

OBLICZANIE PŁYT SIATKOWYCH NA PODSTAWIE TEORII EFEKTU BRZEGOWEGO

SYLWESTER KONIECZNY (ŁÓDŹ), CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Płytami o strukturze siatkowej nazywamy płyty, których struktura geometryczna jest opisana pewną ciągłą siatką. Są to płyty o gęstej i regularnej perforacji, gęste i regularne siatki rusztowe utworzone z dwóch lub trzech rodzin belek oraz płyty zbrojone gęstymi siatkami. W pracy [1] zostały wyprowadzone podstawowe równania liniowej teorii sprężystych płyt o strukturze siatkowej, oparte na ciągłym modelu takich płyt. Parametryzując płaszczyznę środkową nieodkształconej płyty dowolnymi układami współrzędnych krzywoliniowych  $\{x^\alpha\}$  (wskaźniki oznaczone małymi literami alfabetu greckiego przebiegają wartości 1, 2), otrzymano w pracy [1] następujący liniowy układ trzech równań różniczkowych cząstkowych dla funkcji ugięcia  $w = w(x^1, x^2)$  oraz funkcji  $\gamma^\alpha = \gamma^\alpha(x^1, x^2)$  (1) będących składowymi tzw. «niezależnego obrotu» (pominięto wyrazy inercyjne, wstępne napięcia i obciążenia momentowe):

$$(1.1) \quad \begin{aligned} [D^{\alpha\beta\mu\nu}(w,{}_{,\mu\nu} - \gamma_{\nu, \mu})]_{,\alpha\beta} + f &= 0, \\ I_2 [D^{\alpha\beta\mu\nu}(w,{}_{,\nu} - \gamma_{\nu, \mu})]_{,\alpha} - 'A^{\beta\mu}\gamma_\mu &= 0. \end{aligned}$$

W równaniach (1.1) wielkości  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  oraz  $'A^{\beta\mu}$  są tensorami sztywności sprężystej płyty i wyrażają się wzorami

$$(1.2) \quad \begin{aligned} D^{\alpha\beta\mu\nu} &= \varepsilon^{\beta}_{,\alpha} \varepsilon^{\nu}_{,\rho} C^{\alpha\rho\mu\sigma}, \\ C^{\alpha\rho\mu\sigma} &= \sum_{\Delta} \sum_{\Lambda} t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\rho} t_{\Delta}^{\mu} \tilde{t}_{\Delta}^{\sigma} S^{\Delta\Lambda} + \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\rho} (t_{\Delta}^{\mu} t_{\Delta}^{\sigma} S^{\Delta} + \tilde{t}_{\Delta}^{\mu} \tilde{t}_{\Delta}^{\sigma} \tilde{S}^{\Delta}), \\ A^{\beta\mu} &= 'A^{\beta\mu} I_2 = t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\mu} R^{\Delta}. \end{aligned}$$

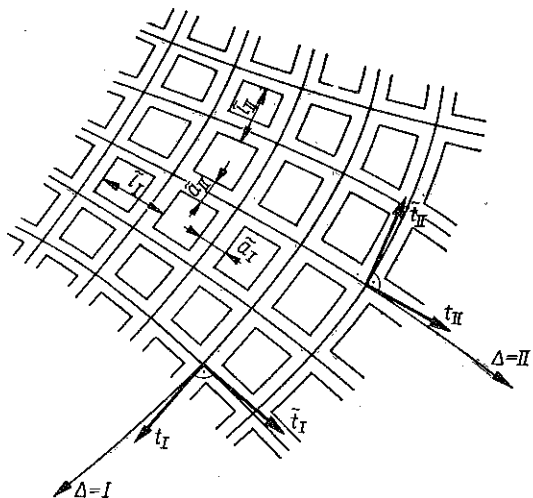
Siatkowa struktura płyty jest opisana dwoma lub trzema rodzinami krzywych (włóknami) ( $\Delta$ ) (wskaźniki  $\Delta, \Lambda$  przybierają wartość I, II lub I, II, III w zależności od tego czy siatka składa się z dwóch, czy też z trzech rodzin krzywych) leżących na płaszczyźnie  $\pi$ . Wielkości  $t_{\Delta}^{\alpha}$  i  $\tilde{t}_{\Delta}^{\alpha}$  są składowymi kontrawariantnymi wektorów jednostkowych kolejno stycznych i normalnych do krzywych ( $\Delta$ ). Dla płyt perfo-

(1) Dla wskaźników greckich stosujemy konwencję sumacyjną; przecinek oznacza pochodną kowariantną.

rowanych o perforacji prostokątnej, której schemat przedstawia rys. 1, należy przyjąć (wskaźniki  $\Delta$ ,  $\tilde{\Delta}$  przybierają wartości I, II):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \|S^{\Delta A}\| &= \frac{S^3}{12(1-\nu_I\nu_{II})} \left\| \begin{array}{cc} E_I & \nu_I E_{II} \\ \nu_{II} E_I & E_{II} \end{array} \right\|, & E_A &= E \frac{\tilde{a}_A}{\tilde{l}_A}, & \nu_A &= \nu \frac{\tilde{a}_A}{\tilde{l}_A}, \\ S^A &= \frac{E_A S^3}{6(1+\nu)} \left(1 - 0,5 \frac{\tilde{a}_A}{\tilde{l}_A}\right), & \tilde{S}^A &= 0, & R^A &= \frac{E_A S^3}{(l_A - a_A)^2}. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach  $\nu$ ,  $E$  są stałymi materiałowymi (zakładamy jednorodność i izotropię sprężystego materiału płyty),  $S$  jest grubością płyty a parametry  $\tilde{a}_A$  i  $\tilde{l}_A$  zaznaczono na rys. 1. W cytowanej pracy [1] podano również odpowiednie wyrażenia  $S^{\Delta A}$ ,  $S^A$  i  $R^A$  dla bardziej złożonych przypadków perforacji płyty (otwory równoległoboczne, trójkątne, sześciokątne etc.) oraz dla gęstych siatek utworzonych z dwóch lub trzech rodzin belek. Symbol  $l$  występujący w (1.1) jest parametrem o wymiarze długości. Parametr ten jest wielkością rzędu odległości sąsiednich węzłów rusztu lub odległości sąsiednich otworów płyty. Składowe fizyczne tensorów  $A^{\alpha\mu}$  i  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  mają ten sam wymiar i są wielkościami tego samego rzędu,

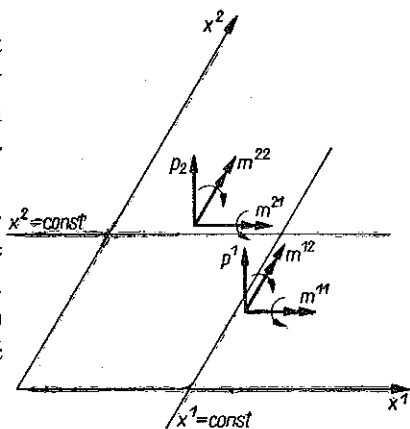


Rys. 1

co wykazano w [1]. Kontynuálny model płyt o strukturze siatkowej może być stosowany w tych wszystkich przypadkach, w których  $l/L \ll 1$ , gdzie  $L$  jest wymiarem charakterystycznym płyty lub długością «fali» obciążenia.

Stan napięcia w płytach o strukturze siatkowej jest określony tensorami  $m^{\alpha\beta}$  napięć momentowych oraz wektorem  $p^\alpha$  sił tnących, analogicznie do klasycznej teorii płyt (rys. 2) składowe stanu napięcia można wyznaczyć ze wzorów

$$(1.4) \quad \begin{aligned} m^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\nu}^{\pi} (w_{,\pi\mu} - \gamma_{\pi,\mu}), \\ p^\alpha &= A^{\alpha\mu} \gamma_\mu, \end{aligned}$$



Rys. 2

tj. są one jednoznacznie określone składowymi stanu przemieszczenia  $w = w(x^1, x^2)$  i  $\gamma_\mu = \gamma_\mu(x^1, x^2)$ . Na brzegu obszaru  $\pi$  możemy ustalić trzy warunki brzegowe.

Dla brzegu niepodpartego mają one postać

$$(1.5) \quad m^{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta = \widehat{m}_t, \quad m^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \widehat{m}_n, \quad p^\alpha n_\alpha = \widehat{p},$$

w której  $\widehat{m}_t$ ,  $\widehat{m}_n$ ,  $\widehat{p}$  są danymi obciążeniami brzegu płyty oraz  $n_\alpha$  i  $t_\beta$  są składowymi jednostkowego wektora kolejno normalnego i stycznego do brzegu. Dla brzegu doskonale sztywno utwierdzonego spełnione są warunki

$$(1.6) \quad w = 0, \quad \varepsilon_\nu^\pi(w, \pi - \gamma_\pi) = 0.$$

Dla brzegu swobodnie podpartego lecz obciążonego momentami zginającymi  $\widehat{m}_t$  i skręcającymi  $\widehat{m}_n$  mamy

$$(1.7) \quad w = 0, \quad m^{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta = m_t, \quad m^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \widehat{m}_n.$$

Ścisłe rozwiązanie zagadnienia brzegowego w teorii płyt o strukturze siatkowej jest bardzo złożone poza pewnymi przypadkami osiowo-symetrycznymi [2]. Wykorzystać jednak można fakt, że w układzie równań (1.1) przy operatorze różniczkowym najwyższego rzędu występuje mały parametr  $l^2$ . Umożliwia to zastosowanie metody asymptotycznej do zagadnienia, którego najprostszy wariant przedstawiono w dalszej części niniejszej pracy.

### 2. Anizotropia konstrukcyjna

Płyty o strukturze siatkowej można rozpatrywać również korzystając z teorii przybliżonej, którą otrzymamy przyjmując  $l^2 \rightarrow 0$ . Wtedy ze względu na (1.1)<sub>2</sub> zachodzi  $\gamma_\mu = 0$  (tensor o składowych  $'A^{\alpha\mu}$  zgodnie z (1.2)<sub>3</sub> tworzy bowiem macierz nieosobliwą), a równanie (1.1)<sub>1</sub> sprowadzi się do postaci

$$(2.1) \quad (D^{\alpha\beta\mu\nu} w, \mu)_{,\alpha\beta} + f = 0.$$

Równanie (2.1) z punktu widzenia formalnego jest podobne do równania ugięcia płyty anizotropowej. Model ciągły płyt o strukturze siatkowej, otrzymany z ogólniejszego modelu przedstawionego w punkcie 1 przyjęciem  $l^2 \rightarrow 0$ , nazywamy anizotropią konstrukcyjną płyt [2-5]. Układ równań (1.1) jest układem równań różniczkowych szóstego rzędu, typu eliptycznego, natomiast równanie (2.1) jest równaniem eliptycznym rzędu czwartego. Tym samym spełnienie wszystkich trzech warunków brzegowych (1.5) [względnie warunków (1.6) lub (1.7)] w oparciu o model konstrukcyjnej anizotropii nie jest na ogół możliwe. Korzystać wtedy musimy ze «zredukowanej» postaci tych warunków, które (przy danych obciążeniach brzegu) wyrażają się wzorami znanymi z teorii płyt Kirchhoffa:

$$(2.2) \quad m^{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta = \widehat{m}_t, \quad p^\alpha n_\alpha + (m^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)_{,\mu} t^\mu = \widehat{p}.$$

Wielkości  $\widehat{m}_t$  oraz  $\widehat{p}$  oznaczają kolejno gęstość obciążenia brzegu płyty momentami gnącymi oraz siłami tnącymi. Momenty gnące  $m^{\alpha\beta}$  oraz siły tnące  $p^\alpha$  występujące w warunkach (2.2) są określone wzorami analogicznymi do wzorów z teorii płyt Kirchhoffa:

$$(2.3) \quad m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_\nu^\pi w, \pi\mu, \quad p^\alpha = \varepsilon_\pi^\alpha m^{\mu\pi}_{,\mu}.$$

Po rozwiązaniu zagadnienia brzegowego opisywanego równaniami (2.1)–(2.3) można dodatkowo obliczyć wielkości  $\gamma_\mu$ , nie występujące w anizotropii konstrukcyjnej płyt (a ściślej mówiąc przyjmowane *a priori* jako równe zero). Wykorzystając należy w tym celu równanie (1.4)<sub>2</sub>. Oznaczając przez  $a_{\mu\alpha}$  tensor odwrotny do  $A^{\alpha\mu}$  ( $a_{\mu\alpha} A^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta$ ) otrzymamy wtedy

$$(2.4) \quad \gamma_\mu = a_{\mu\alpha} p^\alpha = a_{\mu\alpha} \varepsilon_{,n}^\alpha m^{\mu n},$$

przy czym momenty  $m^{\mu n}$  należy obliczyć przy pomocy (2.3)<sub>1</sub>. Jeżeli obliczone ze wzoru (2.4) wielkości  $\gamma_\mu$  (to jest niezależne od ugięcia obroty elementów ośrodka) są bardzo niewielkie wobec pochodnych ugięcia, tj. gdy w obszarze płyty (lecz niekoniecznie w pobliżu brzegów) zachodzi

$$(2.5) \quad \gamma_\mu \ll w_{,\mu}, \quad \gamma_{\mu,\nu} \ll w_{,\mu\nu},$$

wtedy model konstrukcyjnej anizotropii może stanowić przybliżony model obliczeniowy płyt o strukturze siatkowej [równanie (1.1)<sub>1</sub> zastąpić wtedy można równaniem (2.1)]. Niemniej jednak w otoczeniu brzegu płyty możemy otrzymać zasadnicze rozbieżności pomiędzy wielkościami  $m^{\alpha\beta}$ ,  $p^\alpha$  obliczonymi według modelu opisywanego układem równań szóstego rzędu (1.1) oraz według modelu anizotropii konstrukcyjnej, korzystając z równania rzędu czwartego (2.1). Model anizotropii konstrukcyjnej nie pozwala bowiem na jednoczesne spełnienie wszystkich trzech warunków brzegowych (1.5) (lub (1.6) lub też (1.7)). Niedogodność tę można jednak usunąć stosując dodatkowo przybliżoną teorię «efektu brzegowego», podobnie jak w teorii tarcz o strukturze siatkowej [6 i 7].

### 3. Efekt brzegowy

Efekt brzegowy tak w płytach jak i w tarczach o strukturze siatkowej jest zjawiskiem asymptotycznym związanym z faktem, że warunki (2.5) z reguły nie są spełnione w bezpośredniej bliskości brzegu obszaru. W ramach anizotropii konstrukcyjnej nie jesteśmy bowiem w stanie spełnić wszystkich trzech warunków brzegowych (1.5) [lub (1.6) lub też (1.7)], lecz tylko dwa. Redukcja rzędu układu równań (z szóstego do czwartego) wraz z utratą jednego warunku brzegowego przy przejściu do modelu anizotropii konstrukcyjnej jest cechą charakterystyczną zjawiska asymptotycznego [8]. Pomijając dokładną teorię efektu brzegowego w płytach i tarczach siatkowych, która została osobno omówiona w [9], ograniczymy się tylko do najprostszego przybliżonego wariantu tej teorii, mającego jednak znaczenie praktyczne.

Założmy, że brzeg płyty pokrywa się z linią parametryczną  $x^1 = x_{(0)}^1 = \text{const}$  oraz, że w obszarze  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  przyległym do brzegu linie parametryczne  $x^2 = \text{const}$  są prostymi normalnymi do brzegu. Przyjmując  $\xi^1 = x^1 - x_{(0)}^1$  jako odległość linii parametrycznej  $x^1 = \text{const}$  od brzegu, otrzymamy dla składowych tensora metrycznego  $g_{\alpha\beta}$  oraz symboli Christoffela tak przyjętego układu współ-

rzędnych (tzw. współrzędne normalne) następujące wyrażenia ( $k$  jest krzywizną linii  $x^1 = x_{(0)}^1$ ):

$$(3.1) \quad \|g_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - k\xi^1)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = k(1 - k\xi^1),$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = -\frac{k}{1 - k\xi^1},$$

przy czym pozostałe symbole Christoffela są równe zeru.

Wszystkie dalsze rozważania, dotyczące obszaru  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  przyległego do brzegu będą prawdziwe tylko w powyższym układzie współrzędnych. Przyjmujemy jednocześnie, że  $k^{-1}$  jest wielkością rzędu wyższego niż  $l$  ( $k^{-1} \ll l$ ). Założymy następnie, że dla  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  mamy  $A^{12} = A^{21} = 0$  oraz  $C^{\alpha\beta\beta\beta} = C^{\beta\alpha\beta\beta} = C^{\beta\beta\alpha\beta} = C^{\beta\beta\beta\alpha} = 0$  dla  $\alpha \neq \beta$  (nie sumować podług  $\beta$ !), tj. linie parametryczne  $x^\alpha = \text{const}$  są jednocześnie głównymi kierunkami ortotropii w płycie (w szczególności przypadku płyta może być izotropowa) (2).

Przybliżona teoria efektu brzegowego w płytach siatkowych polegać będzie na uzupełnieniu funkcji  $w(x^1, x^2)$  stanowiącej całość ogólną równania (2.1) takimi dwoma funkcjami  $\gamma_\mu(x^1, x^2)$ , które by spełniały następujące warunki:

1) na brzegu obszaru razem z funkcją  $w(x^1, x^2)$  spełniały wszystkie trzy warunki brzegowe (1.5) (lub (1.6) lub też (1.7));

2) spełniały warunki (2.5), tj. przyjmowały wartości dowolnie bliskie zeru we wszystkich punktach obszaru z wyjątkiem jego części  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  przylegającej bezpośrednio do brzegu;

3) byłyby ciągłe wraz ze swoimi pochodnymi do drugiego rzędu włącznie.

Funkcje  $\gamma_\mu(x^1, x^2)$  będą spełniać warunki 2 i 3, gdy przyjmiemy

$$(3.2) \quad l^2 \gamma_{\mu,11} \sim l \gamma_{\mu,1} \sim \gamma_\mu \quad \text{dla} \quad |x^1 - x_{(0)}^1| < S,$$

przy czym symbol  $\sim$  oznacza, że wielkości po obu jego stronach posiadają ten sam rząd (to jest jedna z nich nie może być w rozważaniach ogólnych pominięta jako mała wobec drugiej). W przypadku gdy funkcje  $\gamma_\mu$  przyjmują dla  $x^1 = x_{(0)}^1$  dane skończone wartości, warunek (3.2) oznacza, że wartości bezwzględne tych funkcji w otoczeniu  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  brzegu  $x^1 = x_{(0)}^1$  gwałtownie maleją (tym prędzej, im mniejsza jest wartość małego parametru  $l$ ).

Założmy, że wszystkie obciążenia brzegu płyty oraz obciążenie płyty  $f(x^1, x^2)$  zmieniają się wzdłuż brzegu w sposób łagodny, tj.

$$a^2(f, \widehat{p}, \widehat{m}_t, \widehat{m}_n)_{,22} \sim a(f, \widehat{p}, \widehat{m}_t, \widehat{m}_n)_{,2} \sim (f, \widehat{p}, \widehat{m}_t, \widehat{m}_n),$$

gdzie  $a$  jest parametrem o wymiarze długości i wielkością o rząd wyższą niż mały parametr  $l$ . W bezpośrednim otoczeniu brzegu przyjąć wtedy możemy

$$(3.3) \quad a^2 \gamma_{\mu,22} \sim a \gamma_{\mu,2} \sim \gamma_\mu, \quad a \ll l.$$

(2) Pojęcia anizotropii, ortotropii i izotropii nie dotyczą materiału płyty siatkowej (założono, że jest on zawsze izotropowy) lecz budowy tensorów  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$  (lub  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ ) oraz  $A^{\alpha\mu}$ .

W celu porównania rzędu wielkości funkcji  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  w otoczeniu brzegu zauważmy najpierw, że zgodnie z (1.1)

$$(A^{\beta\mu} \gamma_\mu)_{,\beta} = -f.$$

Powyższe równanie dla przyjętej ortotropii płyty i przy wykorzystaniu (3.2) przedstawić możemy również w postaci

$$(3.4) \quad A^{11} \gamma_{1,1} = -A^{22} \gamma_{2,2} - A^{22,2} \gamma_2 - f \sim -(A^{22} + aA^{22,2}) \gamma_{2,2} - f.$$

Wynika stąd (np. po przyjęciu  $f=0$ ), że  $\gamma_{1,1} \sim \gamma_{2,2}$ . Korzystając z (3.2) i (3.1) otrzymamy

$$\gamma_2 \sim a\gamma_{2,2} \sim a\gamma_{1,1} \sim \frac{a}{l} \gamma_1,$$

co wobec  $a \gg l$  oznacza, że  $\gamma_2$  jest wielkością o jeden rząd wyższą niż  $\gamma_1$  ( $\gamma_1$  możemy pomijać jako małe wobec  $\gamma_2$ ):

$$(3.5) \quad \gamma_2 \gg \gamma_1.$$

Funkcje  $\gamma_\mu(x^1, x^2)$  występują w warunkach brzegowych wraz z funkcją ugięcia  $w(x^1, x^2)$  w postaci wyrażen  $\gamma_{\mu,\nu} - w_{,\mu\nu}$  lub  $\gamma_\mu - w_{,\mu}$ . Ponieważ funkcje  $\gamma_\mu$  (a co najmniej jedna z nich) powinny mieć wpływ na warunki brzegowe, przeto musi być prawdziwa alternatywa

$$\gamma_{2,1} \sim w_{,\mu\nu} \quad \text{lub} \quad \gamma_{2,1} \gg w_{,\mu\nu}$$

lub alternatywa

$$\gamma_2 \sim w_{,\mu} \quad \text{lub} \quad \gamma_2 \gg w_{,\mu}.$$

Gdyby obie powyższe alternatywy były nieprawdziwe, wtedy funkcja  $\lambda_2$  (a więc także i funkcja  $\lambda_1$ , por. (3.5)) jako wielkość rzędu niższego nie mogłaby się pojawić w warunkach brzegowych (co jest sprzeczne z postulowanym uprzednio warunkiem 1). Ponieważ jednocześnie funkcja ugięcia  $w(x^1, x^2)$ , jako całka równania (2.1) nie wzrasta gwałtownie przy różniczkowaniu (rozwiązanie odpowiadające anizotropii konstrukcyjnej nie ma cech asymptotycznych), przeto zawsze spełniony jest warunek

$$(3.6) \quad \gamma_{2,11} \gg w_{,\mu\nu\pi}.$$

Przyjmujemy, że warunek (3.6) spełniony na brzegu  $x^1 = x_{(0)}^1$  płyty pozostaje również spełniony w obszarze  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  płyty. Wtedy wzory (3.2), (3.3), (3.5) i (3.6) charakteryzują co do rzędu wielkości funkcji  $w(x^1, x^2)$ ,  $\gamma_\mu(x^1, x^2)$  i pochodne tych funkcji w obszarze  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  przylegającym do brzegu płyty. Poza tym obszarem stosować możemy model konstrukcyjnej anizotropii, to jest przyjmować w przybliżeniu  $\gamma_\mu = 0$  (por. warunek 2).

Rozwińmy równania (1.1) w przyjętym układzie współrzędnych i przy założonej ortotropii obszaru  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  płyty siatkowej. Przyjmując  $\beta = 2$  po pominięciu

wielkości rzędu niższego zgodnie z (3.2), (3.3), (3.5) i (3.6) otrzymamy następujące równanie „efektu brzegowego”.

$$(3.7) \quad \gamma_{,11}^2 - \alpha\gamma^2 = 0, \quad \alpha = \alpha(x^1, x^2) = \frac{1}{l^2} \frac{A^{22}}{D^{1212}} = \frac{A^{22}}{D^{1212}} > 0.$$

Całkę tego równania po pominięciu wielkości rzędu niższego można przyjąć w postaci (3)

$$(3.8) \quad \gamma^2 = \varphi(x^2) \exp\left(-\int_{x_{(0)}^1}^{x^1} \sqrt{\alpha(\xi, x^2)} d\xi\right) + \chi(x^2) \exp\left(\int_{x_{(0)}^1}^{x^1} \sqrt{\alpha(\xi, x^2)} d\xi\right),$$

przy czym dla  $x^1 \geq x_{(0)}^1$  należy przyjąć  $\chi(x^2) \equiv 0$  oraz dla  $x^1 \leq x_{(0)}^1$  należy przyjąć  $\varphi(x^2) \equiv 0$ , bowiem poza obszarem  $|x^1 - x_{(0)}^1| < S$  przylegającym do brzegu płyty, funkcja  $\gamma^2$  powinna przyjmować wartości dowolnie bliskie zeru [tj. przy oddaleniu się od brzegu powinna być funkcją bardzo prędko malejącą, por. (3.2)]. Napiszmy w postaci rozwiniętej równanie (1.1)<sub>1</sub> dla  $\beta = 1$ . Pozostawiając w tym równaniu tylko wyrazy najwyższego rzędu zgodnie z (3.2) (3.3), (3.5) i (3.6), otrzymamy

$$(3.9) \quad \gamma_1 = \frac{1}{A^{11}} [(D^{1111}\gamma_{1,1} + D^{1122}\gamma_{2,2})_{,1} - (D^{\alpha 1\mu\nu} w_{,\nu\mu})_{,\alpha}].$$

Korzystając jednocześnie z (3.4) możemy za pomocą wzoru (3.9) określić jednoznacznie funkcję  $\gamma_1(x^1, x^2)$ , gdy znane są funkcje  $\gamma_2(x^1, x^2)$  i  $w(x^1, x^2)$ . Zaznaczmy jeszcze, że w przyjętym przez nas układzie współrzędnych o metryce (3.1) oraz zgodnie ze wzorem (3.5) pochodne kowariantne wektora  $\gamma_\mu$  w równaniu (3.9) po pominięciu wyrazów rzędu niższego sprowadzają się do pochodnych cząstkowych. Gdy  $af_1 \sim f$ , to przy obliczaniu funkcji  $\gamma_1$  z (3.9) i (3.4) można również pominąć funkcję  $f(x^1, x^2)$  występującą w (3.4).

#### 4. Przybliżony sposób obliczania płyt siatkowych

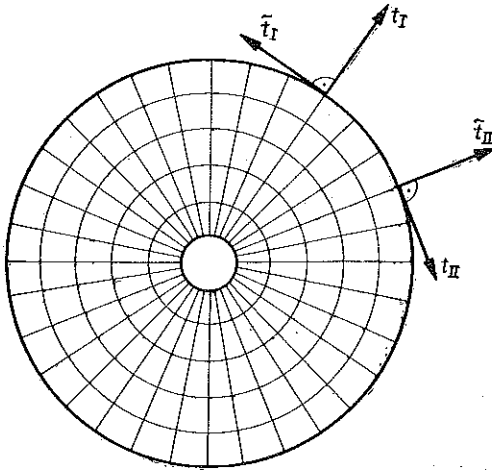
Przybliżony sposób obliczania płyt siatkowych, oparty na przybliżonej teorii efektu brzegowego podanej w punkcie poprzednim, polega na zastąpieniu układu równań (1.1) układem równań (2.1), (3.7) i (3.8). Rząd układu równań nie ulega tu zmianie (wynosi nadal sześć), co pozwala na ścisłe spełnienie wszystkich trzech warunków brzegowych (1.5) lub (1.6), lub też (1.7). Otrzymane rozwiązanie zagadnienia brzegowego stanowi dostateczne przybliżenie, jeżeli są spełnione założenia teorii efektu brzegowego, to jest gdy wpływ funkcji  $\gamma_\mu(x^1, x^2)$  na stan napięcia jest pomijalnie mały [por. (2.5) i (1.4)] z wyjątkiem obszaru przylegającego bezpośrednio do brzegu płyty. Występowanie efektu brzegowego jest związane z występowaniem małego parametru  $l$  w układzie równań (1.1); im wartość tego parametru jest mniejsza wobec wymiarów obszaru i długości «fali» obciążenia, tym przybliżony sposób obliczania płyt siatkowych przedstawiony powyżej jest bardziej dokładny. Poniżej przedstawimy przykład obliczenia płyty siatkowej ilustrujący wyłożoną teorię.

(<sup>2</sup>) Przy obliczaniu całki równania (3.7) funkcję  $\alpha(x^1, x^2)$  można również traktować jakby była niezależna od  $x^1$ .

## 5. Przykład

Rozpatrzmy perforowaną płytę kołową pod wpływem obciążenia liniowo zmiennego z następującymi warunkami brzegowymi:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} w &= 0 & \text{dla} & \varrho = \varrho_0, \quad \varrho = \varrho_1; \\ m^{(12)} &= 0 & \text{dla} & \varrho = \varrho_0, \quad \varrho = \varrho_1; \\ m^{(11)} &= 0 & \text{dla} & \varrho = \varrho_0, \quad \varrho = \varrho_1. \end{aligned}$$



Schemat statyczny takiej płyty oraz jej fragment przedstawia rys. 3. Otwory w płycie zostały obrane w ten sposób, aby był spełniony warunek

$$(5.2) \quad \frac{a_I}{l_I} = \frac{a_{II}}{l_{II}} = \text{const.}$$

Ze względu na przyjęty ortogonalny układ otworów w płycie mamy

$$l_I = \tilde{l}_{II}, \quad \tilde{l}_I = l_{II},$$

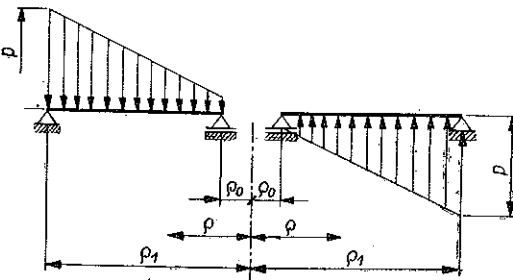
$$a_I = \tilde{a}_{II}, \quad a_{II} = \tilde{a}_I.$$

Zgodnie z warunkiem (5.2) odpowiednie stałe sprężyste  $E_I$ ,  $\nu_I$  i  $E_{II}$ ,  $\nu_{II}$  określone wzorem (1.3) dla kierunku promieniowego i obwodowego są sobie równe. W układzie biegunowym, w którym [2]

$$t_I^1 = 0, \quad t_I^2 = 0, \quad \tilde{t}_I^1 = 0, \quad \tilde{t}_I^2 = \frac{1}{\varrho},$$

$$t_{II}^1 = 0, \quad t_{II}^2 = \frac{1}{\varrho}, \quad \tilde{t}_{II}^1 = -1,$$

$$\tilde{t}_{II}^2 = 0,$$



Rys. 3

składowe tensorów sztywności sprężystej płyty  $C^{\alpha\pi\beta\varrho}$ ,  $D^{\alpha\beta\mu\nu}$  i  $A^{\beta\mu}$  (po wyliczeniu ze wzorów (1.2)) mają postaci następujące:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} C^{1111} &= S^I, & C^{1212} &= \frac{S^{II}}{\varrho^2}, & C^{2121} &= \frac{S^{II}}{\varrho^2}, \\ C^{2222} &= \frac{1}{\varrho^4} S^{II}, & C^{2112} &= -\frac{S^{II}}{\varrho^2}, & C^{1221} &= -\frac{S^{II}}{\varrho^2}, \\ D^{1111} &= S^{II}, & D^{1122} &= \frac{S^{II}}{\varrho^2}, & D^{1212} &= \frac{S^I}{\varrho^2}, \end{aligned}$$



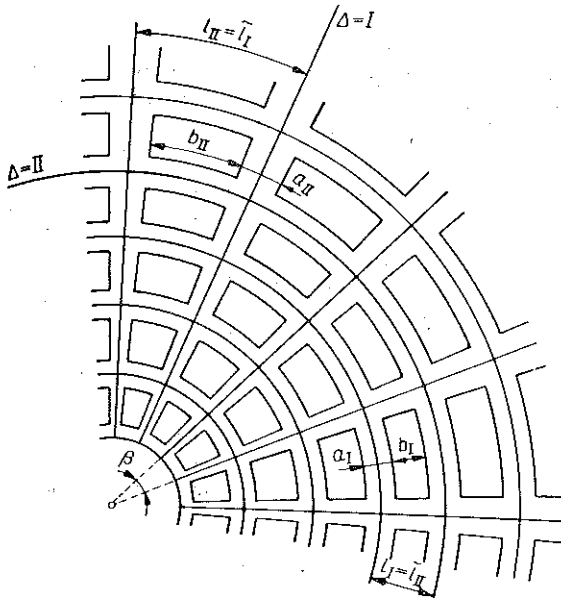
$$(5.3) \quad \begin{aligned} D^{2121} &= \frac{S^{II}}{\varrho^2}, & D^{2211} &= \frac{S^{III}}{\varrho z}, & D^{2222} &= \frac{S^{II}}{\varrho^4}, \\ [c. d.] & & & & & \\ A^{11} &= R^I = d = \text{const}, & A^{22} &= \frac{R^{II}}{\varrho^2} = \frac{b^2 S^I}{\varrho^4}, \end{aligned}$$

gdzie

$$d = \frac{Ea_1 S^3}{l_1 b_1^2} = \text{const}, \quad b^2 = \frac{Ea_1 l_1 S^3}{\beta^2 S^I (l_1 - a_1)^2} = \text{const}.$$

Pozostałe składowe tensorów sztywności sprężystej są równe zero. Ze wzorów (1.3) i (5.2) wynika

$$(5.4) \quad S^I = S^{II} = \text{const}, \quad S^{III} = S^{III} = \text{const}, \quad S^{II} = S^{IIII} = \text{const}.$$



Rys. 4

Podstawiając składowe tensorów sztywności sprężystej ze wzorów (5.3) do równania (2.1) i rozwijając to równanie w układzie biegunowym otrzymamy

$$(5.5) \quad \begin{aligned} S^{II} \frac{\partial^4 w}{\partial \varrho^4} + \frac{1}{\varrho^2} (2S^I + 2S^{III}) \frac{\partial^4 w}{\partial \varrho^2 \partial \theta^2} + \frac{S^{II}}{\varrho^3} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \\ + \frac{1}{\varrho^3} (-2S^I - 2S^{III}) \frac{\partial^3 w}{\partial \varrho \partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho^4} (2S^I + 2S^{III} + 2S^{II}) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \\ + \frac{S^{II}}{\varrho^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{2S^{II}}{\varrho} \frac{\partial^3 w}{\partial \varrho^3} - \frac{S^{II}}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} = f. \end{aligned}$$

Całkę ogólną równania (5.5) można przyjąć w postaci sumy

$$(5.6) \quad w = w_0 + w_1,$$

gdzie  $w_0$  oznacza całkę szczególną równania (5.5), a  $w_1$  całkę równania jednorodnego

$$(5.7) \quad S^{II} \frac{\partial^4 w_1}{\partial \varrho^4} + \frac{1}{\varrho^2} (2S^I + 2S^{II}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial \varrho^2 \partial \theta^2} + \frac{S^{II}}{\varrho^3} \frac{\partial w_1}{\partial \varrho} + \\ + \frac{1}{\varrho^3} (-2S^I - 2S^{II}) \frac{\partial^3 w_1}{\partial \varrho \partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho^4} (2S^I + 2S^{II} + 2S^{II}) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + \\ + \frac{S^{II}}{\varrho^4} \frac{\partial^4 w_1}{\partial \theta^4} + \frac{2S^{II}}{\varrho} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \varrho^3} - \frac{S^{II}}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varrho^2} = 0.$$

Ta ostatnia całka może być przedstawiona w postaci szeregu

$$(5.8) \quad w_1 = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} R'_n \sin n\theta,$$

gdzie  $R_0, R_1, \dots, R'_1, \dots$  oznaczają funkcje samej tylko współrzędnej  $\varrho$ . Podstawiając powyższy szereg do równania (5.7) otrzymujemy dla każdej z tych funkcji jedno zwyczajne równanie różniczkowe:

$$(5.9) \quad S^{II} \frac{d^4 R_0}{d\varrho^4} + \frac{2S^{II}}{\varrho} \frac{d^3 R_0}{d\varrho^3} - \frac{S^{II}}{\varrho^2} \frac{d^2 R_0}{d\varrho^2} + \frac{S^{II}}{\varrho^3} \frac{dR_0}{d\varrho} = 0, \\ S^{II} \frac{d^4 R_n}{d\varrho^4} + \frac{2S^{II}}{\varrho} \frac{d^3 R_n}{d\varrho^3} - \frac{n^2(2S^I + 2S^{II}) + S^{II}}{\varrho^2} \frac{d^2 R_n}{d\varrho^2} + \\ + \frac{S^{II} + 2n^2(S^I + S^{II})}{\varrho^3} \frac{dR_n}{d\varrho} + \frac{S^{II} n^4 - 2n^2(S^I + S^{II} + S^{II})}{\varrho^4} R_n = 0.$$

Identyczne równanie można napisać dla funkcji  $R'_n$ . Rozwiązanie  $R_0$ , które nie zależy od kąta  $\theta$  dotyczy zagadnienia osiowo-symetrycznego. Ze względu na przyjęty liniowo zmienny charakter obciążenia w naszych rozważaniach pozostanie tylko funkcja  $R_1$ . Równanie (5.9) jest równaniem Eulera, którego rozwiązanie dla  $n = 1$  możemy przedstawić w postaci

$$(5.10) \quad R_1 = C_1 \varrho + C_2 \varrho^{t_1} + C_3 \varrho^{t_2} + C_4 \varrho \ln \varrho,$$

gdzie

$$t_1 = 1 + \sqrt{2 \left( 1 + \frac{S^I + S^{II}}{S^{II}} \right)}, \quad t_2 = 1 - \sqrt{2 \left( 1 + \frac{S^I + S^{II}}{S^{II}} \right)}.$$

Znając funkcję  $R_1$  ogólne rozwiązanie równania (5.7) można przedstawić następująco:

$$(5.11) \quad w_1 = (C_1 \varrho + C_2 \varrho^{t_1} + C_3 \varrho^{t_2} + C_4 \varrho \ln \varrho) \cos \theta.$$

Gęstość obciążenia  $f$  w punkcie płyty o współrzędnych  $\varrho$  i  $\theta$  wynosi

$$(5.12) \quad f = \frac{p\varrho \cos \theta}{\varrho_1}.$$

Całkę szczególną równania (5.5) możemy w związku z tym przyjąć w postaci

$$(5.13) \quad w_0 = F \frac{p \varrho^5 \cos \theta}{\varrho_1}.$$

Po podstawieniu jej do równania (5.5) otrzymujemy

$$F = \frac{1}{224S^{\text{II}} - 32S^{\text{I}} - 32S^{\text{III}}},$$

stąd

$$(5.14) \quad w_0 = \frac{p \varrho^5 \cos \theta}{\varrho_1 (224S^{\text{II}} - 32S^{\text{I}} - 32S^{\text{III}})}.$$

Po podstawieniu (5.11) i (5.14) do (5.6) równanie powierzchni odkształconej płyty przybiera postać

$$(5.15) \quad w = (l \varrho^5 + C_1 \varrho + C_2 \varrho^{k_1} + C_3 \varrho^{k_2} + C_4 \varrho \ln \varrho) \cos \theta,$$

gdzie

$$l = \frac{p}{\varrho_1 (224S^{\text{II}} - 32S^{\text{I}} - 32S^{\text{III}})}.$$

W celu wyznaczenia napięć momentowych  $m_{(0)}^{\alpha\beta}$  odpowiadających powyższej funkcji ugięcia przedstawimy w postaci rozwiniętej związku fizyczne w układzie biegunowym:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} m^{11} &= \frac{S^{\text{I}}}{\varrho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \theta} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{S^{\text{I}}}{\varrho} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \gamma_2 \right), \\ m^{12} &= -\frac{S^{\text{II}}}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} - \frac{S^{\text{III}}}{\varrho^3} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \varrho \frac{\partial w}{\partial \varrho} \right) + \frac{S^{\text{III}}}{\varrho^3} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} + \varrho \gamma_1 \right) + \frac{S^{\text{II}}}{\varrho} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varrho}, \\ m^{21} &= \frac{S^{\text{II}}}{\varrho^3} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \varrho \frac{\partial w}{\partial \varrho} \right) + \frac{S^{\text{III}}}{\varrho} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} - \\ &\quad - \frac{S^{\text{II}}}{\varrho^3} \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} + \varrho \gamma_1 \right) - \frac{1}{\varrho} S^{\text{III}} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varrho}, \\ m^{22} &= -\frac{S^{\text{I}}}{\varrho^3} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \partial \theta} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{S^{\text{I}}}{\varrho^3} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta} - \frac{1}{\varrho} \gamma_2 \right), \\ p^1 &= d\gamma_1, \quad p^2 = b^2 S^{\text{I}} \frac{1}{\varrho^4} \gamma_2. \end{aligned}$$

Podstawiając (5.15) do (5.16) oraz zgodnie z przyjętą metodą przyjmując na razie  $\gamma = 0$  ( $\alpha = 1, 2$ ) otrzymamy następujące wzory na składowe kontrawariantne napięć momentowych:

$$\begin{aligned}
 m_{(0)}^{11} &= S^I \left[ -4l\varrho^3 + C_2(1-t_1)\varrho^{t_1-2} + C_3(1-t_2)\varrho^{t_2-2} - \frac{C_4}{\varrho} \right] \sin \theta, \\
 m_{(0)}^{12} &= \left[ 4l\varrho^2(5S^{II} - S^{III}) + C_2(1-t_1)(t_1 S^{II} + S^{III})\varrho^{t_1-3} + \right. \\
 &\quad \left. + C_3(1-t_2)(t_2 S^{II} + S^{III})\varrho^{t_2-3} - \frac{C_4}{\varrho^2}(S^{II} + S^{III}) \right] \cos \theta, \\
 m_{(0)}^{21} &= \left[ 20lS^{II}\varrho^2 + C_2(t_1-1)(S^{II} + S^{III}t_1)\varrho^{t_1-3} + \right. \\
 &\quad \left. + C_3(t_2-1)(S^{II} + S^{III}t_2)\varrho^{t_2-3} + \frac{C_4}{\varrho^2}(S^{II} + S^{III}) \right] \cos \theta, \\
 m_{(0)}^{22} &= S^I \left[ 4l\varrho + C_2(t_1-1)\varrho^{t_1-4} + C_3(t_2-1)\varrho^{t_2-4} + \frac{C_4}{\varrho^3} \right] \sin \theta.
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Składowe stanu napięcia we wzorach (5.17) zostały obliczone przy założeniu, że składowe wektora niezależnego obrotu  $\gamma_\alpha$  są równe zero. W rzeczywistości składowe  $\gamma_\alpha$  są różne od zera. W celu obliczenia tych składowych wykorzystamy teorię efektu brzegowego, która została omówiona w p. 3. Oddzielnie rozpatrzmy efekt brzegowy na brzegu wewnętrznym i zewnętrznym. Załóżmy najpierw, że występuje efekt brzegowy na brzegu wewnętrznym. Zgodnie z równaniem (3.8) składowa  $\gamma^2$  wektora niezależnego obrotu wynosi

$$\gamma^2 = L \sin \theta \exp \left( - \int_{\varrho_0}^{\varrho} \sqrt{\frac{A^{22}}{D^{1212}}} d\zeta \right),
 \tag{5.18}$$

w którym  $L$  jest dowolną stałą.

Podstawiając za  $A^{22}$  i  $D^{1212}$  odpowiednie wyrażenie zgodnie ze wzorem (5.3) po wycieszeniu powyższej całki otrzymamy

$$\gamma^2 = L_1 \frac{\sin \theta}{\varrho^b},
 \tag{5.19}$$

gdzie

$$L_1 = L\varrho_0^b = \text{const}.$$

W celu otrzymania składowej kowariantnej wektora niezależnego obrotu należy nasunąć tensor metryczny  $g_{\alpha\beta}$  na wyrażenie (5.19) i po wykonaniu kontrakcji otrzymamy

$$\gamma_2 = L_1 \frac{\sin \theta}{\varrho^{b-2}}.
 \tag{5.20}$$

Podstawiając (3.4) (przyjmując  $f=0$ ), (5.15) i (5.20) do wzoru (3.9) otrzymamy następujący wzór na  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \left[ L_1 \left( \frac{m}{\varrho^{b+3}} + \frac{m_1}{\varrho^{b+1}} \right) + m_2 l\varrho^2 + C_2 m_3 \varrho^{t_1-3} + \right. \\
 &\quad \left. + C_3 m_4 \varrho^{t_2-3} + C_4 m_5 \frac{1}{\varrho^2} \right] \cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 m &\equiv \frac{b^2 (S^I)^2 (b+2)}{d^2}, & m_1 &\equiv -\frac{S^{I\text{II}} b}{d}, & m_2 &\equiv -\frac{76S^{\text{II}}+16S^{I\text{II}}}{d}, \\
 m_3 &\equiv -\frac{1}{d} [S^{I\text{II}} t_1 (t_1 - 1) (t_1 - 2) + t_1 (t_1 - 1) (S^{\text{II}} + S^{I\text{II}}) + (S^I + S^{I\text{II}}) (1 - t_1)], \\
 m_4 &\equiv -\frac{1}{d} [S^{I\text{II}} t_2 (t_2 - 1) (t_2 - 2) + t_2 (t_2 - 1) (S^{\text{II}} + S^{I\text{II}}) + (S^I + S^{I\text{II}}) (1 - t_2)], \\
 m_5 &\equiv \frac{S^I}{d}.
 \end{aligned}$$

Podstawiając (5.15), (5.20) i (5.21) do (5.16) otrzymamy następujące funkcje na składowe  $m_{(1)}^{\alpha\beta}$  i  $p_{(1)}^\alpha$  stanu napięcia związanego z efektem brzegowym:

(5.22)

$$\begin{aligned}
 m_{(1)}^{11} &= m_{(0)}^{11} + \frac{S^I L_1 (b - 1)}{e^b} \sin \theta, \\
 m_{12} &= m_{(0)}^{12} + \left\{ L_1 \left[ \frac{S^{I\text{II}}}{e^{b+1}} + \frac{S^{I\text{II}} m - S^{\text{II}} m (b+3)}{e^{b+5}} + \frac{S^{I\text{II}} m_1 - S^{\text{II}} m_1 (b+1)}{e^{b+3}} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + m_2 l (S^{I\text{II}} + 2S^I) + C_2 [m_3 S^{I\text{II}} + S^{I\text{II}} m_3 (t_1 - 3)] e^{t_1-5} + \right. \\
 &\quad \left. + C_3 [m_4 S^{I\text{II}} + S^{I\text{II}} m_4 (t_2 - 3)] e^{t_2-5} + C_4 m_5 (S^{I\text{II}} - 2S^{\text{II}}) \frac{1}{e^4} \right\} \cos \theta, \\
 m_{21} &= m_{(0)}^{21} + \left\{ L_1 \left[ -\frac{S^{\text{II}}}{e^{b+1}} + \frac{m S^{I\text{II}} (b+3) - m S^{\text{II}}}{e^{b+5}} + \frac{m_1 (b+1) S^{I\text{II}} - m_1 S^{\text{II}}}{e^{b+3}} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - m_2 l (S^{\text{II}} + 2S^{I\text{II}}) - C_2 [m_3 S^{I\text{II}} (t_1 - 3) + m_3 S^{\text{II}}] e^{t_1-5} - \right. \\
 &\quad \left. - C_3 [m_4 S^{I\text{II}} (t_2 - 3) + m_4 S^{\text{II}}] e^{t_2-5} + C_4 m_5 (2S^{I\text{II}} - S^{\text{II}}) \frac{1}{e^4} \right\} \cos \theta, \\
 m_{22} &= m_{(0)}^{22} - S^I \left[ L_1 \left( \frac{1}{e^{b+2}} + \frac{m}{e^{b+6}} + \frac{m_1}{e^{b+4}} \right) + m_2 l \frac{1}{e} + \right. \\
 &\quad \left. + C_2 m_3 e^{t_1-6} + C_3 m_4 e^{t_2-6} + C_4 m_5 \frac{1}{e^5} \right] \sin \theta, \\
 p_{(1)}^1 &= d \left[ L_1 \left( \frac{m}{e^{b+3}} + \frac{m_1}{e^{b+1}} \right) + m_2 l e^2 + C_2 m_3 e^{t_1-3} + C_3 m_4 e^{t_2-3} + C_4 m_5 \frac{1}{e^2} \right] \cos \theta, \\
 p_{(1)}^2 &= b^2 S^I L_1 \frac{\sin \theta}{e^{b+2}}.
 \end{aligned}$$

Rozpatrzmy przypadek wystąpienia efektu brzegowego na brzegu zewnętrznym. Na funkcję  $\gamma^2$  zgodnie ze wzorem (3.8) otrzymamy następujące wyrażenie:

$$(5.23) \quad \gamma^2 = \bar{L} \sin \theta \int_{e_1}^e \sqrt{\frac{A^{22}}{D^{12\ 12}}} d\xi.$$

Podstawiając za  $A^{22}$  i  $D^{12,12}$  zgodnie ze wzorem (5.3) i całkując wyrażenie (5.23) otrzymujemy

$$(5.24) \quad \gamma^2 = \bar{L}_1 \varrho^b \sin \theta,$$

gdzie

$$\bar{L}_1 = \bar{L} \varrho_1^{-b} = \text{const.}$$

Składowa kowariantna wektora niezależnego obrotu dla rozważanego przypadku wynosi

$$(5.25) \quad \gamma_2 = \bar{L}_1 \varrho^{b+2} \sin \theta.$$

W celu otrzymania składowej  $\gamma_1$  należy podstawić (3.4) (przyjmując  $f=0$ ), (5.15) i (5.25) do wzoru (3.9) i po wykonaniu prostych przekształceń otrzymamy

$$(5.26) \quad \gamma_1 = \left[ \bar{L}_1 (\bar{m} \varrho^{b-3} + \bar{m}_1 \varrho^{b-1}) + m_2 l \varrho^2 + C_2 m_3 p^{t_1-3} + \right. \\ \left. + C_3 m_4 \varrho^{t_2-3} + C_4 m_5 \frac{1}{\varrho^2} \right] \cos \theta,$$

przy czym

$$\bar{m} \equiv - \frac{(S^{\text{I}})^2 b^2 (b-2)}{d^2}, \quad \bar{m}_1 \equiv \frac{S^{\text{II}} b}{d} = -m_1.$$

Po podstawieniu (5.15), (5.25) i (5.26) do wzorów (5.16) otrzymamy następujące funkcje na kontrawariantne składowe napięcia  $m_{(2)}^{\alpha\beta}$  i  $p_{(2)}^\alpha$  powstałe wskutek istnienia efektu na brzegu zewnętrznym:

$$(5.27) \quad m_{(2)}^{11} = m_{(0)}^{11} - S^{\text{I}} \bar{L}_1 (b+1) \varrho^b \sin \theta, \\ m_{(2)}^{12} = m_{(0)}^{12} + \left\{ \bar{L}_1 [S^{\text{I II}} \varrho^{b-1} + (S^{\text{I II}} \bar{m} + S^{\text{II}} \bar{m} (b-3)) \varrho^{b-5} + \right. \\ \left. + (S^{\text{I II}} \bar{m}_1 + S^{\text{II}} \bar{m}_1 (b-1)) \varrho^{b-3} \right] + m_2 l (S^{\text{I II}} + 2S^{\text{II}}) + \\ + C_2 m_3 (S^{\text{I II}} + S^{\text{II}} (t_1 - 3)) \varrho^{t_1-5} + C_3 m_4 (S^{\text{I II}} + S^{\text{II}} (t_2 - 3)) \varrho^{t_2-5} + \\ \left. + C_4 m_5 (S^{\text{I II}} - 2S^{\text{II}}) \frac{1}{\varrho^4} \right\} \cos \theta, \\ m_{(2)}^{21} = m_{(0)}^{21} - \left\{ \bar{L}_1 [S^{\text{II}} \varrho^{b-1} + (S^{\text{II}} \bar{m} + \bar{m} S^{\text{I II}} (b-3)) \varrho^{b-5} + \right. \\ \left. + (S^{\text{II}} \bar{m}_1 + S^{\text{I II}} \bar{m}_1 (b-1)) \varrho^{b-3} \right] + m_2 l (S^{\text{II}} + 2S^{\text{I II}}) + \\ + C_2 m_3 (S^{\text{II}} + S^{\text{I II}} (t_1 - 3)) \varrho^{t_1-5} + C_3 m_4 (S^{\text{II}} + S^{\text{I II}} (t_2 - 3)) \varrho^{t_2-5} + \\ \left. + C_4 m_5 (S^{\text{II}} - 2S^{\text{I II}}) \frac{1}{\varrho^4} \right\} \cos \theta, \\ m_{(2)}^{22} = m_{(0)}^{22} - S^{\text{I}} \left[ \bar{L}_1 (\bar{m} \varrho^{b-6} + \bar{m}_1 \varrho^{b-4} + \varrho^{b-2}) + m_2 l \frac{1}{\varrho} + C_2 m_3 \varrho^{t_1-6} + \right. \\ \left. + C_3 m_4 \varrho^{t_2-6} + C_4 m_5 \frac{1}{\varrho^5} \right] \sin \theta,$$

$$\begin{aligned}
 p_{(2)}^1 &= d \left[ \bar{L}_1 (\bar{m} \varrho^{b-3} + \bar{m}_1 \varrho^{b-1}) + m_2 l \varrho^2 + C_2 m_3 \varrho^{t_1-3} + C_3 m_4 \varrho^{t_2-3} + \right. \\
 (5.27) \quad & \left. + C_4 m_5 \frac{1}{\varrho^2} \right] \cos \theta, \\
 p_{(2)}^2 &= b^2 S^I \bar{L}_1 \varrho^{b-2} \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Podstawiając do prawych stron (5.22) i (5.23) wzory (5.17), a następnie dodając je, otrzymamy ostateczne wzory na kontrawariantne składowe stanu napięcia  $m^{\alpha\beta}$  i  $p^\alpha$  w rozpatrywanej płycie:

$$\begin{aligned}
 m^{11} &= S^I \left[ -8l\varrho^3 + 2(1-t_1)C_2\varrho^{t_1-2} + 2(1-t_2)C_3\varrho^{t_2-2} - \frac{2C_4}{\varrho} + \right. \\
 & \quad \left. + L_1(b-1)\varrho^{-b} - \bar{L}_1(b+1)\varrho^b \right] \sin \theta, \\
 m^{12} &= \left[ e_1 + e_2\varrho^2 + C_2(e_3\varrho^{t_1-3} + e_4\varrho^{t_1-5}) + C_3(e\varrho^{t_2-3} + e_6\varrho^{t_2-5}) + \right. \\
 & \quad \left. + C_4(e_7\varrho^{-2} + e_8\varrho^{-4}) + L_1 \left( \frac{S^{II}}{\varrho^{b+1}} + \frac{e_9}{\varrho^{b+5}} + \frac{e_{10}}{\varrho^{b+3}} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \bar{L}_1(S^{III}\varrho^{b-1} + e_{11}\varrho^{b-5} + e_{12}\varrho^{b-3}) \right] \cos \theta, \\
 m^{21} &= \left[ \bar{e}_1 + \bar{e}_2\varrho^2 + C_2(\bar{e}_3\varrho^{t_1-3} + \bar{e}_4\varrho^{t_1-5}) + C_3(\bar{e}_5\varrho^{t_2-3} + \bar{e}_6\varrho^{t_2-5}) + \right. \\
 (5.28) \quad & \quad \left. + C_4(\bar{e}_7\varrho^{-2} + \bar{e}_8\varrho^{-4}) + L_1 \left( -\frac{S^{II}}{\varrho^{b+1}} + \frac{\bar{e}_9}{\varrho^{b+5}} - \frac{\bar{e}_{10}}{\varrho^{b+3}} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \bar{L}_1(-S^{II}\varrho^{b-1} + \bar{e}_{11}\varrho^{b-5} + \bar{e}_{12}\varrho^{b-3}) \right] \cos \theta, \\
 m^{22} &= S^I \left\{ 8l\varrho - 2m_2 l\varrho^{-1} + C_2 [2(t_1-1)\varrho^{t_1-4} - 2m_3\varrho^{t_1-6}] + \right. \\
 & \quad \left. + C_3 [2(t_2-1)\varrho^{t_2-4} - 2m_4\varrho^{t_2-6}] + C_4(2\varrho^{-3} - 2m_5\varrho^{-5}) - \right. \\
 & \quad \left. - L_1 \left( \frac{1}{\varrho^{b+2}} + \frac{m}{\varrho^{b+6}} + \frac{m_1}{\varrho^{b+4}} \right) - \bar{L}_1(\bar{m}\varrho^{b-6} + \bar{m}_1\varrho^{b-4} + \varrho^{b-2}) \right\} \sin \theta, \\
 p^1 &= d \left[ 2m_2 l\varrho^2 + 2m_3 C_2\varrho^{t_1-3} + 2m_4 C_3\varrho^{t_2-3} + 2m_5 C_4\varrho^{-2} + \right. \\
 & \quad \left. + L_1 \left( \frac{m}{\varrho^{b+3}} + \frac{m_1}{\varrho^{b-1}} \right) + \bar{L}_1(\bar{m}\varrho^{b-3} + \bar{m}_1\varrho^{b-1}) \right] \cos \theta, \\
 \varrho^2 &= b^2 S^I \left( L_1 \frac{1}{\varrho^{b+2}} + \bar{L}_1 \varrho^{b-2} \right) \sin \theta,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 e_1 &\equiv m_2 l (2S^{II} + 4S^{III}), & \bar{e}_1 &\equiv -2m_2 l (S^{II} + 2S^{III}), \\
 e_2 &\equiv 8l (5S^{II} - S^{III}), & \bar{e}_2 &\equiv 40l S^{III}, \\
 e_3 &\equiv 2(1-t_1)(t_1 S^{II} + S^{III}), & \bar{e}_3 &\equiv 2(t_1-1)(S^{II} + t_1 S^{III}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_4 &\equiv 2m_3 S^{\text{I}\text{I}} + 2S^{\text{I}\text{I}} m_3 (t_1 - 3), & \bar{e}_4 &\equiv -2m_3 S^{\text{I}\text{I}} - 2m_3 S^{\text{I}\text{I}} (t_1 - 3), \\
 e_5 &\equiv 2(1 - t_2)(t_2 S^{\text{I}\text{I}} + S^{\text{I}\text{I}}), & \bar{e}_5 &\equiv 2(t_2 - 1)(S^{\text{I}\text{I}} + t_2 S^{\text{I}\text{I}}), \\
 e_6 &\equiv 2m_4 S^{\text{I}\text{I}} + 2S^{\text{I}\text{I}} m_4 (t_2 - 3), & \bar{e}_6 &\equiv -2m_4 S^{\text{I}\text{I}} (t_2 - 3) - 2m_4 S^{\text{I}\text{I}}, \\
 e_7 &\equiv -2(S^{\text{I}\text{I}} - 2S^{\text{I}\text{I}}), & \bar{e}_7 &\equiv -e_7, \\
 e_8 &\equiv 2m_5 (S^{\text{I}\text{I}} - 2S^{\text{I}\text{I}}), & \bar{e}_8 &\equiv 2m_5 (2S^{\text{I}\text{I}} - S^{\text{I}\text{I}}), \\
 e_9 &\equiv S^{\text{I}\text{I}} m - S^{\text{I}\text{I}} m (b+3), & \bar{e}_9 &\equiv m S^{\text{I}\text{I}} (b+3) - m S^{\text{I}\text{I}}, \\
 e_{10} &\equiv S^{\text{I}\text{I}} m_1 - S^{\text{I}\text{I}} m_1 (b+1), & \bar{e}_{10} &\equiv m_1 (b+1) S^{\text{I}\text{I}} - m_1 S^{\text{I}\text{I}}, \\
 e_{11} &\equiv S^{\text{I}\text{I}} \bar{m} + S^{\text{I}\text{I}} \bar{m} (b-3), & \bar{e}_{11} &\equiv -S^{\text{I}\text{I}} \bar{m} - \bar{m} S^{\text{I}\text{I}} (b-3), \\
 e_{12} &\equiv S^{\text{I}\text{I}} \bar{m}_1 + S^{\text{I}\text{I}} \bar{m}_1 (b-1), & \bar{e}_{12} &\equiv -S^{\text{I}\text{I}} \bar{m}_1 - S^{\text{I}\text{I}} (b-1).
 \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych ogólnych wyrażen dla  $m^{\text{ab}}$  i  $w$ , można wyznaczyć stałe  $C_1, C_2, C_3, C_4, L_1$  i  $\bar{L}_1$  występujące we wzorach (5.15) i (5.28) z warunków brzegowych (5.1).

#### Literatura cytowana w tekście

1. CZ. WOŹNIAK, *Bending and stability problem of plates with lattice structure*, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966).
2. S. KONIECZNY, *O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych*, Arch. Inż. Łąd., 1, 13 (1967).
3. S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Zur Theorie schiefwinkliger Tragerroste*, Ing. Arch., Band 25, 1957.
4. K. WILMAŃSKI, *O pewnym włóknistym modelu gęstego rusztu*, Rozpr. Inżyn., 2, 15 (1967).
5. P. KLEMM, *Przybliżone rozwiązania jednorodnych siatek rusztowych*, Arch. Inż. Łąd., 2, 13 (1967).
6. CZ. WOŹNIAK, *Edge effect in lattice-type discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 1, 15 (1967)..
7. F. PIETRAS, J. WYRWIŃSKI, *Naprężenia cieplne w tarczach o strukturze siatkowej*, Arch. Mech. Stos., w druku.
8. K.G. FRIEDRICHS, *Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics*, Bull. American Math. Soc., 61 (1955).
9. K. WILMAŃSKI, *Metody asymptotyczne w teorii tarczy z mikrostrukturą — zagadnienie płaskie*, Rozpr. Inżyn., 2, 15 (1967).

#### Резюме

#### РАСЧЕТ СЕТЧАТЫХ ПЛАСТИНОК НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

В уравнениях континуальной теории пластинок сетчатой структуры [1] существует малый параметр, который в системе уравнений в перемещениях появляется при дифференциальном операторе высшего порядка. Это указывает возможность асимптотического подхода к решению краевых задач. В работе предлагается простейший вариант такого подхода, в котором точная система дифференциальных уравнений заменяется системой, состоящей из уравнения четвертого порядка и некоторого алгебраического уравнения. Порядок системы уравнений не подвергается тогда изменению, что дает возможность, точно удовлетворить всем трем крайвым условиям. В работе дается, также, пример расчета сетчатой пластинки, иллюстрирующего приведенную теорию.



## Summary

COMPUTATION OF LATTICE-TYPE PLATES ON THE BASIS  
OF THE THEORY OF THE EDGE EFFECT

In the equations of the continual theory of lattice-type plates [1] a small parameter is involved. In the displacements equations the differential operator of a higher order appears. This shows the possibility of an asymptotic treatment of boundary-value problems. This paper discusses the simplest variant of such an approach, in which the accurate set of differential equations is replaced by a system composed of a fourth order equation and a certain algebraic equation. Then, the order of the set of equations remains unchanged, which enables accurate satisfaction of all the three boundary conditions. The paper contains also a computation example of a lattice-type plate, illustrating the theory presented.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
I UNIWERSYTET WARSZAWSKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 grudnia 1966 r.*