

PROSTOKĄTNY RUSZT PŁASKI WSPARTY W CZTERECH NAROŻACH NA SZTYWNYCH PODPORACH

KAZIMIERZ CIEŚLAK (KRAKÓW)

Wstęp

Rusztory płaskie znajdują szerokie zastosowanie w budownictwie, w budowie maszyn oraz w przemyśle okrętowym. W zależności od przeznaczenia, co z zasady łączy się ze sposobem zamocowania bocznych krawędzi, można znaleźć w literaturze szereg prac wielu autorów podających rozwiązania umożliwiające wyznaczenie naprężeń w belkach rusztu. Niezależnie od zastosowanego sposobu rozwiązania i przyjętego schematu z zasady nie uwzględnia się sztywności skręcania belek rusztu. Wynika to stąd, że albo przyjmuje się przegubowe połączenie belek w miejscach skrzyżowań lub, jak wykazano w pracy [3], sztywność skręcania belek, które są najczęściej z odkrytych profili, jest bardzo mała w porównaniu ze sztywnością zginania. Podane w literaturze rozwiązania (ze względu na zastosowany sposób) zależą najczęściej od liczby belek rusztu. Dla rusztów o małej ilości belek otrzymuje się rozwiązania traktując ruszt jako układ statycznie niewyznaczalny i posługując się metodami statyki uzyskuje się rozwiązanie [1 i 5]. Sposób rozwiązania oparty na wykorzystaniu równania pięciu momentów podał J. C. POPOW [10]. Otrzymane wyniki pozwalają uzyskać rozwiązanie dla rusztów wolnopodpartych lub utwierdzonych wzdłuż krawędzi oraz dla krawędzi wolnych od obciążeń lecz tylko dwóch; pozostałe muszą być wolnopodparte lub utwierdzone. W przypadku rusztów o większej liczbie belek stosuje się metodę równań różnicowych [1, 2 i 6] lub, jeśli liczba belek jednego kierunku jest mała, sprowadza się uzyskanie rozwiązania do rozpatrywania belki na sprężystym podłożu [1 i 4]. Dla rusztów o dużej liczbie belek tak jednego, jak i drugiego kierunku traktuje się ruszt jako płytę przy przyjęciu, że sztywność skręcania jest równa zeru. Taki sposób zastosowali w swych pracach P. F. PAPKOWICZ [3 i 4], W. NOWACKI [1], J. A. KOROTKIN [5] i M. S. MINCOWSKI [6].

Wśród prac poświęconych rusztom płaskim można znaleźć rozwiązania dla bocznych krawędzi wolnopodpartych, utwierdzonych lub wolnych od obciążeń. W przypadku krawędzi wolnych od obciążeń są to rozwiązania tylko dla rusztów, których dwie krawędzie są wolne od obciążeń, dwie pozostałe są wolnopodparte lub utwierdzone, dlatego nie dają możliwości uzyskania rozwiązania dla rusztu wspartego w czterech narożach na podporach. Odnosi się to do rusztów o dużej liczbie belek.

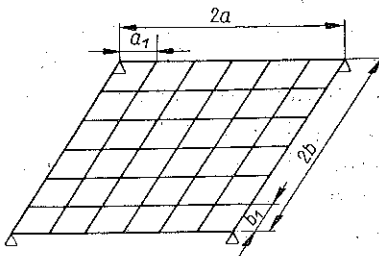
Dla rusztów o małej liczbie belek takie rozwiązanie można uzyskać traktując ruszt jako układ statycznie niewyznaczalny. Dla dużej liczby belek rusztu taki sposób jest praktycznie ze względu na pracochłonność nie do zastosowania, ponieważ jest wielokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Rusztzy wsparte w czterech narożach na podporach znajdują zastosowanie w różnego rodzaju przejezdnych maszynach roboczych ciężkich (żurawie, koparki). Są to najczęściej ramy podwozia wsparte w czterech narożach na kołach lub gąsienicach, obciążone ciężarem oraz siłami przyłożonymi do części obrotowej.

Opracowanie sposobu wyznaczania naprężeń w belkach rusztu wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach dla przypadków, kiedy liczba belek jednego kierunku przekracza pięć — jest celem tej pracy.

1. Podstawowe zależności

Będziemy rozpatrywać ruszt płaski (rys. 1) wsparty w czterech narożach na sztywnych podporach przyjmując następujące założenia:



Rys. 1

- 1) ilość belek w każdym kierunku jest większa od pięciu,
- 2) sztywność skręcania belek jest mała w stosunku do sztywności zginania,
- 3) ruszt jest ortotropowy, a belki są równoległe do bocznych krawędzi rusztu.

Przyjęte założenia pozwalają dla uzyskania rozwiązania wykorzystać zależności teorii płyt cienkich. W pracach [3 i 4] wykazano, że wyznaczanie strzałki ugięcia i momentów zginających

w belkach rusztu, jeśli wyjść z równania powierzchni ugięcia, daje błąd rzędu $\frac{1}{(n-1)^2}$, gdzie n oznacza liczbę belek jednego kierunku. Z powyższego wynika, że dla $n \geq 6$ błąd nie przekroczy 4%.

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia oraz wyrażenia dla momentów zginających i sił tnących zostało wyprowadzone w pracach [4 i 5] i można je napisać następująco:

równanie różniczkowe

$$(1.1) \quad B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y);$$

momenty zginające

$$(1.2) \quad M_x = -B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_y = -B_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

siły tnące

$$(1.3) \quad Q_x = -B_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad Q_y = -B_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$$

W powyższych wyrażeniach $w = w(x, y)$ oznacza równanie powierzchni ugięcia rusztu, $p(x, y)$ funkcja obciążeń rusztu oraz B_1, B_2 sztywności zginania w dwóch prostokątnych kierunkach równoległych do osi układu współrzędnych.

Dla rusztu sztywności zginania B_1 i B_2 wynoszą

$$(1.4) \quad B_1 = E_1 \frac{J_1}{b_1}, \quad B_2 = E_2 \frac{J_2}{a_1},$$

gdzie E_1, J_1 i b_1 oznaczają odpowiednio moduł sprężystości i moment bezwładności oraz odległości pomiędzy belkami równoległymi do osi x a E_2, J_2, a_1 moduł sprężystości i moment bezwładności oraz odległości pomiędzy belkami równoległymi do osi y .

Korzystając z podanych zależności całość zagadnienia sprowadza się do znalezienia równania powierzchni ugięcia rusztu przy danych warunkach brzegowych. Znając równanie powierzchni ugięcia, strzałkę ugięcia wyznacza się bezpośrednio, natomiast moment zginający znajdujemy dla poszczególnych belek sumując rozłożony moment zginający wyznaczony wg (1.3) na odcinku o długości równej odległości pomiędzy belkami, w środku którego znajduje się rozpatrywana belka. W podobny sposób możemy znaleźć siły tnące dla poszczególnych belek.

2. Równanie powierzchni ugięcia

Równanie powierzchni ugięcia rusztu jest określone równaniem różniczkowym (1.1) i warunkami brzegowymi. Warunki brzegowe rusztu wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach, przyjmując układ współrzędnych wg rys. 2, napiszemy następująco:

dla $x = \pm a$

$$(2.1) \quad B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad B_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0,$$

dla $y = \pm b$

$$(2.2) \quad B_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad B_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$$

oraz $w = 0$ dla

$$(2.3) \quad x = -a, y = -b, \quad x = -a, y = b, \quad x = a, y = b, \quad x = a, y = -b.$$

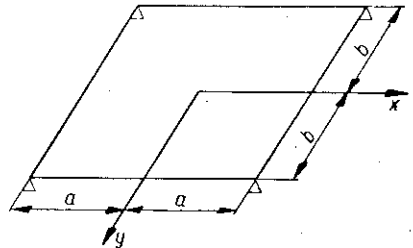
Warunki (2.1) i (2.2) wyrażają, że wszystkie krawędzie są wolne od obciążeń. Natomiast (2.3) odpowiada wsparciu w narożach na sztywnych podporach.

Przepiszemy (1.1) w zmienionej formie:

$$(2.4) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{B_1} p(x, y),$$

gdzie

$$(2.5) \quad \eta^4 = \frac{B_2}{B_1}.$$



Rys. 2

Rozwiązanie równania różniczkowego (2.4) można napisać jako sumę dwóch składników. Jednym będzie rozwiązanie ogólne jednorodnego równania różniczkowego, a drugim rozwiązanie szczególne. Rozwiązanie szczególne będzie każdorazowo inne w zależności od funkcji obciążeń $p(x, y)$, dlatego najpierw znajdziemy rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie ogólne jednorodnego równania różniczkowego

$$(2.6) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

przyjmiemy w formie

$$(2.7) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) Y_n(y) + F(x, y),$$

gdzie $f_n(x)$ oznacza funkcję tylko zmiennej x , spełniającą warunki brzegowe wzdłuż krawędzi równoległych do osi y , $Y_n(y)$ funkcję tylko jednej zmiennej y , spełniającą warunki brzegowe wzdłuż krawędzi równoległych do osi x oraz

$$(2.8) \quad F(x, y) = A_1 \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} + A_2 \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} + A_3 \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} + \\ + A_4 \frac{(a+x)(b-y)}{4ab}.$$

Stałe A_i wyznaczymy w taki sposób, aby spełnić warunki (2.3).

Funkcja $F(x, y)$ spełnia warunki

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0.$$

Wstawiając (2.7) do (2.6) znajdujemy

$$(2.10) \quad \sum_n [f_n^{IV}(x) Y_n(y) + \eta^4 f_n(x) Y_n^{IV}(y)] + F_{xxxx}^{IV}(x, y) + \eta^4 F_{yyyy}^{IV}(x, y) = 0,$$

lecz z (2.8) wynika

$$F_{xxxx}^{IV}(x, y) = F_{yyyy}^{IV}(x, y) = 0$$

i dlatego

$$(2.11) \quad \sum_n [f_n^{IV}(x) Y_n(y) + \eta^4 f_n(x) Y_n^{IV}(y)] = 0.$$

Powyższa zależność będzie spełniona, jeśli będzie

$$f_n^{IV}(x) Y_n(y) + \eta^4 f_n(x) Y_n^{IV}(y) = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

lub, przedstawiając w innej formie,

$$\frac{f_n^{IV}(x)}{f_n(x)} = -\eta^4 \frac{Y_n^{IV}(y)}{Y_n(y)} = C_n.$$

Przyjmując

$$C_n = -\eta^4 k_n^4$$

możemy napisać następujące dwa równania różniczkowe zwyczajne:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} Y_n^{IV}(y) - k_n^4 Y_n(y) &= 0 & \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \\ f_n^{IV} + \eta^4 k_n^4 f_n(x) &= 0 & \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

2.1. Określenie funkcji $Y_n(y)$. Funkcje $Y_n(y)$ wyznaczmy rozwiązując równanie różniczkowe (2.12)₁. Funkcje $Y_n(y)$ weźmiemy w formie

$$(2.13) \quad Y_n(y) = C_1 \operatorname{ch} k_n y + C_2 \cos k_n y + C_3 \operatorname{sh} k_n y + C_4 \sin k_n y.$$

Stałe C_i przyjmują różne wartości w zależności od parametru n , lecz dla prostoty zapisu indeks n opuszczono. Stałe C_i wyznaczmy z warunków brzegowych przy uwzględnieniu (2.7).

Wstawiając (2.13) do warunków (2.2) otrzymujemy układ czterech równań względem stałych C_{ij} , który posiada rozwiązanie tylko w tym przypadku, jeśli jego wyznacznik główny jest równy zeru; to daje

$$(2.14) \quad \operatorname{tg}^2 t_n - \operatorname{th}^2 t_n = 0.$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$(2.15) \quad t_n = k_n b, \quad \tau_n = r_n b.$$

Równanie (2.14) napiszemy w formie

$$(2.16) \quad \operatorname{tg} t_n + \operatorname{th} t_n = 0, \quad \operatorname{tg} \tau_n - \operatorname{th} \tau_n = 0$$

wprowadzając dla części symetrycznej oznaczenie pierwiastków równania t_n , a dla części antymetrycznej τ_n .

Wartości pierwiastków równań (2.16) są następujące:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} t_0 &= 0, & \tau_0 &= 0, \\ t_1 &= 2,36502, & \tau_1 &= 3,926602; \end{aligned}$$

dla $n \geq 2$ możemy napisać

$$(2.18) \quad t_n = \frac{3}{4}\pi + (n-1)\pi, \quad \tau_n = \frac{5}{4}\pi + (n-1)\pi.$$

Różnica pomiędzy dokładną wartością a określoną przez (2.18) wypada powyżej szóstej cyfry, co jest wystarczająco dokładne dla praktycznych obliczeń.

Po wyznaczeniu wartości stałych C_i wyrażenie (2.13) przyjmuje postać

$$Y_n(y) = \varphi_n(y) + \bar{\varphi}_n(y),$$

gdzie

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \varphi_n(y) &= \operatorname{ch} t_n \cos k_n y + \cos t_n \operatorname{ch} k_n y, \\ \bar{\varphi}_n(y) &= \operatorname{sh} \tau_n \sin r_n y + \sin \tau_n \operatorname{sh} r_n y. \end{aligned}$$

Wyznaczone funkcje (2.19) oraz ich drugie pochodne są funkcjami ortogonalnymi oraz są ortogonalne względem siebie. Znajdziemy wartości całek z kwadratów znalezionych funkcji:

$$(2.20) \quad \int_{-b}^b [\varphi_n(y)]^2 dy = b (\operatorname{ch}^2 t_n + \cos^2 t_n) = bF_n,$$

$$(2.21) \quad \int_{-b}^b [\bar{\varphi}_n(y)]^2 dy = b (\operatorname{sh}^2 \tau_n - \sin^2 \tau_n) = b\bar{F}_n.$$

Ortogonalność funkcji $\varphi_n(y)$ i $\bar{\varphi}_n(y)$ pozwala na rozłożenie w szereg funkcji $p(y)$ określonych w przedziale od $y = -b$ do $y = b$. Uwzględniając, że dla $t_0 = 0$, $\tau_0 = 0$, $\bar{\varphi}_0(y) = 0$, lecz $\varphi_0(y) \neq 0$, napiszemy

$$(2.22) \quad p(y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(y) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{\varphi}_n(y),$$

gdzie a_0 , a_n i b_n (współczynniki rozłożenia) określimy wg metody Fouriera.

2.2. Określenie funkcji $f_n(x)$. Uwzględniając (2.19) równanie powierzchni ugięcia (2.7) napiszemy w postaci

$$(2.23) \quad w = \sum_n f_n(x) [\varphi_n(y) + \bar{\varphi}_n(y)] + F(x, y).$$

Wstawiając (2.23) w równanie różniczkowe (2.6) otrzymujemy

$$f_n^{\text{IV}}(x) [\varphi_n(y) + \bar{\varphi}_n(y)] + \eta^4 f_n(x) [k_n^4 \varphi_n(y) + r_n^4 \bar{\varphi}_n(y)] = 0,$$

co można napisać:

$$[\varphi_n^{\text{IV}}(x) + \eta^4 k_n^4 \varphi_n(x)] \varphi_n(y) + [\bar{\varphi}_n^{\text{IV}}(x) + \eta^4 r_n^4 \bar{\varphi}_n(x)] \bar{\varphi}_n(y) = 0,$$

a co daje dwa równania różniczkowe dla wyznaczenia funkcji $\varphi_n(x)$ i $\bar{\varphi}_n(x)$:

$$(2.24) \quad \varphi_n^{\text{IV}}(x) + \eta^4 k_n^4 \varphi_n(x) = 0, \quad \bar{\varphi}_n^{\text{IV}}(x) + \eta^4 r_n^4 \bar{\varphi}_n(x) = 0.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(2.25) \quad \alpha_n = \frac{\eta t_n}{\sqrt{2b}}, \quad \delta_n = \frac{\eta \tau_n}{\sqrt{2b}}$$

równania różniczkowe przepisujemy w sposób następujący:

$$(2.26) \quad \varphi_n^{\text{IV}}(x) + 4\alpha_n^4 \varphi_n(x) = 0, \quad \bar{\varphi}_n^{\text{IV}}(x) + 4\delta_n^4 \bar{\varphi}_n(x) = 0.$$

Rozwiązania po wprowadzeniu nowej zmiennej

$$(2.27) \quad z = a + x$$

posiadają postać

$$(2.28) \quad \varphi_n(z) = C_0 V_0(\alpha_n z) + C_1 V_1(\alpha_n z) + C_2 V_2(\alpha_n z) + C_3 V_3(\alpha_n z),$$

gdzie C_0 , C_1 , C_2 i C_3 oznaczają stałe całkowania zależne od n , (dla prostoty zapisu indeks n opuszczono).

Funkcje $V(a_n z)$ są określone wzorem [5]

$$(2.29) \quad \begin{aligned} V_0(a_n z) &= \operatorname{ch}(a_n z) \cos(a_n z), \\ V_1(a_n z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{ch}(a_n z) \sin(a_n z) + \operatorname{sh}(a_n z) \cos(a_n z)], \\ V_2(a_n z) &= \operatorname{sh}(a_n z) \sin(a_n z), \\ V_3(a_n z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{ch}(a_n z) \sin(a_n z) - \operatorname{sh}(a_n z) \cos(a_n z)], \\ \bar{\varphi}_n(x) &= D_0 V_0(\delta_n z) + D_1 V_1(\delta_n z) + D_2 V_2(\delta_n z) + D_3 V_3(\delta_n z), \end{aligned}$$

gdzie D_0, D_1, D_2 i D_3 są to stałe zależne od n , a funkcje $V(\delta_n z)$ posiadają postać (2.29).

2.3 Równanie powierzchni ugięcia. Uwzględniając otrzymane rozwiązania równanie powierzchni ugięcia (2.23) możemy zapisać

$$(2.30) \quad w = \sum_n [\psi_n(z) \varphi_n(y) + \bar{\psi}_n(z) \bar{\varphi}_n(y)] + F(x, y).$$

Wyrażenie (2.30) jest rozwiązaniem jednorodnego równania różniczkowego (2.6). Równanie powierzchni ugięcia dla danego obciążenia otrzymamy, jeśli do (2.30) dołączymy rozwiązanie szczególne równania różniczkowego niejednorodnego. Nie przedstawia to trudności, jeśli funkcja obciążenia wykazuje ciągłość dla całej powierzchni rusztu.

W przypadku kiedy funkcja wyrażająca obciążenie nie jest ciągła dla całej powierzchni rusztu, wygodniej jest posłużyć się metodą parametrów początkowych. Sposób ten jest znany w literaturze i wyrażenie, które należy dołączyć do rozwiązania równania różniczkowego w przypadku różnych obciążeń, można znaleźć w [4 i 5].

Dla obciążenia siłami skupionymi lub ciągłymi przyłożonymi wzdłuż prostej $z = c$ należy dołączyć wyrażenia

$$(2.31) \quad \sum_n \frac{a_n(c)}{B_1 2 \sqrt{2} \alpha_n^3} V_3[a_n(z-c)] \varphi_n(y), \quad \sum_n \frac{b_n(c)}{B_1 2 \sqrt{2} \delta_n^3} V_3[\delta_n(z-c)] \bar{\varphi}_n(y),$$

gdzie $a_n(c)$ i $b_n(c)$ oznaczają współczynniki rozłożenia obciążenia w szereg wg zależności (2.22).

Równanie powierzchni ugięcia rusztu (2.30) przy uwzględnieniu (2.31) przyjmuje postać

$$(2.32) \quad \begin{aligned} w_1 = \sum_n \left\{ C_0 V_0(a_n z) + C_1 V_1(a_n z) + C_2 V_2(a_n z) + C_3 V_3(a_n z) + \right. \\ \left. + \left\|_c \frac{a_n(c)}{B_1 2 \sqrt{2} \alpha_n^3} V_3[a_n(z-c)] \right\} \varphi_n(y) + \right. \\ \left. + \sum_n \left\{ D_0 V_0(\delta_n z) + D_1 V_1(\delta_n z) + D_2 V_2(\delta_n z) + D_3 V_3(\delta_n z) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left\|_c \frac{b_n(c)}{B_1 2 \sqrt{2} \delta_n^3} V_3[\delta_n(z-c)] \right\} \bar{\varphi}_n(y) + F(x, y), \right. \end{aligned}$$

gdzie $\|_c$ oznacza, że dla $z < c$ wyrażenie jest równe zeru.

Wyrażenie (2.32) jest równaniem powierzchni ugięcia rusztu dla obciążeń $a_n(c) \varphi_n(y)$ i $b_n(c) \bar{\varphi}_n(y)$. Obciążenie siłami skupionymi lub ciągłymi przyłożonymi wzdłuż prostej $z = c$ rozkłada się w szereg wg (2.22). Z powyższego wynika, że równanie powierzchni ugięcia rusztu dla obciążenia $p(y)$ przyłożonego wzdłuż prostej $z = c$ będzie sumą dwóch równań. Jednym jest równanie powierzchni ugięcia (2.32), a drugim będzie równanie powierzchni ugięcia rusztu dla obciążenia a_0 (2.22), czyli równomiernie rozłożonego wzdłuż prostej $z = c$. Dla innych typów obciążeń sposób rozwiązania będzie podobny, tylko wyrażenia (2.31) będą inne.

Stałe C_i oraz D_i w równaniu (2.32) są zależne od n , lecz dla prostoty zapisu indeks n opuszczono. Wartości stałych w (2.32) wyznaczmy z warunków brzegowych (2.1).

Uwzględniając (2.27) i (2.9) oraz wprowadzając oznaczenie

$$(2.33) \quad \begin{aligned} V(a_n 2a) &= V, & V(\delta_n 2a) &= \bar{V}, & A_n &= \frac{a_n(c)}{B_1 2\sqrt{2} a_n^3}, \\ V[a_n(2a-c)] &= V', & V[\delta_n(2a-c)] &= \bar{V}', & \bar{A}_n &= \frac{b_n(c)}{B_1 2\sqrt{2} \delta_n^3}, \\ \frac{1}{K_n} &= V_2^2 - V_1 V_3, & \frac{1}{\bar{K}_n} &= \bar{V}_2^2 - \bar{V}_1 \bar{V}_3, \\ S_n &= V_1' V_2 - V_0' V_3, & \bar{S}_n &= \bar{V}_1' \bar{V}_2 - \bar{V}_0' \bar{V}_3, \\ R_n &= V_0' V_2 - V_1' V_1, & \bar{R}_n &= \bar{V}_0' \bar{V}_2 - \bar{V}_1' \bar{V}_1 \end{aligned}$$

otrzymujemy następujące równanie powierzchni ugięcia rusztu po wstawieniu wyznaczonych wartości stałych C_i i D_i :

$$(2.34) \quad \begin{aligned} w_1 &= \sum_n A_n \{K_n [S_n V_0(a_n z) + R_n V_1(a_n z)] + \|c V_3 [a_n(z-c)]\} \varphi_n(y) + \\ &+ \sum_n \bar{A}_n \{\bar{K}_n [\bar{S}_n V_0(\delta_n z) + \bar{R}_n V_1(\delta_n z)] + \|c V_3 [\delta_n(z-c)]\} \bar{\varphi}_n(y) + F(\varphi, y). \end{aligned}$$

Zależność (2.34) przedstawia równanie powierzchni ugięcia rusztu dla obciążeń $a_n(c) \varphi_n(y)$ i $b_n(c) \bar{\varphi}_n(y)$ przyłożonych wzdłuż prostej $z = c$. Przez wypełnienie warunków brzegowych (2.1) i (2.2) otrzymaliśmy wszystkie krawędzie wolne od obciążeń. Wsparcie rusztu w narożach na sztywnych podporach uzyskamy dobierając stałe A_i w wyrażeniu (2.8) wg warunków (2.3). Wypełniając warunki (2.3) oraz wprowadzając oznaczenia

$$(2.35) \quad \begin{aligned} w_a &= \sum_n A_n K_n S_n \varphi_n(b), & \bar{w}_a &= \sum_n \bar{A}_n \bar{K}_n \bar{S}_n \bar{\varphi}_n(b), \\ w_b &= \sum_n A_n [K_n (S_n V_0 + R_n V_1) + V_3'] \varphi_n(b), & \bar{w}_b &= \sum_n \bar{A}_n [\bar{K}_n (\bar{S}_n V_0 + \\ & & + \bar{R}_n \bar{V}_1) + \bar{V}_3'] \bar{\varphi}_n(b) \end{aligned}$$

znajdujemy

$$(2.36) \quad F(x, y) = -w_a + (w_a - w_b) \frac{z}{2a} - \bar{w}_a \frac{y}{b} + (\bar{w}_a - \bar{w}_b) \frac{zy}{2ab}.$$

Wyrażenie $F(x, y)$ pozwoliło uzyskać dla wszystkich naroży $w_1 = 0$, czyli wsparcie rusztu na sztywnych podporach. Jednak wyrażenie $F(x, y)$ nie wpływa na wielkość naprężeń w belkach rusztu, co wynika z (2.9). Otrzymany wynik staje się jasny na podstawie pracy [11], gdzie wykazano, że wielkości reakcji w narożach płyty wspartej na czterech doskonale sztywnych podporach są niezależne od sztywności zginania w dwóch prostopadłych kierunkach.

Wyrażenia (2.34) i (2.36) określają równanie powierzchni ugięcia rusztu wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach poddanego działaniu obciążeń $a_n(c) \varphi_n(y)$ i $b_n(c) \bar{\varphi}_n(y)$, które jest przyłożone wzdłuż prostej $z = c$. Równanie powierzchni ugięcia dla obciążeń siłami skupionymi lub obciążeniem ciągłym przyłożonym wzdłuż prostej $z = c$ otrzymamy, jeśli dodamy do (2.34) równanie powierzchni ugięcia rusztu wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach przy działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia intensywnością a_0 (2.22) przyłożonego wzdłuż prostej $z = c$.

3. Równanie powierzchni ugięcia dla obciążenia $p(x)$

Wyznamy równanie powierzchni ugięcia rusztu wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach dla obciążenia $p(x)$, tzn. zależnego od zmiennej x i równomiernie rozłożonego wzdłuż osi y . Funkcja $p(x)$ może być określona na całej długości rusztu od $x = -a$ do $x = a$ lub tylko na odcinku o długości $a_1 < 2a$. Jeśli będzie to obciążenie a_0 [wg (2.22)] wzdłuż prostej $z = c$, to zamienimy je obciążeniem na odcinku o długości $2c_1$ (rys. 3), przyjmując $c_1 \ll a$. Intensywność obciążenia będzie wówczas $p = a_0/2c_1$.

Rozłożymy obciążenie $p(x)$ w szereg typu (2.22):

$$(3.1) \quad p(x) = q_0 + \sum_m [q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)].$$

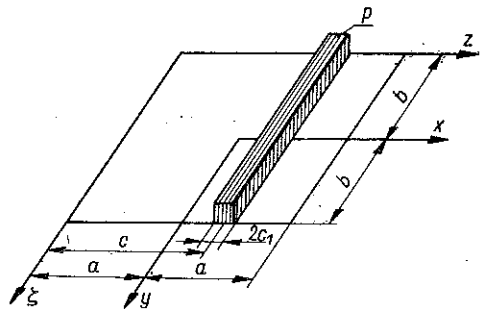
Funkcje $\varphi_m(x)$ i $\bar{\varphi}_m(x)$ posiadają taką samą formę jak (2.19), lecz o zmiennej x :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \varphi_m(x) &= \operatorname{ch} t_m \cos \frac{t_m}{a} x + \cos t_m \operatorname{ch} \frac{t_m}{a} x, \\ \bar{\varphi}_m(x) &= \operatorname{sh} \tau_m \sin \frac{\tau_m}{a} x + \sin \tau_m \operatorname{sh} \frac{\tau_m}{a} x. \end{aligned}$$

Wartości t_m i τ_m określa (2.17) zmieniając n na m .

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia rusztu przyjmie postać:

$$(3.3) \quad B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q_0 + \sum_m [q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)].$$



Rys. 3

Równanie (3.3) możemy napisać

$$(3.4) \quad B_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q_0,$$

$$B_1 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = \sum_m [q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)].$$

Z powyższego wynika, że równanie powierzchni ugięcia rusztu dla obciążeń $p(x)$ będzie sumą dwóch rozwiązań:

a) równania powierzchni ugięcia rusztu w_0 dla równomiernie rozłożonego obciążenia na całej powierzchni rusztu,

b) równania powierzchni ugięcia rusztu w_2 dla obciążeń $\sum_m [q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)]$.

3.1. Równanie powierzchni ugięcia dla obciążeń $q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)$. Przepiszemy równanie różniczkowe (3.4)₂ w zmienionej formie wprowadzając oznaczenie:

$$(3.5) \quad \mu^4 = \frac{1}{\eta^4} = \frac{B_1}{B_2},$$

$$(3.6) \quad \mu^4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = \frac{1}{B_2} \sum_m [q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)].$$

Równanie powierzchni ugięcia rusztu przyjmiemy w formie:

$$(3.7) \quad w_2 = \sum_m [\psi_m(y) \varphi_m(x) + \bar{\psi}_m(y) \bar{\varphi}_m(x)] + F_1(x, y);$$

$\varphi_m(x)$ i $\bar{\varphi}_m(x)$ — określają (3.2), $F_1(x, y)$ — napiszemy wg (2.7):

$$(3.8) \quad F_1(x, y) = \bar{A}_1 \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} + \bar{A}_2 \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} + \\ + \bar{A}_3 \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} + \bar{A}_4 \frac{(a+x)(b-y)}{4ab}.$$

Równanie powierzchni ugięcia rusztu w_2 powinno spełniać warunki wsparcia rusztu w czterech narożach na sztywnych podporach, co określają warunki brzegowe (2.1), (2.2) i (2.3).

Widzimy, że warunki (2.1) są spełnione, co uzyskaliśmy przez dobór funkcji $\varphi_m(x)$ i $\bar{\varphi}_m(x)$. Warunki (2.3) spełnimy dobierając odpowiednio stałe \bar{A} zależności (3.8). Warunki (2.2) czyli dla krawędzi $y = \pm b$ wypełnimy przez odpowiedni dobór funkcji $\psi_m(y)$ i $\bar{\psi}_m(y)$.

Wstawiając (3.7) w równanie różniczkowe (3.6) otrzymujemy:

$$(3.9) \quad \sum_m \{[\psi_m^{IV}(y) + \mu^4 k_m^4 \psi_m(y)] \varphi_m(x) + [\bar{\psi}_m^{IV}(y) + \mu^4 r_m^4 \bar{\psi}_m(y)] \bar{\varphi}_m(x)\} = \\ = \frac{1}{B_2} \sum_m [q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)],$$

gdzie

$$k_m = \frac{t_m}{a}, \quad r_m = \frac{\tau_m}{a}.$$

Równanie różniczkowe (3.9), uwzględniając ortogonalność funkcji $\bar{\varphi}_m(x)$ i $\varphi_m(x)$, możemy zamienić dwoma równaniami dla wyznaczenia funkcji $\psi_m(y)$ i $\bar{\psi}_m(y)$

$$(3.10) \quad \psi_m^{IV}(y) + 4\beta_m^4 \psi_m(y) = \frac{q_m}{B_2}, \quad \bar{\psi}_m^{IV}(y) + 4\varepsilon_m^4 \bar{\psi}_m(y) = \frac{\bar{q}_m}{B_2}.$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$(3.11) \quad \beta_m = \frac{\mu t_m}{\sqrt{2}a}, \quad \varepsilon_m = \frac{\mu \tau_m}{\sqrt{2}a}.$$

Rozwiązania równania różniczkowego (3.10) napiszemy w formie:

$$(3.12) \quad \psi_m(y) = \frac{q_m [1 + W_0(\beta_m y)]}{B_2 2\beta_m^4} + C_0 W_0(\beta_m \xi) + C_1 W_1(\beta_m \xi) + \\ + C_2 W_0[\beta_m(2b - \xi)] + C_3 W_1[\beta_m(2b - \xi)],$$

$$(3.13) \quad \bar{\psi}_m(y) = \frac{\bar{q}_m [1 + \bar{W}_0(\varepsilon_m y)]}{B_2 4\varepsilon_m^4} + D_0 W_0(\varepsilon_m \xi) + D_1 W_1(\varepsilon_m \xi) + \\ + D_2 W_0[\varepsilon_m(2b - \xi)] + D_3 W_1[\varepsilon_m(2b - \xi)].$$

Wprowadzono oznaczenia wg rys. 3

$$(3.14) \quad \xi = b + y.$$

Funkcje W posiadają taką samą formę jak funkcje określone wzorami (2.29). Stałe całkowania C_0, \dots, C_3 i D_0, \dots, D_3 , które są zależne od m , lecz dla prostszego zapisu indeks m opuszczono, wyznaczymy z warunków brzegowych (2.2).

Wypełniając warunki brzegowe (2.2), uwzględniając (3.12) i (3.13) oraz ortogonalność funkcji $\varphi_m(x)$ i $\bar{\varphi}_m(x)$ i wprowadzając oznaczenia

$$(3.15) \quad W(\beta_m b) = W', \quad W(\varepsilon_m b) = \bar{W}', \quad \frac{q_m}{B_2 4\beta_m^4} = Z_m, \\ W(\beta_m 2b) = W, \quad W(\varepsilon_m 2b) = \bar{W}, \quad \frac{\bar{q}_m}{B_2 4\varepsilon_m^4} = \bar{Z}_m,$$

$$\frac{1}{N_m} = W_2^2 - W_1 W_3, \quad \bar{M}_m = \bar{W}_1 \bar{W}_3 - \bar{W}_2 \bar{W}_2,$$

$$\frac{1}{\bar{N}_m} = \bar{W}_2^2 - \bar{W}_1 \bar{W}_3, \quad L_m = W_2' W_1 - W_1' W_2,$$

$$M_m = W_1' W_3 - W_2' W_2, \quad \bar{L}_m = \bar{W}_2' \bar{W}_1 - \bar{W}_1' \bar{W}_2,$$

$$W_0(\xi) = W_0(\beta_m \xi) + W_0[\beta_m(2b - \xi)],$$

$$W_1(\xi) = W_1(\beta_m \xi) + W_1[\beta_m(2b - \xi)],$$

$$\bar{W}_0(\xi) = W_0(\varepsilon_m \xi) + W_0[\varepsilon_m(2b - \xi)],$$

$$\bar{W}_1(\xi) = W_1(\varepsilon_m \xi) + W_1[\varepsilon_m(2b - \xi)]$$

otrzymujemy po wstawieniu wartości stałych

$$(3.16) \quad w_2 = \sum_m Z_m \{[1 + W_0(\beta_m \xi)] + N_m [M_m W_0(\xi) + L_m W_1(\xi)]\} \varphi_m(x) + \\ + \sum_m \bar{Z}_m \{[1 + W_0(\varepsilon_m \xi)] + \bar{N}_m [\bar{M}_m \bar{W}_0(\xi) + \bar{L}_m \bar{W}_1(\xi)]\} \bar{\varphi}_m(x) + F_1(x, y).$$

Wartości stałych \bar{A}_i funkcji $F_1(x, y)$ wyznaczymy z warunków (2.3).

Uwzględniając (2.27) i (3.14) oraz wprowadzając oznaczenia:

$$(3.17) \quad \sum_m Z_m \{1 + W'_0 + N_m [M_m(1 + W_0) + L_m W_1]\} \varphi_m(a) = w_a, \\ \sum_m \bar{Z}_m \{1 + \bar{W}'_0 + \bar{N}_m [\bar{M}_m(1 + \bar{W}_0) + \bar{L}_m \bar{W}_1]\} \bar{\varphi}_m(a) = \bar{w}_a,$$

znajdujemy

$$(3.18) \quad F_1(x, y) = -w_a - \bar{w}_a \frac{x}{a}.$$

Równanie (3.16) przy uwzględnieniu (3.18) jest równaniem powierzchni ugięcia rusztu, wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach dla obciążenia $\sum_m [q_m \varphi_m(x) + \bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)]$ określonego przez (3.1).

4. Równanie powierzchni ugięcia dla równomiernie rozłożonego obciążenia

Równanie różniczkowe i warunki brzegowe, które musi spełniać równanie powierzchni ugięcia rusztu wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach w przypadku równomiernie rozłożonego obciążenia na całej powierzchni, są następujące:

równania różniczkowe

$$(4.1) \quad \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \eta^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = \frac{q_0}{B_1};$$

warunki brzegowe — (2.1), (2.2) i (2.3).

Równanie powierzchni ugięcia rusztu weźmiemy pod uwagę w postaci

$$(4.2) \quad w_0 = \frac{q_0}{48B_1} \left[x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4 + \frac{1}{\eta^4} (y^4 - 6b^2 y^2 + 5b^4) \right] + \\ + \sum_n [A_n V_0(\varphi_n x) + B_n V_2(\varphi_n x)] \cos h_n y + \sum_n [C_n V_0(\theta_n y) + \\ + D_n V_2(\theta_n y)] \cos s_n x.$$

Taki sposób rozwiązania stosował B. G. GALERKIN w [9] wyznaczając równanie powierzchni ugięcia płyty wspartej w czterech narożach. Wprowadzono oznaczenia

$$(4.3) \quad h_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}, \quad s_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a},$$

$$\varphi_n = \eta \frac{h_n}{\sqrt{2}} = \frac{(2n-1)\pi\eta}{2\sqrt{2}b}, \quad \theta_n = \eta \frac{s_n}{\sqrt{2}} = \frac{(2n-1)\pi\eta}{2\sqrt{2}a}, \quad \eta^4 = \frac{B_2}{B_1}.$$

Funkcje V posiadają taką samą formę jak funkcje określone wzorami (2.29). Wyrażenie (4.2) jest rozwiązaniem równania różniczkowego (4.1) i spełnia warunki (2.3) niezależnie od wartości A, B, C i D , które wyznaczymy z warunków (2.1) i (2.2):

$$(4.4) \quad A_n = B_n \frac{V_0(\varphi_n a)}{V_2(\varphi_n a)} = B_n S_{na},$$

$$C_n = D_n \frac{V_0(\theta_n b)}{V_2(\theta_n b)} = D_n S_{nb},$$

$$\frac{q_0 a}{2B_1} - \sum_n 2\sqrt{2}\varphi_n^3 B_n [S_{na} V_1(\varphi_n a) + V_3(\varphi_n a)] \cos h_n y + \sum_n s_n^3 D_n [S_{nb} V_0(\theta_n y) + V_2(\theta_n y)] (-1)^{n+1} = 0,$$

$$\frac{q_0 a}{2B_2} + \sum_n h_n^3 B_n [S_{na} V_0(\varphi_n x) + V_2(\varphi_n x)] (-1)^{n+1} - \sum_n 2\sqrt{2}\theta_n^3 D_n [S_{nb} V_1(\theta_n b) + V_3(\theta_n b)] \cos s_n x = 0.$$

Rozłożymy w szeregi trygonometryczne według $\cos h_n y$ pierwszy i trzeci wyraz równania (4.4)₃ oraz według $\cos s_n x$ pierwszy i drugi wyraz równania (4.4)₄, zmieniając sumowanie wyrazów znajdujących się pod znakiem sumy z n na m , oraz wprowadzimy oznaczenia:

$$(4.5) \quad S_{na} V_1(\varphi_n a) + V_3(\varphi_n a) = N_{na},$$

$$S_{nb} V_1(\theta_n b) + V_3(\theta_n b) = N_{nb},$$

$$\frac{16q_0 ab^3}{B_1 \pi^4 \eta^3} = E_a, \quad \frac{16qa^3 b}{B_2 \pi^4 \eta^3} = E_b, \quad \frac{4}{\pi\gamma^3 \eta^3} = \varepsilon_a, \quad \frac{4\gamma^3}{\pi\eta^3} = \varepsilon_b, \quad \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4} = e_n,$$

$$(4.6) \quad M_{mn} = \frac{V_2(\theta_m b) (2m-1)^3 (-1)^{m+1} (-1)^{n+1}}{(2n-1)^4 + \frac{\eta^4}{\gamma^4} (2m-1)^4} (1 + S_{mb}^2),$$

$$H_{mn} = \frac{V_2(\varphi_m a) (2m-1)^3 (-1)^{m+1} (-1)^{n+1}}{(2n-1)^4 + \eta^4 \gamma^4 (2m-1)^4} (1 + S_{ma}^2).$$

Wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy następujące równanie dla wyznaczenia stałych B_n i D_n :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} -B_n N_{na} + \varepsilon_a \sum_m D_m M_{mn} &= -E_a e_n, \\ \varepsilon_b \sum_m B_m H_{mn} - D_n N_{nb} &= -E_b e_n. \end{aligned}$$

Równania (4.7) pozwalają wyznaczyć wartości stałych B_n oraz D_n . Rozwiązując w sposób ścisły należałoby napisać nieskończoną ilość równań dla $n = 1, 2, 3, \dots$ i $m = 1, 2, 3, \dots$ i następnie je rozwiązać. Dla praktycznych obliczeń najprawdopodobniej wystarczy znaleźć po trzy albo cztery wartości B_n i D_n .

Równanie powierzchni ugięcia rusztu (4.2) napiszemy w prostszej formie, uwzględniając przyjęte oznaczenia:

$$(4.8) \quad w_0 = \frac{q_0}{48B_1} \left[x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4 + \frac{1}{\eta^4} (y^4 - 6b^2 y^2 + 5b^4) \right] + \\ + \sum_n B_n [S_{na} V_0(\varphi_n x) + V_2(\varphi_n x)] \cos h_n y + \\ + \sum_n D_n [S_{nb} V_0(\theta_n y) + V_2(\theta_n y)] \cos s_n x.$$

5. Równanie powierzchni ugięcia rusztu dla dowolnego obciążenia

Równanie powierzchni ugięcia rusztu wspartego w czterech narożach na sztywnych podporach będzie w najogólniejszym przypadku obciążenia sumą trzech otrzymanych rozwiązań:

$$(5.1) \quad w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_0(x, y).$$

Wyrażenia z prawej strony określone są wzorami (2.34), (3.16) i (4.8). Podamy dla przykładu sposób rozwiązania w przypadku obciążenia rusztu siłą skupioną P (rys. 4).

Obciążenie siłą skupioną P przyłożoną w punkcie x_0, y_0 zamienimy obciążeniem równomiernie rozłożonym na odcinku o długości $2d_1$ przyjmując $d_1 \ll b$. Otrzymamy

$$(5.2) \quad 2d_1 = y_2 - y_1$$

$$\text{oraz } y_2 = y_0 + d_1, \quad y_1 = y_0 - d_1.$$

Obciążenie równomiernie rozłożone:

$$(5.3) \quad p(y) = \frac{P}{2d_1} \\ p(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y_1 > y \text{ i } y > y_2, \\ \frac{P}{2d_1} & \text{dla } y_1 \leq y \leq y_2. \end{cases}$$

Rozkładamy $p(y)$ w szereg wg (2.22).

Dla obciążeń $a_n \varphi_n(y)$ i $b_n \bar{\varphi}_n(y)$ równanie powierzchni ugięcia określa $w_1(x, y)$, (2.34). Wyraz a_0 (2.22) rozkładamy w szereg wg (3.1). Równanie powierzchni ugięcia dla obciążeń $q_m \varphi_m(x)$ i $\bar{q}_m \bar{\varphi}_m(x)$ określa $w_2(x, y)$ wg (3.16).

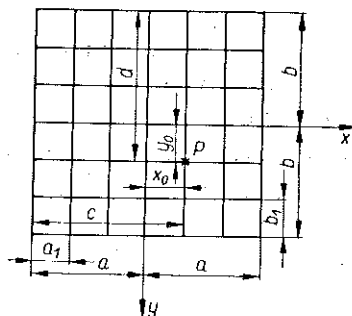
Natomiast q_0 jest równomiernie rozłożonym obciążeniem na całej powierzchni rusztu i równanie powierzchni ugięcia rusztu określa $w_0(x, y)$ wg (4.8).

6. Przykład liczbowy

Wykonamy przykład liczbowy wyznaczenia momentu zginającego belkę rusztu przedstawionego na rys. 4, przyjmując następujące dane:

$$\gamma = \frac{a}{b} = 0,6, \quad a_1 = \frac{a}{3}, \quad x_0 = a_1,$$

$$\eta^4 = \frac{B_2}{B_1} = 2, \quad b_1 = \frac{b}{3}, \quad y_0 = b_1.$$



Rys. 4

Ruszt obciążony jest siłą skupioną P przyłożoną w punkcie o współrzędnych x_0, y_0 . Znajdujemy (rys. 4)

$$c = a + b_1, \quad d = b + b_1.$$

6.1. Wyznaczenie obciążeń dla poszczególnych rozwiązań. Rozłożymy obciążenie siłą P w szereg (2.22), zamieniając je równomiernie rozłożonym obciążeniem na odcinku o długości $2d_1$ i przyjmując $d_1 = b/10$. Znajdujemy

$$(6.1) \quad qa = \frac{P}{2d_1} = \frac{5P}{b}.$$

Obciążenie określone jest funkcją

$$p(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < b_1 - d_1 \text{ i } y > b_1 + d_1, \\ qa & \text{dla } b_1 - d_1 \leq y \leq b_1 + d_1. \end{cases}$$

Współczynniki rozłożenia w szereg wg (2.22).

Wyrażenie a_0 jest równomiernie rozłożonym obciążeniem wzdłuż prostej $x = c$. Znajdziemy dla tego obciążenia rozłożenie w szereg wg (3.1) — zamieniając je obciążeniem wzdłuż pasma o szerokości c_1 i przyjmując $c_1 = a/10$. Znajdujemy

$$(6.2) \quad qc = \frac{a_0}{2c_1} = \frac{5P}{2ab}.$$

Obciążenie określone jest funkcją

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a_1 - c_1 \text{ i } x > a_1 + c_1, \\ qc & \text{dla } a_1 - c_1 \leq x \leq a_1 + c_1. \end{cases}$$

Współczynniki rozłożenia w szereg wg (3.1).

Wyznaczone w ten sposób współczynniki określają wartości obciążeń dla odpowiednich równań powierzchni ugięcia rusztu.

6.2. Wyznaczenie momentu zginającego belkę. Napišemy wzory na wyznaczenie momentu zginającego belkę równoległą do osi y , położenie której określa współrzędna $x = x_0$. Określmy moment w przekroju przyłożenia siły, czyli dla $y = y_0$.

Wstawiając (5.1) w (1.3) znajdujemy

$$(6.3) \quad M_y = -B_2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right).$$

Powyzsza zależność określa rozłożony wzdłuż prostej $y = y_0$ moment zginający. Belki rusztu, odległość pomiędzy którymi wynosi a_1 , będą obciążone wartością momentu przypadającego na odcinek o długości a_1 , w środku którego położona jest belka. Moment zginający jedną belkę wyznaczmy, jeśli zsumujemy rozłożony moment zginający na odcinku o długości a_1 .

Napišemy to następująco:

$$(6.4) \quad M_{x_0, y_0} = \int_{x_1}^{x_2} M_{y_0} dx = -B_2 \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right]_{y_0} dx = \\ = M_1 + M_2 + M_0,$$

gdzie

$$x_1 = x_0 - \frac{a_1}{2}, \quad x_2 = x_0 + \frac{a_1}{2},$$

$$x_1 = x_0 + \frac{a_1}{2}, \quad x_2 = x_0 + \frac{a_1}{2}.$$

6.3. Moment gnący dla obciążenia q_0 . Równanie powierzchni ugięcia dla równomiernie rozłożonego obciążenia q_0 określa wyrażenie (4.8). Wartości stałych B_n i D_n wyznaczmy rozwiązując układy równań (4.7). Wyznaczmy po trzy wartości stałych B_n i D_n , czyli przyjmując w równaniach $n = m = 3$. Z tablic [7] znajdujemy wartości funkcji V_i (2.29), uwzględniając (4.3) i po wyznaczeniu odpowiednich wartości wg (4.7) napišemy układ równań stałych B_1, B_2, B_3 i D_1, D_2, D_3 :

$$\begin{aligned} 0,343154D_1 - 24,9586D_2 - 388,701D_3 - 0,538057B_1 &= -E_1 \gamma^4 \eta^4, \\ -0,0584737D_1 + 23,4585D_2 + 385,503D_3 - 1,56242B_2 &= 0,0123457 E_1 \gamma^4 \eta^4, \\ 0,0088045D_1 - 16,6524D_2 - 365,084D_3 + 7,25557B_3 &= -0,0016 E_1 \gamma^4 \eta^4, \\ 2,56213B_1 - 9,68184B_2 - 27,5598B_3 - 30,8253D_1 &= -E_1, \\ -0,039703B_1 + 2,08788B_2 + 18,4866B_3 - 5000,37D_2 &= 0,0123457E_1, \\ 0,00515985B_1 - 0,329653B_2 - 5,70807B_3 + 130591D_3 &= -0,0016E_1. \end{aligned}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań znajdujemy:

$$\begin{aligned} B_1 &= 0,53229 E_1, & D_1 &= 0,078463 E_1, \\ B_2 &= -0,0051525 E_1, & D_2 &= -1,0267 \cdot 10^{-5} E_1, \\ B_3 &= -0,00017868 E_1, & D_3 &= -5,48 \cdot 10^{-8} E_1. \end{aligned}$$

Wprowadzono oznaczenie

$$E_1 = \frac{4q_0 b^4}{B_1 \pi^3 \eta^3}.$$

Widzimy, że wartości stałych ze wzrostem n bardzo szybko maleją i dlatego dla praktycznych obliczeń wystarczającą dokładność można otrzymać przyjmując w zależnościach (4.7) $n = 1, 2$ i $m = 1, 2$.

Wstawiając w (6.4) otrzymane wartości stałych oraz odczytane z tablic wartości funkcji znajdujemy

$$M_0 = 0,086105 q_0 b^3.$$

6.4. Wyznaczenie momentów M_1 i M_2 . Momenty zginające M_1 i M_2 określają wyrażenia (6.4) przy uwzględnieniu (2.34) i (3.16). Odczytując z tablic odpowiednie wartości funkcji V_i i V'_i oraz W_i i W'_i a także wartości funkcji trygonometrycznych i biorąc przy wyznaczaniu M_1 po trzy wyrazy szeregu, a dla M_2 dwa wyrazy szeregu, znajdujemy

$$M_1 = 0,00240487 q_a b^2, \quad M_2 = 0,00135803 q_c \frac{a^3}{2}.$$

Przyjęcie przy wyznaczaniu M_1 trzech wyrazów szeregu a dla M_2 dwóch, w wykonanym przykładzie okazało się wystarczające, ponieważ dalsze wyrazy dawały wartości poniżej 1% w stosunku do pierwszego. Biorąc pod uwagę, że wyznaczamy moment w miejscu przyłożenia siły, można stwierdzić, że zbieżność szeregów jest duża.

6.5. Moment zginający rozpatrywaną belkę rusztu. Całkowity moment zginający otrzymamy wstawiając znalezione wartości w (6.4)

$$M_{x_0 y_0} = q_0 b^3 0,086105 + q_a b^2 0,00240487 + q_c \frac{a^3}{2} 0,00135803.$$

Uwzględniając wartości współczynników rozłożenia w szereg znajdziemy

$$M_{x_0 y_0} = 0,4963 P b.$$

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, t. 2, PWN, Warszawa 1960.
2. W. GUTKOWSKI, *Płyty kratowe z elementów powtarzalnych*, Rozpr. Inżyn. 1, (1965).
3. П. Ф. Панкович, *Строительная механика корабля*, часть I, т. II, Москва-Ленинград 1947.
4. П. Ф. Панкович, *Труды по строительной механике корабля*, Т. II, Ленинград.

5. Я. А. Короткин и другие, *Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем*, Москва-Ленинград 1953.
6. М. С. Минцковский, *Перекрестные фермы*, Изд. Акад. Арх. УССР, 1950.
7. К. Науасхи, А. С. Барк, *Многозначные таблицы круговых, гиперболических и других функций*, Москва 1965.
8. М. М. Филоменко-Борович и другие, *Курс сопротивления материалов*, ч. 2, Москва 1956.
9. Б. Г. Галеркин, *Собрание Трудов*, Т. 2, Москва 1953.
10. И. Г. Попов, *О расчете системы балок на упругих опорах*, Напч. Труды Ленингр. Инж. — Строит. Унститута 23, 1956.
11. К. CIEŚLAK, *Wyznaczenie reakcji czteropodporowych układów wspartych w czterech narożach na doskonale sztywne podpory* (w druku).

Р е з ю м е

**ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПЛОСКИЙ РОСТВЕРК,
ОПЕРТЫЙ НА ЧЕТЫРЕХ УГЛАХ НА ЖЕСТКИХ ОПОРАХ**

Решается вопрос статики, т. е. определения прогибов и обобщенных сил в балках прямоугольного ортотропного ростверка, опертого по четырем углам на жестких подпорах. Принимая, что числобалок в каждом направлении больше пяти, а их жесткости на кручение являются малыми и можно ими пренебречь, задача сводится к рассмотрению ортотропной пластинки, обладающей нулевой скоростью на кручение. Определяется уравнение поверхности прогиба, которая для произвольной нагрузки выражается суммой трех элементов (5.1).

Дается числовой пример для нагрузки ростверка сосредоточенной силой P . Определяется момент изгибающей балку в сечении приложения силы.

Получается достаточная для практических расчетов точность, принимая для w_1 (2.34) три для w_0 (4.8) и w_2 (2.16) по два выражения рядов.

S u m m a r y

**A RECTANGULAR PLANE GRATE ON RIGID SUPPORTS
AT THE CORNERS**

The problem solved is that of determining the deflections and the generalized forces in the bars of a rectangular orthotropic grate resting on rigid supports at the corners. Assuming that the number of bars is larger than five in both directions and that their torsional rigidity is low and may, therefore, be rejected, the problem is reduced to the discussion of an orthotropic plate with zero torsional rigidity. The equation of the deflection surface is derived. The expression obtained is a sum of three components (5.1).

A numerical example is given for a grate loaded by a concentrated force P . The bending moment is determined in the cross-section passing through that force. An accuracy sufficient for practical purposes is achieved by taking three terms of the series w_1 (2.34) and two terms of the series w_0 (4.8) and w_2 (2.16).

KATEDRA MASZYN ROBOCZYCH CIĘŻKICH
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lipca 1966 r.