

PEWNE PROBLEMY TEORII PŁYT Z ŻEBRAMI JEDNOSTRONNYMI

RYSZARD GANOWICZ, JERZY GOŁAŚ (POZNAŃ)

1. Wstęp

Praca niniejsza poświęcona jest płytom, dla których przyjęto założenia podane przez PFLÜGERA [1]. Według teorii PFLÜGERA przyjmuje się, że płyta górna spełnia wszystkie założenia teorii płyt cienkich, natomiast żebra bez sztywności na skręcanie, o stałym przekroju poprzecznym, są rozmieszczone w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach. Przyjmuje się poza tym, że rozstaw żeber jest na tyle mały, iż można posłużyć się modelem kontinuum.

W pracy podamy w oparciu o pojęcie rachunku wariacyjnego wyprowadzenie podstawowych równań zagadnienia. Ta metoda zostanie wykorzystana do sformułowania jednorodnych warunków brzegowych zagadnienia, a ponadto pozwoli na wyprowadzenie twierdzenia o wzajemności. Twierdzenie to ma szerokie zastosowanie w teorii sprężystości i w teorii płyt. Pozwala ono na podanie na podstawie rozwiązania osobliwego rozwiązań wielu zagadnień brzegowych, a także przydatne jest do formułowania problemów z nieciągłymi warunkami brzegowymi.

W dalszym ciągu pracy podane zostaną rozwiązania osobliwe płyt nieskończonych i półnieskończonych. Rozwiązania te razem z twierdzeniem o wzajemności posłużą nam do skonstruowania rozwiązań pewnych problemów brzegowych teorii omawianych płyt.

W pracy niniejszej oprzemy się na oznaczeniach i związkach podanych w pracach jednego z autorów [2 i 3] dotyczących omawianych płyt.

2. Podstawowe równania

W omawianym problemie jako niewiadome przyjmujemy przemieszczenia u , v , w płaszczyzny środkowej płyty górnej [2] (rys. 1).

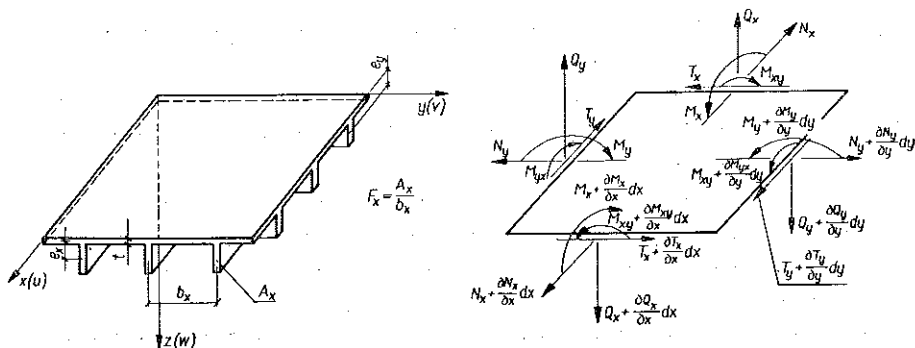
Wielkości statyczne (rys. 1), odniesione do płaszczyzny środkowej płyty górnej, związane są z przemieszczeniami u , v , w następująco [2]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} N_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(t_x \frac{\partial u}{\partial x} + \nu t_y \frac{\partial v}{\partial y} - \bar{S}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ N_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(t_y \frac{\partial v}{\partial y} + \nu t_x \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{S}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_x &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = T_y, \\
 M_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(-\bar{I}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu I \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \bar{S}_x \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\
 M_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(-\bar{I}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{S}_y \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\
 M_{xy} &= -\frac{EI}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -M_{yx}, \\
 Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x},
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

gdzie E oznacza stałą materiałową, t grubość płyty górnej oraz gdzie

$$\begin{aligned}
 t_x &= t + (1 - \nu^2) F_x, & t_y &= t + (1 - \nu^2) F_y, \\
 \bar{S}_x &= (1 - \nu^2) S_x, & \bar{S}_y &= (1 - \nu^2) S_y, & \bar{I}_x &= I + (1 - \nu^2) I_x, \\
 \bar{I}_y &= I + (1 - \nu^2) I_y, & I &= \frac{t^3}{12}.
 \end{aligned}$$



Rys. 1

Symbole F_x , F_y oznaczają sprowadzone pola powierzchni przekrojów żeber, S_x , S_y momenty statyczne powierzchni przekrojów żeber oraz I_x , I_y momenty bezwładności powierzchni przekrojów żeber względem osi przechodzących przez powierzchnię środkową płyty.

Wprowadźmy do dalszych rozważań wyrażenie na energię sprężystą zgromadzoną w elemencie płyty:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad dV &= \frac{1}{2} \left[-M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + T_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu zależności (2.1) otrzymamy wyrażenie na całkowitą energię płyty uzależnioną od przemieszczeń u, v, w :

$$(2.3) \quad V = \int_B \int \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\bar{I}_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \bar{I}_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\bar{S}_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\bar{S}_y \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + t_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + t_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu t \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + (1-\nu) t \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} t \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy.$$

Obliczmy teraz pierwszą wariację całkowitej energii sprężystej płyty:

$$(2.4) \quad \delta V = \int_B \int \frac{E}{1-\nu^2} \left[\bar{I}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \nu I \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \bar{I}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) I \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \bar{S}_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \bar{S}_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + t_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \right. \\ \left. + t_y \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \nu t \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} t \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right] dx dy.$$

Zastosujmy do wyrażenia powyższego przekształcenie Greena. Przykładowo wykonamy to przekształcenie do całki

$$(2.5) \quad \int_B \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy = \int_B \int \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta w dx dy + \int_i \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2(n, x) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\ + \int_i \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) \cos(n, y) \right] \delta w ds - \int_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos(n, x) \delta w ds.$$

Postępując podobnie z pozostałymi składnikami wzoru (2.4), otrzymamy

$$(2.6) \quad \delta V = \frac{E}{1-\nu^2} \int_B \int \left[-\bar{S}_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \bar{S}_y \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \left(\bar{I}_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2I \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{I}_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w \right] \delta w dx dy - \frac{E}{1-\nu^2} \int_B \int \left[\left(t_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \bar{S}_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big] \delta u \, dx \, dy - \frac{E}{1-\nu^2} \int_B \int \left[\frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \quad \left. + \left(t_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v - \bar{S}_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \delta v \, dx \, dy - \\
& - \frac{E}{1-\nu^2} \int_i \left[\left(-\bar{I}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu I \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \bar{S}_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos^2(n, x) + \left(-\bar{I}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
& - \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{S}_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cos^2(n, y) - 2(1-\nu) I \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos(n, x) \cos(n, y) \Big] \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, ds + \\
& \quad + \frac{E}{1-\nu^2} \int_i \left\{ \left[-\bar{I}_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \nu I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \bar{S}_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \right. \right. \\
& - (1-\nu) I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Big] \cos(n, x) + \left[-\bar{I}_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \nu I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \bar{S}_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \right. \\
& - (1-\nu) I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Big] \cos(n, y) + \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(-\bar{I}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{S}_y \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \right. \\
& + \bar{I}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu I \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \bar{S}_x \frac{\partial u}{\partial x} \Big) \cos(n, x) \cos(n, y) - (1-\nu) I \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \times \\
& \times (\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)) \Big] \Big\} \delta w \, ds + \frac{E}{1-\nu^2} \int_i \left[\left(t_x \frac{\partial u}{\partial x} + \nu t \frac{\partial v}{\partial y} - \right. \right. \\
& - \bar{S}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big) \cos^2(n, x) + \left(t_y \frac{\partial v}{\partial y} + \nu t \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{S}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2(n, y) + \\
& \quad \left. + (1-\nu) t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n, x) \cos(n, y) \right] \delta u_n \, ds + \\
& + \frac{E}{1-\nu^2} \int_i \left[\left(t_y \frac{\partial v}{\partial y} + \nu t \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{S}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - t_x \frac{\partial u}{\partial x} - \nu t \frac{\partial v}{\partial y} + \bar{S}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \times \right. \\
& \times \cos(n, x) \cos(n, y) + \frac{1-\nu}{2} t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)) \Big] \delta u_t \, ds,
\end{aligned}$$

gdzie

$$u_n = u \cos(n, x) + v \cos(n, y),$$

$$u_t = -u \cos(n, y) + v \cos(n, x).$$

Korzystając z formuł (2.1) oraz biorąc pod uwagę, że wielkości statyczne na brzegu C możemy przedstawić następująco:

$$M_n = M_x \cos^2(n, x) + M_y \cos^2(n, y) + 2M_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y),$$

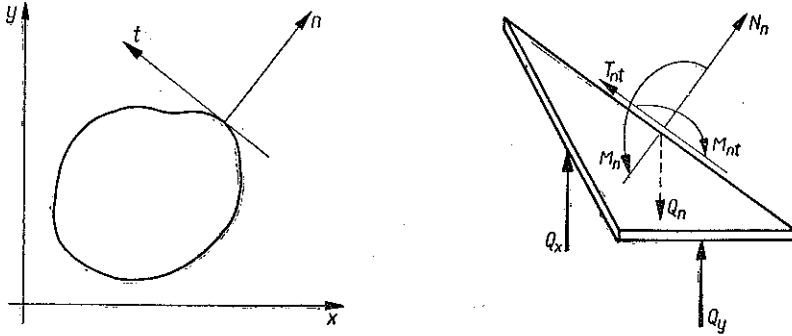
$$M_{nt} = (M_y - M_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + M_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)],$$

$$N_n = N_x \cos^2(n, x) + N_y \cos^2(n, y) + 2T_x \cos(n, x) \cos(n, y),$$

$$T_{nt} = (N_y - N_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + T_x [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)],$$

$$\bar{Q}_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t},$$

$$Q_n = Q_x \cos(n, x) + Q_y \cos(n, y),$$



Rys. 2

otrzymamy na pierwszą wariację energii sprężystej wyrażenie

$$(2.7) \quad \delta V = \frac{E}{1-\nu^2} \iint_B \left[-\bar{S}_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \bar{S}_y \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \left(\bar{I}_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2I \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{I}_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w \right] \delta w \, dx \, dy - \frac{E}{1-\nu^2} \iint_B \left[\left(t_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \bar{S}_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] \delta u \, dx \, dy - \frac{E}{1-\nu^2} \iint_B \left[\frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(t_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v - \bar{S}_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \delta v \, dx \, dy + \\ + \int_i \left(-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \bar{Q}_n \delta w + N_n \delta u_n + T_{nt} \delta u_t \right) ds.$$

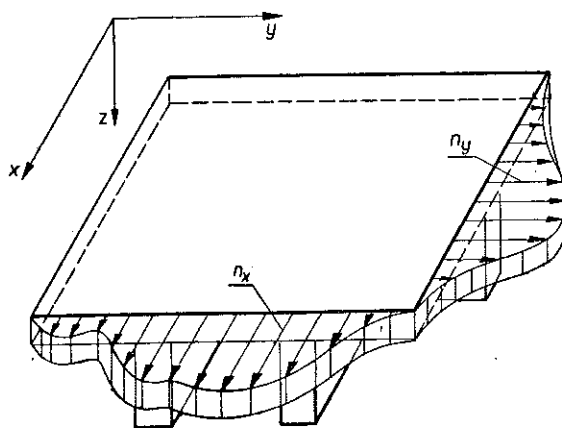
Założymy do dalszych rozważań, że płyta rozpatrywana jest poddana działaniu obciążenia normalnego $q(x, y)$, prostopadłe do jej powierzchni oraz działaniu obciążeń tarczowych w płaszczyźnie płyty górnej $n_x(x, y)$ i $n_y(x, y)$. Przyjmijmy, że te ostatnie są rozłożone równomiernie na grubości płyty górnej (rys. 3) i działają wewnątrz obszaru płyty rozpatrywanej (rys. 2).

Na założonych poprzednio wariacjach przemieszczeń δu , δv , δw obciążenia $q(x, y)$, $n_x(x, y)$, $n_y(x, y)$ wykonują pracę, którą przy liniowym ujęciu problemu przedstawimy następująco:

$$(2.8) \quad \delta L = \iint_B [q(x, y) \delta w + n_x(x, y) \delta u + n_y(x, y) \delta v] \, dx \, dy.$$

Jak wiadomo, w położeniu równowagi musi być spełniony warunek

$$(2.9) \quad \delta U = \delta V - \delta L = 0.$$



Rys. 3

Z warunku powyższego otrzymamy w oparciu o wzory (2.7) i (2.8) następujące związki:

(2.10)

$$\begin{aligned} \left(t_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \bar{S}_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -n_x(x, y) \frac{1-\nu^2}{E}, \\ \frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(t_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v - \bar{S}_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -n_y(x, y) \frac{1-\nu^2}{E}, \\ -\bar{S}_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \bar{S}_y \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \left(\bar{I}_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\bar{I} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{I}_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w &= q(x, y) \frac{1-\nu^2}{E}, \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \int \left(-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \bar{Q}_n \delta w + N_n \delta u_n + T_{nt} \delta u_t \right) ds = 0.$$

Zależności (2.10) przedstawiają układ równań zagadnienia, a związek (2.11) służy do wyznaczenia naturalnych warunków granicznych. Z tych ostatnich otrzymamy 16 jednorodnych warunków brzegowych omawianych płyt.

Podamy przykłady:

1. $M_n = 0, \quad \bar{Q}_n = 0, \quad N_n = 0, \quad T_{nt} = 0,$
2. $M_n = 0, \quad w = 0, \quad N_n = 0, \quad T_{nt} = 0,$
3. $M_n = 0, \quad w = 0, \quad u_n = 0, \quad T_{nt} = 0,$
4. $M_n = 0, \quad w = 0, \quad u_n = 0, \quad u_t = 0,$
5. $\frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \bar{Q}_n = 0, \quad N_n = 0, \quad T_{nt} = 0,$

$$6. \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad w = 0, \quad N_n = 0, \quad T_{nt} = 0,$$

$$7. \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad w = 0, \quad u_n = 0, \quad T_{nt} = 0,$$

$$8. \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad w = 0, \quad u_n = 0, \quad u_t = 0,$$

itd.

Zauważmy, że wobec tego, iż wyprowadzając powyższe zależności korzystaliśmy z przekształcenia Greena, związki te są spełnione dla funkcji w ciągłych wraz z pochodnymi do czwartego rzędu w obszarze B i ciągłych wraz z pochodnymi do trzeciego rzędu na brzegu C oraz dla funkcji u, v ciągłych wraz z pochodnymi do trzeciego rzędu w obszarze B i ciągłych wraz z pochodnymi do drugiego rzędu na brzegu C .

Układ równań (2.10) można sprowadzić do trzech równań na trzy funkcje przemieszczeń. Należy tu posłużyć się postępowaniem znanym w literaturze (np. [4]). Otrzymamy w tym przypadku

$$(2.12) \quad \frac{\partial^8 F_i}{\partial y^8} + a \frac{\partial^8 F_i}{\partial y^6 \partial x^2} + b \frac{\partial^8 F_i}{\partial y^4 \partial x^4} + c \frac{\partial^8 F_i}{\partial y^2 \partial x^6} + d \frac{\partial^8 F_i}{\partial x^8} = \\ = p_i(x, y) \frac{2(1+\nu)}{Et(\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(2.13) \quad u = \begin{vmatrix} L_{22} & L_{23} \\ L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} F_1 - \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} \\ L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} F_2 + \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} \\ L_{22} & L_{23} \end{vmatrix} F_3, \\ v = - \begin{vmatrix} L_{21} & L_{23} \\ L_{31} & L_{33} \end{vmatrix} F_1 + \begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} \\ L_{31} & L_{33} \end{vmatrix} F_2 - \begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} \\ L_{21} & L_{23} \end{vmatrix} F_3, \\ w = \begin{vmatrix} L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \end{vmatrix} F_1 - \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{31} & L_{32} \end{vmatrix} F_2 + \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} F_3,$$

gdzie

$$p_1 = -n_x(x, y), \quad p_2 = -n_y(x, y), \quad p_3 = q(x, y),$$

$$a = \frac{2}{(1-\nu)t} \frac{(t_x t_y - \nu t^2) \bar{I}_y + (1-\nu) t t_y I - t_x \bar{S}_y^2}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2},$$

$$b = \frac{2}{(1-\nu)t} \frac{2(t_x t_y - \nu t^2) I + (1-\nu) \frac{t t_x}{2} \bar{I}_y + (1-\nu) \frac{t t_y}{2} \bar{I}_x + (1+\nu) t \bar{S}_x \bar{S}_y}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2},$$

$$c = \frac{2}{(1-\nu)t} \frac{(t_x t_y - \nu t^2) \bar{I}_x + (1-\nu) t t_x I - t_y \bar{S}_x^2}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2},$$

$$d = \frac{t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}.$$

Przez $L_{ik} = L_{ki}$ oznaczono odpowiednie operatory różniczkowe układu równań (2.10), np.

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad \text{itd.}$$

3. Twierdzenie o wzajemności

Wyprowadzenie tego twierdzenia podamy w oparciu o zależności otrzymane w poprzednim punkcie.

Wprowadźmy do rozważań pewien funkcjonal zależny od dwóch układów funkcji, mianowicie od układu funkcji u_1, v_1, w_1 i od układu funkcji u_2, v_2, w_2 . Utworzymy ten funkcjonal z wyrażenia na pierwszą wariację energii sprężystej (2.4) w ten sposób, że na miejsce funkcji u, v, w wstawimy funkcje u_1, v_1, w_1 a na miejsce wariacji $\delta u, \delta v, \delta w$ wstawimy funkcje układu drugiego u_2, v_2, w_2 . Otrzymamy następujący funkcjonal:

$$\begin{aligned} (3.1) \quad e \{u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2\} = & \iint_B \frac{E}{1-\nu^2} \left[\bar{I}_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \right. \\ & + \nu I \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) + \bar{I}_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \\ & + 2(1-\nu) I \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} - \bar{S}_x \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) - \\ & - \bar{S}_y \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) + t_x \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} + t_y \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \\ & + \nu t \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \\ & \left. + \frac{1-\nu}{2} t \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Łatwo zauważymy, że funkcjonal ten nie ulega zmianie przy przestawieniu w nim funkcji układu pierwszego z odpowiednimi funkcjami układu drugiego, tzn.

$$(3.2) \quad e \{u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2\} = e \{u_2, v_2, w_2; u_1, v_1, w_1\}.$$

Założmy teraz, że funkcje obu układów spełniają równania równowagi zagadnienia (2.10) przy różnych dla każdego z układów obciążeniach q, n_x, n_y .

Stan obciążeń odpowiadający przemieszczeniom u_1, v_1, w_1 okreśmy symbolicznie jako $s(u_1, v_1, w_1)$. Podobnie drugi stan oznaczmy jako $s(u_2, v_2, w_2)$.

Jeżeli wykonamy teraz przekształcenia funkcjonala (3.1) podobnie jak przeprowadziliśmy to w punkcie poprzednim dla wyrażenia na pierwszą wariację (2.4) \rightarrow \rightarrow (2.7), to z warunku symetrii (3.2) otrzymamy

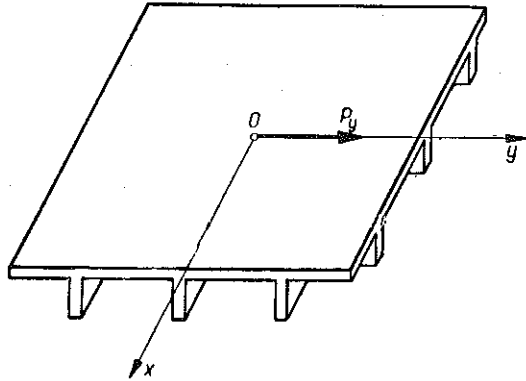
$$(3.3) \quad \iint_B (q_1 w_2 + n_{x1} u_2 + n_{y1} v_2) dx dy + \int_C \left[-M_{n1} \frac{\partial w_2}{\partial n} + \bar{Q}_{n1} w_2 + N_{n1} u_{n2} + T_{nt1} u_{t2} \right] ds = \iint_B (q_2 w_1 + n_{x2} u_1 + n_{y2} v_1) dx dy + \int_C \left[-M_{n2} \frac{\partial w_1}{\partial n} + \bar{Q}_{n2} w_1 + N_{n2} u_{n1} + T_{nt2} u_{t1} \right] ds,$$

co przedstawia poszukiwaną przez nas zasadę o wzajemności. W przypadku przez nas omawianym zasada ta ma postać twierdzenia o wzajemności prac.

Podane powyżej twierdzenie zostanie wykorzystane w dalszym ciągu pracy.

4. Obciążenie skupioną siłą tarczową

W punkcie niniejszym zajmiemy się nieograniczoną płytą obciążoną siłą skupioną działającą w płaszczyźnie środkowej płyty górnej (rys. 4).



Rys. 4

Rozwiązanie tego problemu należy do tak zwanych rozwiązań podstawowych osobliwych. W zagadnieniu płyt przez nas omawianych istnieją trzy takie rozwiązania podstawowe.

W interpretacji fizycznej odpowiadają one obciążeniom nieograniczonej płyty siłami skupionymi działającymi kolejno w kierunku przemieszczeń u , v , w .

Rozwiązanie osobliwe dla siły działającej w kierunku przemieszczenia w , tzn. dla siły skupionej normalnej do powierzchni płyty, podano w pracy jednego z autorów [3].

W punkcie niniejszym podamy rozwiązanie dla siły skupionej działającej w kierunku przemieszczenia v . Ostatnie zaś rozwiązanie osobliwe otrzymać będzie można łatwo z omówionego w punkcie niniejszym po obróceniu układu współrzędnych.

Wobec tego, że będziemy mieli do czynienia z płytą nieograniczoną, będzie interesować nas całka szczególna układu równań (2.12) przy $p_1 = p_3 = 0$ oraz $p_2 = -P_y \delta(x) \delta(y)$. Przyjmiemy więc $F_1 = F_3 = 0$ i zajmiemy się obliczeniem funkcji F_2 , którą dla uproszczenia oznaczymy jako $F_2 = F$. Otrzymamy w tym przypadku jedno równanie:

$$(4.1) \quad \frac{\partial^8 F}{\partial y^8} + a \frac{\partial^8 F}{\partial y^6 \partial x^2} + b \frac{\partial^8 F}{\partial y^4 \partial x^4} + c \frac{\partial^8 F}{\partial y^2 \partial x^6} + d \frac{\partial^8 F}{\partial x^8} = - P_y \delta(x) \delta(y) \frac{2(1+\nu)}{Et(I_y t_y - \bar{S}_y^2)}.$$

Natomiast przemieszczenia u, v, w wyznaczmy z następujących zależności:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u &= \left\{ -\frac{1+\nu}{2} t\bar{I}_x \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} - [(1+\nu) tI - \bar{S}_x \bar{S}_y] \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} - \frac{1+\nu}{2} t\bar{I}_y \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \right\} F, \\ v &= \left\{ (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \left(2t_x I + \frac{1-\nu}{2} t\bar{I}_x \right) \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + [t_x \bar{I}_y + (1-\nu) tI] \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{1-\nu}{2} t\bar{I}_y \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right\} F, \\ w &= \left(-\frac{1+\nu}{2} t\bar{S}_x \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + t_x \bar{S}_y \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{1-\nu}{2} t\bar{S}_y \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) F, \end{aligned}$$

które wynikają z zależności (2.13) przy $F_1 = F_3 = 0$ oraz $F_2 = F$.

Zastosujmy teraz do równania (4.1) nieskończoną podwójną transformację Fouriera:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} F^*(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy, \\ F(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę to, że $p_2^* = -P_y/2\pi$ i wykonując transformację odwrotną otrzymujemy:

$$(4.4) \quad F(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{P_y}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{\beta^8 + a\beta^6 \alpha^2 + b\beta^4 \alpha^4 + c\beta^2 \alpha^6 + d\alpha^8} d\alpha d\beta,$$

gdzie

$$D = \frac{Et (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)}{2(1+\nu)}.$$

W celu przedstawienia funkcji przemieszczeń w sposób wyraźny będziemy musieli obliczyć całkę występującą po prawej stronie powyższego wyrażenia.

Przekształćmy teraz mianownik wyrażenia podcałkowego (4.4):

$$\beta^8 + a\beta^6 \alpha^2 + b\beta^4 \alpha^4 + c\beta^2 \alpha^6 + d\alpha^8 = \alpha^8 \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + r_1^2 \right) \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + r_2^2 \right) \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + r_3^2 \right) \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + r_4^2 \right).$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy, że r_k^2 ($k = 1, 2, 3, 4$) są różnymi liczbami rzeczywistymi. Jeżeli weźmiemy pod uwagę to, że współczynniki a, b, c i d są zawsze dodatnie [2], to stwierdzimy, iż $r_k^2 = z_k$ są różnymi, rzeczywistymi, dodatnimi pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$(4.5) \quad z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d = 0.$$

Przypadek ten odpowiada przypadkowi 1 rozwiązań możliwych ze względu na pierwiastki równania charakterystycznego (4.5) (dyskusja nad równaniem charakterystycznym (4.5) i podział na przypadki podane są w pracy [2]).

Ażeby nie rozszerzać pracy, ograniczymy się poniżej tylko do przypadku, gdy r_k^2 są różnymi liczbami rzeczywistymi. Natomiast rozwiązania dla przypadków pozostałych otrzymać można łatwo na drodze podobnej do podanej niżej dla przypadku 1.

Rozłożymy teraz wyrażenie podcałkowe (4.4) na ułamki proste:

$$(4.6) \quad [\beta^8 + a\beta^6 \alpha^2 + b\beta^4 \alpha^4 + c\beta^2 \alpha^6 + d\alpha^8]^{-1} \equiv \sum_{k=1}^4 \frac{C_k}{(\beta^2 + \alpha^2 r_k^2)}.$$

Na obliczenie współczynników C_k otrzymamy następujący układ równań:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{C_1}{r_1^2} + \frac{C_2}{r_2^2} + \frac{C_3}{r_3^2} + \frac{C_4}{r_4^2} &= \frac{1}{\alpha^6} \frac{1}{r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2}, \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0, \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 + C_3 r_3^2 + C_4 r_4^2 &= 0, \\ C_1 r_1^4 + C_2 r_2^4 + C_3 r_3^4 + C_4 r_4^4 &= 0, \end{aligned}$$

po rozwiązaniu którego otrzymamy

$$(4.8) \quad \begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\alpha^6} \bar{C}_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \\ \bar{C}_1 &= -\frac{1}{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)(r_1^2 - r_4^2)}, \quad \bar{C}_2 = -\frac{1}{(r_2^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_4^2)(r_2^2 - r_1^2)}, \\ \bar{C}_3 &= -\frac{1}{(r_3^2 - r_4^2)(r_3^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)}, \quad \bar{C}_4 = -\frac{1}{(r_4^2 - r_1^2)(r_4^2 - r_2^2)(r_4^2 - r_3^2)}. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe zależności, funkcję przemieszczeń (4.4) przedstawimy następująco:

$$(4.9) \quad F(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{P_y}{2\pi D} \sum_{k=1}^4 \bar{C}_k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{\alpha^6 (\beta^2 + \alpha^2 r_k^2)} da d\beta.$$

Przekształćmy teraz całkę występującą w powyższym wyrażeniu:

$$(4.10) \quad I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{\alpha^6 (\beta^2 + \alpha^2 r_k^2)} da d\beta = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha^6} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y}{\beta^2 + \alpha^2 r_k^2} d\beta, \quad r_k^2 > 0.$$

Biorąc pod uwagę to, że [5]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y}{\beta^2 + \alpha^2 r_k^2} d\beta = \frac{\pi}{2r_k |\alpha|} e^{-r_k |\alpha| y}, \quad y > 0,$$

otrzymamy

$$(4.11) \quad I_k = \frac{2\pi}{r_k} \operatorname{re} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a(ix+r_k y)}}{a^7} da.$$

Całka powyższa nie istnieje jako całka niewłaściwa. Można jednak wydzielić z niej tzw. «część skończoną» [6, 7, 8 i 9].

Dla wydzielenia z całki (4.11) części skończonej posłużymy się wzorem podanym przez jednego z autorów w poprzednio cytowanej pracy [9]:

$$(4.12) \quad \text{f.p.} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(a)}{a^p} da = - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \int_0^{\infty} \varphi^{(n)}(a) \ln a da.$$

Wzór ten odnosi się do funkcji $\varphi(a)$ ograniczonej wraz z pochodną do rzędu p dla $a \geq 0$ i spełniającej warunek $\varphi^{(k)}(a) < A/a^l$ przy $a \rightarrow \infty$, $l > 1$.

Wobec tego, że funkcja występująca w liczniku wyrażenia (4.11) spełnia te założenia, to wykorzystując wzór (4.12) otrzymamy [5],

$$(4.13) \quad \text{f.p.} I_k = - \frac{2\pi}{r_k 6!} \operatorname{re} z^6 (\ln z + C),$$

gdzie $z = ix + r_k y$, a C jest stałą Eulera.

Uwzględniając zależność powyższą otrzymamy szukaną funkcję przemieszczeń F (4.4) dla przypadku obciążenia płyty nieograniczonej skupioną siłą tarczową P_y :

$$(4.14) \quad F(x, y) = \frac{P_y}{6!} \frac{1}{2\pi D} \operatorname{re} \sum_{k=1}^4 \frac{\bar{C}_k z^6}{r_k} (\ln z + C).$$

Pozostałe obliczenia są bardzo łatwe. Przemieszczenia u , v , w otrzymamy wykorzystując rozwiązanie powyższe i zależności (4.2):

$$(4.15) \quad \begin{aligned} u &= \frac{P_y}{2\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1+\nu}{2} t \bar{I}_x - [(1+\nu) t I - \bar{S}_x \bar{S}_y] r_k^2 + \frac{1+\nu}{2} t \bar{I}_y r_k^4 \right\} \times \\ &\quad \times \bar{C}_k \operatorname{erfc} \operatorname{tg} \frac{x}{r_k y}, \\ v &= - \frac{P_y}{2\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \frac{1}{r_k} - \left(2t_x I + \frac{1-\nu}{2} t \bar{I}_x \right) r_k + \right. \\ &\quad \left. + [t_x \bar{I}_y + (1-\nu) t I] r_k^3 - \frac{1-\nu}{2} t \bar{I}_y r_k^5 \right\} \bar{C}_k \left[\ln \sqrt{\frac{x^2 + r_k^2 y^2}{r_0^2}} + \frac{1764}{6!} \right], \\ w &= - \frac{P_y}{2\pi D} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_x + t_x \bar{S}_y r_k^2 - \frac{1-\nu}{2} t \bar{S}_y r_k^4 \right) \left(r_k y \ln \sqrt{\frac{x^2 + r_k^2 y^2}{r_0^2}} - \right. \\ &\quad \left. - x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{r_k y} + \frac{1044}{6!} r_k y \right) \bar{C}_k. \end{aligned}$$

W wyrażeniach powyższych opuszczono stałą Eulera C oraz wprowadzono jednostkę długości r_0 , co nie wpływa na rozwiązanie osobiłwe.

Natomiast wielkości statyczne otrzymamy ze wzorów powyższych (4.15) i związków (2.1):

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{P_y Et}{4(1+\nu)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left[t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2 + (\nu t \bar{I}_x - 2t_x I) r_k^2 + (t_x \bar{I}_y - \right. \\
 &\quad \left. - 2\nu t I + \bar{S}_x \bar{S}_y) r_k^4 + \nu t \bar{I}_y r_k^6 \right] \frac{\bar{C}_k r_k y}{x^2 + r_k^2 y^2}, \\
 N_y &= \frac{P_y E}{2(1-\nu^2)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ -t_y (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) + \frac{1+\nu}{2} \nu t^2 \bar{I}_x + \right. \\
 &\quad \left. + \left[t_y \left(2t_x I + \frac{1-\nu}{2} t \bar{I}_x \right) - ((1+\nu) t I - \bar{S}_x \bar{S}_y) \nu t + \frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_x \bar{S}_y \right] r_k^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left[t_y (t_x \bar{I}_y + (1-\nu) t I) - \frac{1+\nu}{2} \nu t^2 \bar{I}_y - t_x \bar{S}_y^2 \right] r_k^4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} t (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2) r_k^6 \right\} \frac{\bar{C}_k r_k y}{x^2 + r_k^2 y^2}, \\
 M_x &= \frac{P_y E}{2(1-\nu^2)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left[\bar{S}_y (\bar{S}_x^2 - t_x \bar{I}_x) - \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{2} t I \bar{S}_x + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1-\nu}{2} t \bar{I}_x \bar{S}_y + \nu t_x I \bar{S}_y + \frac{1+\nu}{2} t \bar{I}_y \bar{S}_x \right) r_k^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1-\nu}{2} \nu t I \bar{S}_y r_k^4 \right] \frac{\bar{C}_k r_k^3 y}{x^2 + r_k^2 y^2}, \\
 M_y &= -\frac{P_y E}{2(1-\nu^2)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1+\nu}{2} \nu t I \bar{S}_x + (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \bar{S}_y - \right. \\
 &\quad \left. - \left[(2-\nu) t_x I \bar{S}_y + \frac{1+\nu}{2} t \bar{I}_y \bar{S}_x + \frac{1-\nu}{2} t \bar{I}_x \bar{S}_y \right] r_k^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1-\nu)(2-\nu)}{2} t I \bar{S}_y r_k^4 \right\} \frac{\bar{C}_k r_k y}{x^2 + r_k^2 y^2}, \\
 M_{yx} &= -M_{xy} = \frac{P_y EI}{2(1+\nu)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left(-\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_x - t_x \bar{S}_y r_k^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} t \bar{S}_y r_k^4 \right) \frac{\bar{C}_k r_k x}{x^2 + r_k^2 y^2}, \\
 T_x &= T_y = \frac{P_y Et}{4(1+\nu)FD} \sum_{k=1}^4 \left[-t_x \bar{I}_x + \bar{S}_x^2 + (2t_x I - \nu t \bar{I}_x) r_k^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (2\nu t I - t_x \bar{I}_y - \bar{S}_x \bar{S}_y) r_k^4 - \nu t \bar{I}_y r_k^6 \right] \frac{\bar{C}_k}{r_k} \frac{x}{x^2 + r_k^2 y^2},
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -\frac{P_y E}{(1+\nu)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1}{1-\nu} (\bar{S}_x^2 - t_x \bar{I}_x) \bar{S}_y - \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} tI \bar{S}_x + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{1-\nu} t_x I \bar{S}_y + \frac{1}{2} t \left(\bar{I}_x \bar{S}_y + \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{I}_y \bar{S}_x \right) \right] r_k^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} tI \bar{S}_y r_k^4 \right\} \frac{\bar{C}_k r_k^3 xy}{(x^2 + r_k^2 y^2)^2}, \\
 Q_y &= -\frac{P_y E}{2(1+\nu)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{1+\nu}{2} tI \bar{S}_x + (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \bar{S}_y \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{1}{1-\nu} t_x I \bar{S}_y + \frac{1}{2} t \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{I}_y \bar{S}_x + \bar{I}_x \bar{S}_y \right) \right] r_k^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} tI \bar{S}_y r_k^4 \right\} \bar{C}_k \frac{r_k (x^2 - r_k^2 y^2)}{(x^2 + r_k^2 y^2)^2}, \\
 \bar{Q}_x &= -\frac{P_y E}{(1+\nu)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ -\frac{1}{1-\nu} \left[\frac{1+\nu}{2} \nu tI \bar{S}_x + (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \bar{S}_y \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{2-\nu}{1-\nu} t_x I \bar{S}_y + \frac{1}{2} t \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{I}_y \bar{S}_x + \bar{I}_x \bar{S}_y \right) \right] r_k^2 + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2-\nu}{2} tI \bar{S}_y r_k^4 \right\} \bar{C}_k \frac{r_k^3 xy}{(x^2 + r_k^2 y^2)^2}, \\
 \bar{Q}_y &= -\frac{P_y E}{2(1+\nu)\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{(1+\nu)(2-\nu)}{2} tI \bar{S}_x + (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \bar{S}_y \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{\nu}{1-\nu} t_x I \bar{S}_y + \frac{1}{2} t \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{I}_y \bar{S}_x + \bar{I}_x \bar{S}_y \right) \right] r_k^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{2} tI \bar{S}_y r_k^4 \right\} \bar{C}_k \frac{r_k (x^2 - r_k^2 y^2)}{(x^2 + r_k^2 y^2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Można się przekonać, że wielkości statyczne podane powyżej spełniają warunki równowagi dla płyty wyciętej z płyty nieograniczonej. Sprawdźmy to dla płyty prostokątnej o wierzchołkach $(-\infty, b)$, (∞, b) , $(\infty, -b)$, $(-\infty, -b)$. Biorąc pod uwagę (4.7), (4.8) i (4.16) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} N_y(x, b) dx &= -\frac{P_y}{2}, & \int_{-\infty}^{\infty} N_y(x, -b) dx &= \frac{P_y}{2}, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} M_y(x, \pm b) dx &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} T_x(x, \pm b) dx &= 0, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}_y(x, \pm b) dx &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

gdzie odpowiednie całki należy rozumieć w sensie wartości głównej wg Cauchy'ego.

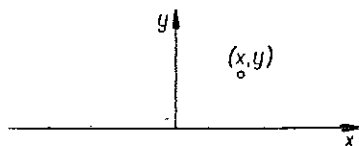
5. Zastosowania

Punkt niniejszy jest poświęcony wykorzystaniu wzorów otrzymanych w punktach poprzednich pracy.

Zajmiemy się półpłaszczyzną $y > 0$ ograniczoną prostą $y = 0$ (rys. 5). Niech na brzegu ograniczającym będą dane następujące wielkości:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} w(x, 0) &= f_1(x), & M_y(x, 0) &= f_2(x), \\ N_y(x, 0) &= f_3(x), & u(x, 0) &= f_4(x). \end{aligned}$$

Celem naszym jest wyznaczenie przemieszczeń $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ ($y > 0$) dla podanych wyżej warunków brzegowych. Zajmijmy się na razie wyznaczeniem przemieszczeń $v(x, y)$.



Rys. 5

Założymy, że znamy rozwiązanie półpłaszczyzny $y > 0$ obciążonej w punkcie (x, y) siłą skupioną $N_y(x, y, x_1, y_1) = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1)$; rozwiązanie to spełnia następujące warunki na brzegu: $y_1 = 0$:

$$(5.2) \quad w_0^y(x, y, x_1, 0) = M_{y_0}^y(x, y, x_1, 0) = N_{y_0}^y(x, y, x_1, 0) = u_0^y(x, y, x_1, 0) = 0.$$

Powyżej oraz w dalszym ciągu pracy indeksami y_0 oznaczajmy wielkości związane z obciążeniem półpłaszczyzny siłą skupioną $N_y = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1)$.

Zastosujmy teraz do obu omówionych stanów twierdzenie o wzajemności. Zauważmy tylko przedtem, że dla stanu obciążeń brzegowych (5.1) obciążenia q, n_x, n_y wewnątrz obszaru omawianego $y > 0$ są równe zero, a dla stanu obciążeń siłą skupioną $q_0 = n_{x_0} = 0$, natomiast $n_{y_0} = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1)$.

Wykorzystując zależności powyższe oraz wzór (3.3) otrzymamy

$$(5.3) \quad \int_C \left[-M_n \frac{\partial w_0^y}{\partial n} + N_n u_{n_0}^y \right] ds = \int_B \int \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) v dB + \\ + \int_C (\bar{Q}_{n_0}^y w + T_{n_0}^y u_t) ds.$$

Biorąc pod uwagę to, że na brzegu $y_1 = 0$ mamy

$$M_n = M_y(x_1) = f_2(x_1), \quad N_n = N_y(x_1) = f_3(x_1), \quad w = w(x_1) = f_1(x_1),$$

$$u_t = u(x_1) = f_4(x_1), \quad ds = dx_1, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial y_1}, \quad \bar{Q}_n = -\bar{Q}_y,$$

$$T_{nt} = -T_x, \quad u_n = -u_y = -v,$$

wzór (5.3) przekształcimy następująco:

$$(5.4) \quad v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_2(x_1) \frac{\partial w_0^y(x, y, x_1, 0)}{\partial y_1} - f_3(x_1) v_0^y(x, y, x_1, 0) + \right. \\ \left. + f_1(x_1) \bar{Q}_{y_0}^y(x, y, x_1, 0) + T_{z_0}^y(x, y, x_1, 0) f_4(x_1) \right] dx_1.$$

Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli będziemy znali funkcje

$$(5.5) \quad \frac{w_0^y(x, y, x_1, 0)}{\partial y_1}, \quad v_0^y(x, y, x_1, 0), \quad \bar{Q}_{y0}^y(x, y, x_1, 0), \quad T_{x0}^y(x, y, x_1, 0).$$

Funkcje te łatwo otrzymać z rozwiązania podanego w p. 4 niniejszej pracy dla przypadku płyty nieograniczonej obciążonej siłą skupioną $n_y = \delta(x) \delta(y)$. Jeżeli płytę nieograniczoną obciążymy dwoma siłami skupionymi n_y antysymetrycznie względem osi $y = 0$, to na osi tej będą spełnione warunki (5.2), a odpowiadające temu obciążeniu wielkości (5.5) właśnie nas interesują.

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymamy

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w_0^y(x, y, x_1, 0)}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi D} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1+\nu}{2} t\bar{S}_x + t_x \bar{S}_y r_k^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\nu}{2} t\bar{S}_y r_k^4 \right) \bar{C}_k r_k \left[\ln \frac{(x_1-x)^2 + r_k^2 y^2}{r_0^2} + 2r_0 + \frac{2 \cdot 1044}{6!} r_k \right], \\ v_0^y(x, y, x_1, 0) &= -\frac{1}{2\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \frac{1}{r_k} - \left(2t_x I + \frac{1-\nu}{2} t\bar{I}_x \right) r_k + \right. \\ &\quad \left. + [t_x \bar{I}_y + (1-\nu) tI] r_k^3 - \frac{1-\nu}{2} t\bar{I}_y r_k^5 \right\} \bar{C}_k \ln \frac{(x_1-x)^2 + r_k^2 y^2}{r_0^2}, \\ \bar{Q}_{y0}^y(x, y, x_1, 0) &= -\frac{E}{(1+\nu) \pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{(1+\nu)(2-\nu)}{2} t\bar{S}_x + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (t_x \bar{I}_x - \bar{S}_x^2) \bar{S}_y \right] - \left[\frac{\nu}{1-\nu} t_x \bar{I} \bar{S}_y + \frac{1}{2} t \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{I}_y \bar{S}_x + \bar{I}_x \bar{S}_y \right) \right] r_k^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{2} t\bar{S}_y r_k^4 \right\} \bar{C}_k r_k \frac{(x_1-x)^2 - r_k^2 y^2}{[(x_1-x)^2 + r_k^2 y^2]^2}, \\ T_{x0}^y(x, y, x_1, 0) &= \frac{Et}{2(1+\nu) \pi D} \sum_{k=1}^4 \left[-t_x \bar{I}_x + \bar{S}_x^2 + (2t_x I - \nu t\bar{I}_x) r_k^2 + \right. \\ &\quad \left. + (2\nu tI - t_x \bar{I}_y - \bar{S}_x \bar{S}_y) r_k^4 - \nu t\bar{I}_y r_k^6 \right] \frac{\bar{C}_k}{r_k} \frac{(x_1-x)}{(x_1-x)^2 + r_k^2 y^2}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczegółowe znajdziemy dla przypadku

$$(5.7) \quad f_1(x_1) = f_3(x_1) = f_4(x_1) = 0, \quad f_2(x_1) = \frac{M}{\pi} \frac{\varepsilon}{x_1^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

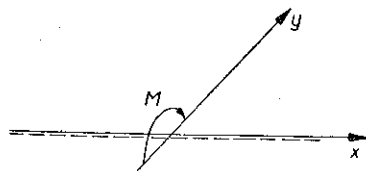
Odpowiada to obciążeniu krawędzi półpłaszczyzny momentami zginającymi. Przemieszczenie $v(x, y)$ odpowiadające temu obciążeniu wyznaczmy ze wzoru

$$(5.8) \quad v(x, y) = -\frac{M}{2\pi^2 D} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1+\nu}{2} t\bar{S}_x + t_x \bar{S}_y r_k^2 - \frac{1-\nu}{2} t\bar{S}_y r_k^4 \right) \bar{C}_k r_k \times \\ \times \left[\ln \frac{(x_1-x)^2 + r_k^2 y^2}{r_0^2} + 2r_k \left(1 + \frac{1044}{6!} \right) \right] \frac{\varepsilon dx_1}{x_1^2 + \varepsilon^2}.$$

Jeżeli we wzorze powyższym wykonamy przejście graniczne i zauważymy to, że [10]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \delta(x),$$

to otrzymamy przemieszczenie dla przypadku działania momentu skupionego w początku układu współrzędnych (rys. 6):



Rys. 6

$$(5.9) \quad v(x, y) = -\frac{M}{2\pi D} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1+\nu}{2} t\bar{S}_x + t_x \bar{S}_y r_k^2 - \frac{1-\nu}{2} t\bar{S}_y r_k^4 \right) \bar{C}_k r_k \times \\ \times \left[\ln \frac{x^2 + r_k^2 y^2}{r_0^2} + 2r_k \left(1 + \frac{1044}{6!} \right) \right].$$

Problem wyznaczenia pozostałych przemieszczeń, tzn. $u(x, y)$ i $w(x, y)$ rozwiązać możemy podobnie, jak to wykazano przy budowaniu zależności (5.4). Ażeby nie rozszerzać pracy podamy jedynie zasadnicze zależności.

Przemieszczenia $u(x, y)$ i $w(x, y)$ odpowiadające wielkościom brzegowym (5.1) wyznaczyć możemy ze wzorów

$$(5.10) \quad u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_2(x_1) \frac{\partial w_0^x(x, y, x_1, 0)}{\partial y_1} - f_3(x_1) v_0^x(x, y, x_1, 0) + \right. \\ \left. + f_1(x_1) \bar{Q}_{y_0}^x(x, y, x_1, 0) + T_{x_0}^y(x, y, x_1, 0) f_4(x_1) \right] dx_1, \\ w(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_2(x_1) \frac{\partial w_0^y(x, y, x_1, 0)}{\partial y_1} - f_3(x_1) v_0^y(x, y, x_1, 0) + \right. \\ \left. + f_1(x_1) \bar{Q}_{y_0}^y(x, y, x_1, 0) + T_{x_0}^y(x, y, x_1, 0) f_4(x_1) \right] dx_1.$$

We wzorach powyższych indeksami x_0^x i y_0^y oznaczono wielkości związane z rozwiązaniem półpłaszczyzny $y > 0$ obciążonej w punkcie (x, y) kolejno siłą skupioną $N_x = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1)$ równoległą do osi x i siłą skupioną pionową, przy czym oba te rozwiązania spełniają dla brzegu $y_1 = 0$ warunki (5.2).

Rozwiązania dla tak obciążonej półpłaszczyzny otrzymać łatwo z rozwiązania płyty nieograniczonej obciążonej antysymetrycznie względem osi $y_1 = 0$.

Postępując podobnie jak przy uzyskaniu wielkości (5.6) otrzymamy przykładowo dla przypadku obciążenia półpłaszczyzny $y > 0$ siłą $P_x = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1)$

$$(5.11) \quad \frac{\partial w_0^x(x, y, x_1, 0)}{\partial y_1} = -\frac{1}{\pi D} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1+\nu}{2} t\bar{S}_y r_k^4 + t_y \bar{S}_x r_k^2 - \right. \\ \left. - \frac{1-\nu}{2} t\bar{S}_x \right) \bar{C}_k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_1 - x}{r_k y},$$

$$\begin{aligned}
 v_0^x(x, y, x_1, 0) &= -\frac{1}{\pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1+\nu}{2} t \bar{I}_y r_k^4 - [(1+\nu) t I - \bar{S}_x \bar{S}_y] r_k^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1+\nu}{2} t \bar{I}_x \right\} \bar{C}_k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_1 - x}{r_k y}, \\
 \bar{Q}_{y0}^x(x, y, x_1, 0) &= \frac{2E}{(1+\nu) \pi D} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{1+\nu}{2} \nu t \bar{I} \bar{S}_y + \right. \right. \\
 (5.11) \quad &\quad \left. \left. + (t_y \bar{I}_y - \bar{S}_y^2) \bar{S}_x \right] r_k^4 - \left[\frac{2-\nu}{1-\nu} t_y \bar{I} \bar{S}_x + \frac{t}{2} (\bar{I}_y \bar{S}_x + \right. \right. \\
 [e. d.] \quad &\quad \left. \left. + \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{I}_x \bar{S}_y \right) \right] r_k^2 + \frac{2-\nu}{2} t \bar{I} \bar{S}_x \right\} \frac{\bar{C}_k r_k (x_1 - x) y}{[(x_1 - x)^2 + r_k^2 y^2]^2}, \\
 T_{x0}^x(x, y, x_1, 0) &= \frac{Et}{2(1+\nu) \pi D} \sum_{k=1}^4 \left[(-t_y \bar{I}_y + \bar{S}_y^2) r_k^6 + (2t_y I - \nu t \bar{I}_y) r_k^4 + \right. \\
 &\quad \left. + (2\nu t I - t_y \bar{I}_x - \bar{S}_x \bar{S}_y) r_k^2 - \nu t \bar{I}_x \right] \frac{\bar{C}_k r_k y}{(x_1 - x)^2 + r_k^2 y^2}.
 \end{aligned}$$

Podamy jeszcze przemieszczenie $u(x, y)$ dla przypadku obciążenia półpłaszczyzny $y > 0$ momentem skupionym (rys. 6):

$$(5.12) \quad u(x, y) = \frac{M}{\pi D} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_y r_k^4 + t_y \bar{S}_x r_k^2 - \frac{1-\nu}{2} t \bar{S}_x \right) \bar{C}_k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{r_k y}.$$

Wyrażenie to uzyskano na drodze podobnej jak wzór (5.9).

Literatura cytowana w tekście

1. A. PELÜGER, *Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte*, ing. Archiv., 1947, s. 111.
2. R. GANOWICZ, *Pasma płytowe z żebrami jednostronnymi*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).
3. R. GANOWICZ, *Rozwiązania osobliwe płyt wzmocnionych żebrami jednostronnymi*, Rozpr. Inżyn., 4, 9 (1961).
4. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, Warszawa 1957.
5. И. М. РЫЖИК, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Москва 1962.
6. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, 1923.
7. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
8. H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports*, Arch. Mech. Stos., 10 (1958).
9. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teor. i Stos., 3, 4 (1966).
10. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1959.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК С ОДНОСТОРОННЫМИ РЕБРАМИ

На основе вариационного исчисления в работе дается выведение основных уравнений задачи. Рассматриваются пластинки, удовлетворяющие предположениям, приведенным Пфлюгером [1]. Выводится теорема о взаимности. Даются сингулярные решения для бесконечных и полубесконечных пластинок в плоском напряженном состоянии, вызванном сосредоточенной силой P_x и P_y .

Это решение совместно с теоремой взаимности использовалось для составления решений некоторых краевых задач теории, обсуждаемых пластинок.

Summary

SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF PLATES
WITH RIBS ON ONE SIDE

The fundamental equations of the problem are derived by means of the variational calculus. The plates under consideration satisfy the Pflüger assumptions [1]. A theorem on the reciprocity of works is derived. This is completed by singular solutions for infinite and semi-infinite plates loaded in their planes by a concentrated force P_x, P_y .

These solutions, together with the reciprocity theorem are made use of for the construction of certain solutions of boundary-value problems for the plates under consideration.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 grudnia 1966 r.
