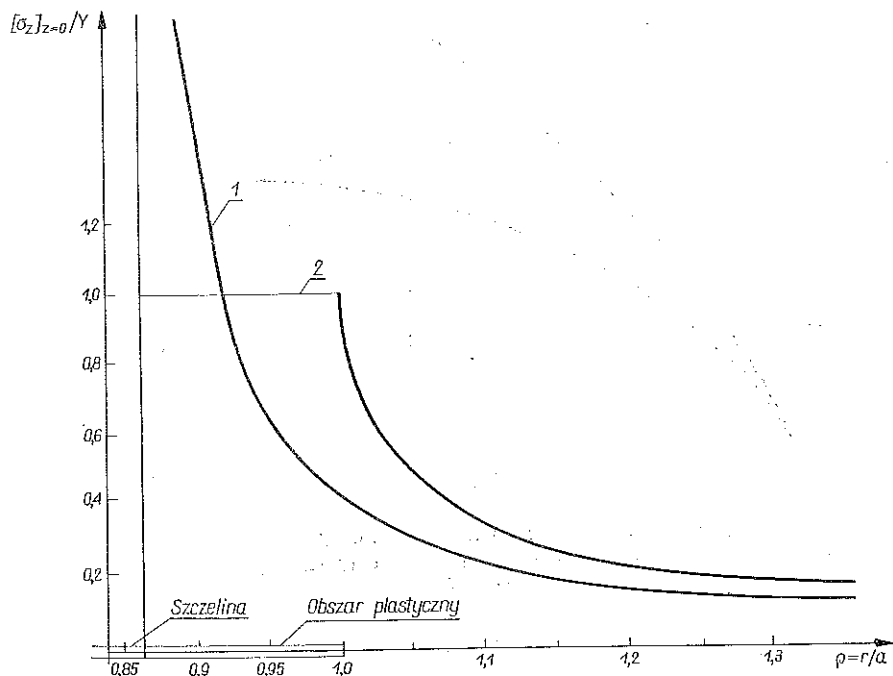
Rys. 5. Obciążenie krytyczne jako funkcja długości szczeliny:
 (górna i dolna krzywa odpowiednio wynikają z kryterium maksymalnego odkształcenia oraz kryterium energetycznego)

nek 5 potwierdza twierdzenie [20 i 25], że energetyczne kryterium zniszczenia jest warunkiem koniecznym na zapoczątkowanie propagacji szczeliny, natomiast kryterium odkształceniowe jest warunkiem dostatecznym. Krzywa $\lambda^E(\Phi)$ leży poniżej krzywej $\lambda^S(\Phi)$, wyjąwszy zakres małych wartości Φ , gdzie obie krzywe pokrywają się zachowując kształt zbliżony do $\sqrt{2\Phi}$. Rozbieżność między wartościami λ_{kryt}^E i λ_{kryt}^S tłumaczymy pewnym «naddatkiem» energii, która dla dowolnie obranego Φ istnieje po przekroczeniu wartości λ_{kryt}^E , gdy zniszczenie jest możliwe z energetycznego punktu widzenia (punkt A na rys. 5), i która zostaje uwolniona w punkcie λ_{kryt}^S , punkt B na rys. 5, tzn. w chwili początkowego zniszczenia. Oczywiście, energia ta zostaje zamieniona na energię kinetyczną rozprzestrzeniającej się szczeliny: jest ona tym większa, im mniejsza jest długość szczeliny. Innymi słowy, zniszczenie zapoczątkowane przez krótką szczelinę rozprzestrzenia się bardziej gwałtownie, niż to ma miejsce w przypadku długich szczelin. Dla długości szczeliny bliskiej l_* otrzymujemy $\lambda^S/\lambda^E \approx 1,6$, podczas gdy dla $l \gg l_*$ stosunek ten zmierza

do jedności. Znajomość «nadwyżki» ciśnienia w chwili początkowego zniszczenia jest istotna dla teorii traktujących o rozprzestrzenianiu się szczeliny i ma ona wpływ, jak pokazał BERRY [4], na postać równania ruchu szczeliny.

4. Porównanie z teoriami sprężystymi

Zajmiemy się teraz porównaniem niektórych wielkości wyprowadzonych w niniejszej pracy z odpowiadającymi wielkościami znanymi w teorii zniszczenia ciał kruchych. Przede wszystkim badamy rozkład naprężeń σ_z w płaszczyźnie szczeliny: osobliwość typowa dla rozwiązań sprężystych (rys. 6, krzywa 1) znika w zakresie



Rys. 6. Relaksacja naprężeń wywołana występowaniem strefy uplastycznionej w pobliżu wierzchołka szczeliny (obciążenie $p_0 = Y$):

1 — rozwiązanie sprężyste, 2 — rozwiązanie sprężysto-plastyczne

sprężysto-plastycznym. Relaksacja naprężeń w obszarze przyległym do wierzchołka szczeliny jest zobrazowana na rys. 6, krzywa 2. Wykres ten został sporządzony w oparciu o wzory SNEDDONA [28] dla krzywej 1 oraz wzory z pracy [22] dla krzywej 2.

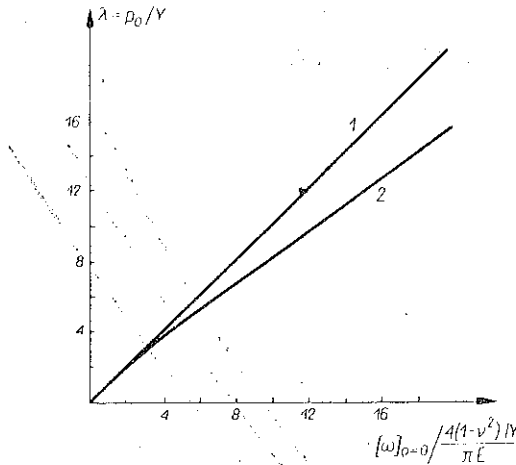
Następnie porównujemy zależność: przyłożone ciśnienie \sim przemieszczenie środka szczeliny. Dla przypadku sprężystego jest to zależność liniowa

$$(4.1) \quad w_{z=0} = \frac{4(1-\nu^2)l}{\pi E} p_0,$$

natomiast odpowiedni wzór dla zakresu sprężysto-plastycznego otrzymujemy bez trudu z równań (2.14) przyjmując $\varrho = 0$, mianowicie

$$(4.2) \quad w_{\varrho=0} = \frac{4(1-\nu^2)lp_0}{\pi E} \frac{1+\lambda}{\lambda} \arcsin \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda = p_0/Y.$$

Obydwa równania są zilustrowane na rys. 7. Dla małych λ wzór (4.2) można napisać



Rys. 7. Przesunięcie w środku szczeliny jako funkcja obciążenia:
1—rozwiązanie sprężyste, 2—rozwiązanie sprężysto-plastyczne

$$(4.3) \quad w_{\varrho=0} = \frac{4(1-\nu^2)lp_0}{\pi E} \left(1 + \lambda + \frac{1}{6} \lambda^2 + \dots \right),$$

skąd widać, że w przypadku granicznym, gdy stosunek ciśnienie/granica plastyczności zmierza do zera, otrzymujemy z obecnej teorii wzory teorii sprężystości.

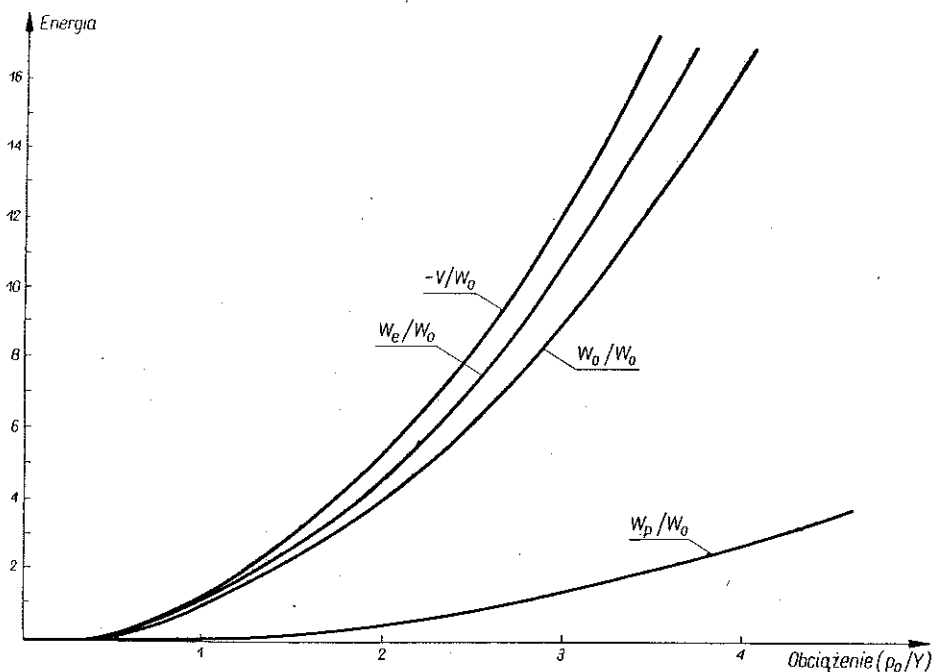
Podobnie zachowują się wzory na energię, gdy $\lambda \rightarrow 0$:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} W_e &= \frac{8(1-\nu^2)l^3 p_0^2}{3E} \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \dots \right), \\ W_p &= \frac{8(1-\nu^2)l^3 p_0^2}{3E} \frac{\lambda^2}{2} + \dots, \\ W &= \frac{8(1-\nu^2)l^3 p_0^2}{3E} \left(1 + \frac{3}{4} \lambda^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

gdzie czynnik $W_0 = 8(1-\nu^2)l^3 p_0^2/3E$ wyraża energię sprężystą dla ciała kruchego, zawierającego szczelinę o tej samej geometrii i promieniu l (SNEDDON [28]). Gdy $\lambda \rightarrow 0$, energia sprężysta W_e oraz praca sił zewnętrznych W zmierza do W_0 , natomiast praca plastyczna W_p znika. Energie zarówno w przypadku sprężystym, jak i sprężysto-plastycznym są nieliniowymi funkcjami obciążenia. Odpowiednie wykresy przedstawia rys. 8.

Warto zauważyć, że schemat obciążenia posiada istotny wpływ na mechanizm zniszczenia. Ponieważ w niniejszej pracy zajmujemy się tylko jednym schematem obciążenia (ciśnienie przyłożone do powierzchni szczeliny), zilustrujemy powyższe stwierdzenie zestawieniem wyników liczbowych według przykładu rozwiązanego w pracy [22]. Przykład ów dotyczy stali nisko-węglowej, dla której

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Phi_0 &= 0,25, \quad \nu = 0,3, \quad E = 2 \cdot 10^{12} \text{ dyna/cm}^2, \\ Y_0 &= 2 \cdot 10^9 \text{ dyna/cm}^2, \end{aligned}$$



Rys. 8. Energia sprężysta, praca plastyczna oraz całkowita energia odkształcenia jako funkcje obciążenia $W_0 = 8(1 - \nu^2) l^3 \gamma^2 / 3 E$

gdzie Y_0 jest granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu. Promień szczeliny przyjęto 1 cm, lecz nie jest to jedyna wartość, jaką może on przyjmować bez zmiany warunków niniejszego przykładu, ponieważ zarówno stałe materiałowe, jak i długość szczeliny są ujęte w stałej $\Phi_0 = \pi E \delta / 8 (1 - \nu^2) Y_0 l$. Układ danych E, δ, ν, Y_0, l zatem określa wartość stałej Φ_0 . Rozpatrzmy dwa schematy obciążenia: 1 — ciśnienie przyłożone do powierzchni szczeliny oraz 2 — naprężenie rozciągające przyłożone w nieskończoności w kierunku normalnym do powierzchni szczeliny. W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy, że $Y = Y_0$, oraz obliczamy korzystając ze wzorów pracy [22] ciśnienie krytyczne (wg. kryterium maksymalnego odkształcenia), długość strefy plastycznej oraz krytyczną dysypację energii. Następnie po

ustaleniu związku między Y i Y_0 w oparciu o analizę warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego:

$$(4.6) \quad Y = \begin{cases} 1,82 Y_0, \\ 1,29 Y_0 \end{cases}$$

(górną wartość dotyczy przypadku 1, dolną 2) wszystkie poprzednio obliczone wielkości ulegają korekcji, polegającej na podstawieniu (4.6) na miejsce Y . Poniżej zebraliśmy wyniki końcowe obliczeń przed korekcją (po lewej) oraz po korekcji (po prawej):

ciśnienie krytyczne

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \lambda_{\text{kryt}} &= \begin{cases} 0,957, \\ 0,660, \end{cases} & \lambda_{\text{kryt}} &= \begin{cases} 1,198, \\ 0,765, \end{cases} \\ p_{\text{kryt}} &= \begin{cases} 1,91 \cdot 10^9 \text{ [dyna/cm}^2\text{]}, \\ 1,32 \cdot 10^9 \text{ [dyna/cm}^2\text{]}, \end{cases} & p_{\text{kryt}} &= \begin{cases} 2,40 \cdot 10^9 \text{ [dyna/cm}^2\text{]}, \\ 1,53 \cdot 10^9 \text{ [dyna/cm}^2\text{]}; \end{cases} \end{aligned}$$

krytyczny zasięg strefy plastycznej

$$(4.8) \quad \left(\frac{a}{l}\right)_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1,15, \\ 1,33, \end{cases} \quad \left(\frac{a}{l}\right)_{\text{kryt}} = \begin{cases} 1,09, \\ 1,23; \end{cases}$$

krytyczna dysypacja energii

$$(4.9) \quad \Pi = \begin{cases} 0,665 \cdot 10^6 \text{ [erg/cm}^2\text{]}, \\ 0,774 \cdot 10^6 \text{ [erg/cm}^2\text{]}, \end{cases} \quad \Pi = \begin{cases} 1,14 \cdot 10^6 \text{ [erg/cm}^2\text{]}, \\ 0,93 \cdot 10^6 \text{ [erg/cm}^2\text{]}.$$

Różnice między wartościami przed i po korekcji świadczą o tym, że wyniki obliczeń zależą nie tylko od własności materiałowych, długości szczeliny oraz schematu obciążenia, ale także ma na nie wpływ postać przyjętego warunku plastyczności. Co więcej, widać, że nośność graniczna jest wyczerpana w różny sposób w obydwu przypadkach obciążenia: zasięg strefy uplastycznionej w momencie poprzedzającym zniszczenie wynosi tylko 9% długości szczeliny, gdy szczelina jest poddana działaniu ciśnienia hydrostatycznego, podczas gdy w przypadku obciążeń przyłożonych w nieskończoności zasięg ten wynosi 23%. Krytyczny zasięg strefy plastycznej może być uważany za miarę plastycznej relaksacji i jego wartość wskazuje, jak dalece łamliwość materiału, wywołana istnieniem koncentratora naprężeń, zostaje obniżona dzięki zdolności do plastycznych odkształceń, które poprzedzają kruche pęknięcie. Ciśnienia krytyczne różnią się także bardzo. Jakkolwiek obserwujemy tendencję przeciwną: p_{kryt} dla przypadku 2 wynosi około 2/3 ciśnienia krytycznego powodującego zniszczenie w przypadku 1, to jednak należy pamiętać, że w przypadku ciśnień przyłożonych bezpośrednio do powierzchni szczeliny (np. szczelin lub wad powierzchniowych) ciśnienia są wielokrotnie większe niż w przypadku obciążeń działających w miejscu odległym od szczeliny. Wnioskujemy zatem, że zniszczenie zapoczątkowane przez szczelinę poddaną ciśnieniu hydrostatycznemu posiada charakter bardziej zniszczenia kruchego niż ciągliwego pomimo ciągliwych własności materiału. Wniosek ten może być przydatny przy analizie zużycia powierzchni

poddanych działaniu wysokich ciśnień, np. powierzchni łożysk smarowanych hydrodynamicznie, powierzchni łopatek turbin lub też współpracujących ze sobą powierzchni zębów w przekładniach zębatych.

Warto zauważyć, że po korekcy wartości krytycznej dysypacji energii są bardzo zbliżone dla obydwu schematów obciążenia.

Dodatek

Równanie (3.22) przepisane krótko w postaci

$$(1) \quad G(\lambda) = \varphi(\Phi)$$

określa nieznaną funkcję $\lambda^E = f(\Phi)$. Stosując interpolację typu Hermite'a wyznaczmy funkcję $f(\Phi)$ w sposób przybliżony. Żądamy, aby szukana funkcja przyjmowała wartości ściśle co najmniej w dwóch punktach: $\Phi = 0$ oraz $\Phi = 1$, a także aby jej pierwsza pochodna była identyczna z pochodną obliczoną w sposób ścisły w tych samych dwóch punktach.

Proponujemy równanie

$$(2) \quad \lambda_{\text{kryt}}^E = \sqrt{2\Phi} [1 + A\Phi + B\Phi^2],$$

które zapewnia spełnienie wszystkich warunków w punkcie $\Phi = 0$ przy dowolnych A i B . Uzyskana jest tu ponadto zgodność nie tylko pierwszej pochodnej lecz wszystkich pochodnych, ponieważ ścisła funkcja dla $\Phi \rightarrow 0$ zachowuje się jak $\sqrt{2\Phi}$. Stałe A i B wyznaczamy z warunku w punkcie $\Phi = 1$.

$$(3) \quad \lambda^E = 1,52, \quad d\lambda^E/d\Phi = 1,075.$$

Pierwsza z tych wartości została uzyskana numerycznie z równania (A2), natomiast druga jest stosunkiem $[d\varphi/d\Phi]_{\Phi=1} = 3,42$ oraz $[dG/d\lambda]_{\lambda=1,52} = 3,18$. Otrzymujemy układ równań liniowych

$$(4) \quad \begin{aligned} \sqrt{2}(1+A+B) &= 1,52, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+3A+5B) &= 1,075, \end{aligned}$$

skąd $A = -0,070$ oraz $B = 0,146$.

Literatura cytowana w tekście

1. D. R. DE G. ALLEN, R. V. SOUTHWELL, *Relaxation methods applied to engineering problems*, XIV: *Plastic straining in two-dimensional stress systems*, Phil. Trans. Roy. Soc. A, 242 (1949—50), 379.
2. G. I. BARENBLATT, *Mathematical theory of non-propagating cracks generated during brittle fracture*, Zhurnal Prikladnoj Mekhaniki i Teoreticheskoj Fiziki, 4 (1961), 3 (in Russian).
3. G. I. BARENBLATT, private communication.
4. J. P. BERRY, *Some kinetic considerations of the griffith criterion for fracture*, J. Mech. Phys. Solids, 8 (1960), 194.
5. B. A. BILBY, A. H. COTTRELL, K. H. SWINDEN, *The spread of plastic yield from a notch*, Proc. Roy. Soc. A, 272 (1960), 304.

6. B. A. BILBY, A. H. COTTRELL, E. SMITH, K. H. SWINDEN, *Plastic yielding from sharp notches*, Proc. Roy. Soc. A, **279** (1964), 1.
7. D. S. DUGDALE, *Yielding of steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys. Solids, **8** (1960), 100.
8. YA. I. FRENKEL, *The theory of reversible and irreversible cracks in solids*, Zhurnal Tekhnicheskoy Fiziki, **22** (1952), 1857 (in Russian).
9. N. E. FROST, D. S. DUGDALE, *The propagation of fatigue cracks in sheet specimens*, J. Mech. Phys. Solids, **6** (1958), 92.
10. A. GRIFFITH, *The phenomenon of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. A, **221** (1921), 163.
11. W. W. GERBERICH, *Plastic strains and energy density in cracked plates*, I. Experimental Technique and Results, Proc., SESA 2, **21** (1964), 335.
12. J. N. GOODIER, F. A. FIELD, *Plastic energy dissipation in crack propagation*, Fracture of Solids, New York 1963, J. J. Gilman Interscience Publishers, p. 103.
13. A. K. HEAD, *The propagation of fatigue cracks*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 407.
14. J. HULT, McCINTOCK, *Elastic-plastic stress and strain distributions around sharp notches under repeated shear*, IX Int. Congr. Appl. Mech., Brussels 1956, Proc. VIII, 51.
15. G. R. IRWIN, *Fracture mechanics*, Pergamon Press, New York 1960.
16. J. A. JACOBS, *Relaxation methods applied to problem of plastic flow*, I. Notched Bar Under Tension, Phil. Mag., **41** (1960), 349.
17. G. I. KORNILOV, S. J. YAREMA, *Plane specimen with crack-shape concentrator for experimental investigation of plastic zones*, Voprosy Mekh. Real. Tverdogo Tela 1, Izd. A.N. SSSR, Kijev 1962, 29 (in Russian).
18. M. J. LEONOV, *Elements of the theory of brittle fracture*, Zhurnal Prikl. Mekh. Teoret. Fiziki, **3** (1961), 85 (in Russian).
19. A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., University Press, Cambridge 1934.
20. S. A. F. MURRELL, *The theory of the propagation of elliptical Griffith cracks under various conditions of plane strain or stress*, Brit. J. Appl. Phys., **15** (1964), 1195.
21. Z. OLESIAK, M. WNUK, *Length of plastic zones for penny shaped crack*, Bull. of Polish Academy of Sciences, **13** (1965), 445.
22. Z. OLESIAK, M. WNUK, *Plastic energy dissipation due to a penny shaped crack*, to be published in Proc. Roy. Soc., 1966.
23. E. OROWAN, *Fatigue and Fracture of Metals*, Wiley and Sons, 1952.
24. E. OROWAN, *Energy criteria of fracture*, Welding Journal, March, 1955, 157s.
25. J. R. RICE, *An examination of the fracture mechanics energy balance from the point of view of continuum mechanics*, Int. Confer. on Fracture, Sendai 1965.
26. K. N. RUSINKO, *On the conditions of the creation of plastic zones for a plate with a line crack subject to tension*, Voprosy Mekh. Real. Tver. Tela 2, Izd. A.N. SSSR, Kijev 1964, 27 (in Russian).
27. J. P. SHELTOV, S. A. KHRISTIANOVICH, *On the mechanism of fracture of a pressurized oil stratum*, Izd. A. N. SSSR, OTN 5, 1955 (in Russian).
28. I. N. SNEDDON, *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid*, Proc. Roy. Soc. A, **187** (1946), 229.
29. I. N. SNEDDON, *Crack Problems in the Theory of Elasticity*, Dep. Math. Eng. Res., North Carolina State College, Raleigh, North Carolina 1961.
30. E. SMITH, *The spread of plasticity from stress concentrations*, Proc. Roy. Soc. A, **282** (1964), 442.
31. E. SMITH, *Strain concentration effects in large structures*, Proc. Roy. Soc. A, **285** (1965), 46.
32. L. D. STIMPSON, D. M. EATON, *The extent of elastic-plastic yielding at the crack point of an externally notched plane stress tensile specimen*, ARL-24, Aeron. Res. Lab., OAR, 1961.
33. J. S. SWEDLOW, W. W. GERBERICH, *Plastic strains and energy density in cracked plates*, II. Comparison with Elastic Theory, Proc., SESA 2, **21** (1964), 345.
34. K. N. SWINDEN, *Thesis*, The University of Sheffield (1960).

35. M. L. WILLIAMS, private communication.

36. M. WNUK, *The nature of fracture read over from the potential energy curve*, prepared for publication.

37. P. M. VITVITSKI, M. J. LEONOV, *Sliding Zones for a Non-Homogeneous Deformation of Plates*, *Voprosy, Mekh. Real. Tverd.*, Tela 1, Izd. AN SSSR, Kijev 1962, 13 (in Russian).

38. S. J. YAREMA, *Investigation of plastic zones in the tension of plates with concentrators*, *Voprosy Mekh. Real. Tverd.*, Tela 2, Izd. AN SSSR, Kijev 1964, 177 (in Russian).

Резюме

КРИТЕРИИ ТЯГУЧЕСТИ РАЗРУШЕНИЯ ВЫЗВАННОГО ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ, ПОД ВЛИЯНИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Подвергается дискуссии механизм тягучести разрушения в свете обсуждений энергетического равновесия при разрушении идеально упруго-пластической среды, ослабленной осесимметрической трещиной, нагруженной гидростатическим давлением. Предлагаемая модель трещины касается случая, когда среда удовлетворяет некоторому добавочному предположению, а именно, пластическая зона должна находиться в узком слое, расположенном в плоскости трещины. Критическое давление, вызывающее распространение трещины, вычисляется из энергетического условия, а затем сравнивается с тем, которое вытекает из условия максимальной деформации. Результаты работы сравниваются с соответствующими величинами, известными в теории хрупких тел (Гриффит, Снеддон, Сак).

Показано, что схема нагрузки имеет существенное влияние на несущую способность и род разрушения. Полученные уравнения можно применить при изучении использования поверхностей, ослабленных небольшими щелями или трещинами (поверхностные пороки), подверженных действию высоких давлений.

Summary

CRITERIA OF DUCTILE COLLAPSE DUE TO AN AXIALLY SYMMETRIC CRACK UNDER HYDRAULIC PRESSURE

This is a discussion of the ductile collapse process in the light of considerations of energy balance at the collapse of a perfect elastic-plastic medium with an axially symmetric crack under hydraulic pressure. The model of the crack proposed concerns the case in which the body satisfies the additional assumption of the plastic zone constituting a narrow layer in the plane of the crack. The critical pressure causing the gap to propagate is calculated from the energy condition and confronted with the value obtained from the condition of maximum strain. The results of the present work are also confronted with the relevant values known from the theory of collapse of brittle bodies (Griffith, Sneddon, Sack).

It is shown that the type of load has an essential influence on the limit load and the type of collapse. The equations obtained can be useful for studies of wear of surfaces weakened by small cracks (surface defects) and subject to the action of very high pressures.

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 stycznia 1967 r.