

POWŁOKI W KSZTAŁCIE WALCA NIEKOŁOWEGO (1)

SUKUMAR BASULI (JALPAIGURI, INDIA)

1. Oznaczenia

- x współrzędna punktu na powierzchni powłoki mierzona wzdłuż tworzącej od wybranej kierownicy,
 s odległość w mierze łukowej punktu wzdłuż kierownicy od ustalonej tworzącej,
 z odległość mierzona wzdłuż normalnej od powierzchni środkowej,
 φ normalna odległość kątowna punktu od ustalonej tworzącej,
 ρ lokalny promień krzywizny jako funkcja s lub φ ,
 u, v, w przemieszczenie osiowe, styczne i normalne,
 D operator różniczkowy cząstkowy $\partial/\partial x$

D' operator różniczkowy cząstkowy $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$,

∇^4 operator różniczkowy cząstkowy czwartego rzędu $D^4 + 2D^2 D'^2 + D'^4$,
 składowe odkształcenia,

$\varepsilon_x, \varepsilon_s$ lub $\varepsilon_\varphi, \gamma_{xs}$ lub $\gamma_{x\varphi}$ składowe naprężenia,

σ_x, σ_φ lub $\sigma_s, \tau_{x\varphi}$ lub τ_{xs} siły membranowe,

N_x, N_φ lub $N_s, N_{x\varphi}$ lub N_{xs}

M_x, M_φ lub $M_s, M_{x\varphi} \equiv M_{\varphi x}$
 lub $M_{xs} \equiv M_{sx}$ momenty gnące,

t grubość powłoki,

L długość powłoki,

ν współczynnik Poissona materiału powłoki,

E moduł Younga materiału powłoki,

$$F = \frac{Et}{1-\nu^2},$$

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \text{ sztywność giętna powłoki,}$$

p_x, p_φ lub p_s, p_ρ składowe obciążenia w kierunkach x, φ lub s i z .

2. Wstęp

Prawie kołowo walcowe powłoki posiadają duże znaczenie z tego względu, że do takich powłok często degenerują się powłoki kołowe. Wiele zagadnień zginania prawie kołowych lub owalnych powłok walcowych zostało rozwiązanych przez F. ROMANO i J. KEMPNERA (1958), W.P. VAFAKOSA (1960), E. CHORNEGO (1961), N. NISSELA (1962) oraz W.P. VAFAKOSA, F. ROMANO i J. KEMPNERA (1962).

(1) Z angielskiego przełożył J. Bejda.

Zamierzeniem autora niniejszej pracy jest znalezienie naprężeń i przemieszczeń dowolnej powłoki walcowej. Istnieje wiele cylindrycznych elementów konstrukcyjnych, których krzywizny przekrojów poprzecznych mogą być w niezbyt skomplikowanej postaci opisane ściśle lub ogólniej w sposób przybliżony za pomocą długości łuku od danej tworzącej lub przez kąt zawarty między ustaloną normalną i normalną przechodzącą przez określony punkt. Obydwa typy zagadnienia potraktowane zostały tutaj jednocześnie. Żądane równania przemieszczeniowe składają się z jednego równania różniczkowego ósmego rzędu dla składowej normalnej przemieszczenia i dwóch równań czwartego rzędu dla u i v zawierających tylko składową w . Proponowane rozwiązanie dla przemieszczeń i składowych obciążenia przyjmuje się w postaci szeregów typu Levy'ego. Otrzymano wyrażenia na składowe przemieszczenia dla powłoki, której krzywizna zmienia się wraz z długością łuku w sposób wykładniczy. Obliczenia numeryczne dla powłoki o długości L i szerokości S otrzymano za pomocą odpowiedniej tablicy czterocyfrowej.

Analiza sił membranowych i przemieszczeń była przeprowadzona przez E. WIEDEMANN (1937), którego pewne rezultaty można znaleźć w istniejących monografiach dotyczących teorii powłok. Zginaniem powłok walcowych o eliptycznym przekroju poprzecznym zajmowali się R.A. CLARK, T.I. GILROY i E. REISSNER (1952).

3. Równania podstawowe

Związki odkształcenie-przemieszczenie i równanie różniczkowe dla przemieszczeń można znaleźć w pracach J. KEMPNERA (1958 i 1960). Można je również łatwo wyprowadzić postępując ściśle według uproszczonej metody (tzn. zaniehbując trapezoidalny kształt przekroju $x = \text{const}$) opracowanej przez FLUGGE, (1962) dla powłoki kołowej. Opuszczając pracochłonne obliczenia można wypisać ostateczne wyniki otrzymane metodą Flugge opisujące całkowicie badane zagadnienie.

(a) Związki między odkształceniami i przemieszczeniami:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= Du - zD'^2 w, \\ \varepsilon_\varphi \quad \text{lub} \quad \varepsilon_s &= D'v + \frac{w}{\rho} - zD'^2 m, \\ \gamma_{x\varphi} \quad \text{lub} \quad \gamma_{xs} &= Dv + D'u - 2zDD'w. \end{aligned}$$

(b) Związki między naprężeniami i przemieszczeniami:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[Du + \nu \left(D'v + \frac{w}{\rho} \right) - z(D^2 + \nu D'^2) w \right], \\ \sigma_\varphi \quad \text{lub} \quad \sigma_s &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[D'v + \frac{w}{\rho} + \nu Du - z(D'^2 + \nu D^2) w \right], \\ \tau_{x\varphi} \quad \text{lub} \quad \tau_{xs} &= \frac{E}{1+\nu} [Dv + D'u - 2zDD'w]. \end{aligned}$$

(c) Siły membranowe i momenty:

$$\begin{aligned}
 N_x &= F \left(Du + \nu D' v + \frac{\nu}{\rho} w \right), \\
 N_\varphi \quad \text{lub} \quad N_s &= F \left(D' v + \nu Du + \frac{w}{\rho} \right), \\
 (3.3) \quad N_{x\varphi} \quad \text{lub} \quad N_{xs} = N_{\varphi x} \quad \text{lub} \quad N_{sx} &= \frac{F(1-\nu)}{2} (Dv + D' u), \\
 M_x &= k (D^2 + \nu D'^2) w, \\
 M_\varphi \quad \text{lub} \quad M_s &= k (D'^2 + \nu D^2) w, \\
 M_{x\varphi} \quad \text{lub} \quad M_{xs} = M_{\varphi x} \quad \text{lub} \quad M_{sx} &= k (1-\nu) DD' w.
 \end{aligned}$$

(d) Równania równowagi:

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad DN_x + D' N_{x\varphi} + p_x &= 0, \\
 D' N_\varphi + DN_{x\varphi} - \frac{1}{\rho} D' M_\varphi - DD' M_{x\varphi} + p_\varphi &= 0, \\
 D'^2 M_\varphi + DD' M_{x\varphi} + D^2 M_x + DD' M_{\varphi x} + \frac{N_\varphi}{\rho} - p_e &= 0.
 \end{aligned}$$

W równaniach tych wskaźnik φ jest zastąpiony przez s dla współrzędnych x, s .

(e) Równania różniczkowe dla przemieszczeń.

Podstawiając siły i momenty z (3.3) do równań równowagi (3.4) otrzymamy równania różniczkowe dla przemieszczeń:

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad D^2 u + \frac{1-\nu}{2} D'^2 u + \frac{1+\nu}{2} DD' v + \frac{\nu}{\rho} Dw + \frac{p_x}{F} &= 0, \\
 D'^2 v + \frac{1-\nu}{2} D^2 v + \frac{1+\nu}{2} DD' u + D' \left(\frac{w}{\rho} \right) + \frac{p_\varphi}{F} &= 0, \\
 \nabla^4 w + \frac{12}{\rho l^2} \left(D' v + \frac{w}{\rho} + \nu Du \right) - \frac{p_e}{k} &= 0.
 \end{aligned}$$

Celem wyznaczenia v z pierwszego i drugiego równania powyższego układu równań wykonajmy operację DD' na drugim równaniu, a następnie wyrażmy $D^3 D'u$ i $DD'^3 u$ przez v i w za pomocą równania pierwszego. Jako wynik otrzymamy równanie

$$(3.6) \quad \nabla^4 u = \frac{1}{F} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} DD' p_\varphi - \frac{2}{1-\nu} D'^2 p_x - D^2 p_x \right) + [DD'^2 - \nu D^3] \frac{w}{\rho}.$$

Eliminując u w podobny sposób otrzymamy wyrażenie na v :

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \nabla^4 v &= \frac{1}{F} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} DD' p_x - \frac{2}{1-\nu} D^2 p_\varphi - D'^2 p_\varphi \right) - \\
 &\quad - [D'^3 + (2+\nu) D^2 D'] \frac{w}{\rho}.
 \end{aligned}$$

Wykonując teraz operację ∇^4 z równań (3.5)₃ i wykorzystując (3.6) oraz (3.7), znajdziemy równanie różniczkowe ósmego rzędu typu Donnella:

$$(3.8) \quad \nabla^4 (\varrho \nabla^4 w) + \frac{12(1-\nu^2)}{\varrho f^2} D^4 w = \frac{1}{k} \nabla^4 (\varrho p_e) + \frac{1}{k} [v D^3 p_x + \\ + D'^3 p_\varphi + (2+\nu) D^2 D' p_\varphi - DD'^2 p_x].$$

4. Metoda rozwiązania

Dla powłoki o końcach $x = 0$ i $x = L$ swobodnie podpartych mamy dla tych wartości

$$w = v = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

poza tym u, v, w będą symetryczne względem kierownicy $x = L/2$.

Poszukujemy u, v, w w postaci

$$(4.1) \quad u = \sum_{m=1,3,\dots} u_m \cos \frac{m\pi x}{L}, \\ v = \sum_{m=1,3,\dots} v_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \\ w = \sum_{m=1,3,\dots} w_m \sin \frac{m\pi x}{L}.$$

Wyżej wspomniane warunki brzegowe i warunki symetrii mogą być spełnione ściśle, a u_m, v_m, w_m są funkcjami φ lub s . Wykorzystując wyrażenia na u, v, w oraz wyrażając składowe obciążenia zewnętrznego w postaci szeregów

$$(4.2) \quad p_x = \sum_{m=0,1,3,\dots} p_{x,m} \cos \frac{m\pi x}{L}, \\ p_s \text{ lub } p_\varphi = \sum_{m=1,3,\dots} (p_{s,m} \text{ lub } p_{\varphi,m}) \sin \frac{m\pi x}{L}, \\ p_e = \sum_{m=1,3} p_{e,m} \sin \frac{m\pi x}{L}$$

równania (3.8), (3.6) i (3.7) doprowadzamy do postaci

$$(4.3) \quad \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \left[\varrho \left\{ D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\}^2 w_m \right] + \frac{12(1-\nu^2)}{\varrho f^2} \times \\ \times \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 w_m = \frac{1}{k} \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \varrho p_{e,m} + \frac{1}{k} \left[v \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 p_{x,m} + \right. \\ \left. + D'^3 p_{s,m} - (2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 D' p_{s,m} + \frac{m\pi}{L} D'^2 p_{x,m} \right],$$

$$\begin{aligned} \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 u_m &= \frac{1}{F} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m\pi}{L} D' p_{s,m} - \frac{2}{1-\nu} D'^2 p_{x,m} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 p_{x,m} \right] + \left[\frac{m\pi}{L} D'^2 + \nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \right] \frac{w_m}{\varrho}, \\ \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 v_m &= \frac{1}{F} \left[-\frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L} \right) D' p_{x,m} + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 p_{s,m} - \right. \\ &\quad \left. - D'^2 p_{s,m} \right] - \left[D'^3 - (2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 D' \right] \frac{w_m}{\varrho}. \end{aligned}$$

Założmy obecnie, że promień krzywizny jest funkcją s . Jeśli krawędzie $s = 0$ i $s = S$ będą również swobodnie podparte, to

$$u = w = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \text{ na } s = 0 \text{ i } s = S.$$

Spełniające tożsamościowo powyższe warunki brzegowe u_m , v_m , w_m oraz $p_{x,m}$, $p_{s,m}$, $p_{\varrho,m}$ można przedstawić w sposób następujący:

$$\begin{aligned} (4.4) \quad u_m &= \sum_{n=1,2,\dots} U_{mn} \sin \frac{n\pi s}{S}, \\ v_m &= \sum_{n=0,1,2,\dots} V_{mn} \cos \frac{n\pi s}{S}, \\ w_m &= \sum_{n=1,2,\dots} W_{mn} \sin \frac{n\pi s}{S}, \\ p_{x,m} &= \sum_{n=1,2,\dots} P_{x,mn} \sin \frac{n\pi s}{S}, \\ p_{s,m} &= \sum_{n=0,1,2,\dots} P_{s,mn} \cos \frac{n\pi s}{S}, \\ p_{\varrho,m} &= \sum_{n=1,2,\dots} P_{\varrho,mn} \sin \frac{n\pi s}{S}. \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrażenia do (4.3), mnożąc (4.3)₁ oraz (4.3)₂ przez $\sin n\pi s/S$, (4.3)₃ przez $\cos n\pi s/S$ i całkując je względem S w granicach od $s = 0$ do $s = S$, znajdziemy wzory określające W_{mn} , U_{mn} i V_{mn} :

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \sum_{p=1,2,3,\dots} W_{mp} \int_0^S \left\{ \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \left[\varrho \left\{ D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} \right] \sin \frac{p\pi s}{S} + \right. \\ \left. + \frac{12(1-\nu^2)}{\varrho l^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \sum_{p=1,2,\dots} P_{e,mp} \int_0^S \left\{ \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \rho \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \\
&\quad + \frac{m\pi}{Lk} \sum_{p=1,2,\dots} P_{x,mp} \int_0^S \left\{ \left[\nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + D'^2 \right] \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \\
&\quad + \frac{1}{k} \sum_{p=1,2,\dots} P_{s,mp} \int_0^S \left\{ \left[D'^3 - (2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 D' \right] \cos \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds, \\
\sum_{p=1,2,\dots} U_{mp} \int_0^S &\left\{ \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds = \\
&= \frac{1}{F} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m\pi}{L} \sum_{p=1,2,\dots} P_{s,mp} \int_0^S \left\{ D' \left[\cos \frac{p\pi s}{S} \right] \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \\
(4.5) \quad &+ \frac{1}{F} \sum_{p=1,2,\dots} P_{x,mp} \int_0^S \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \frac{2}{1-\nu} D'^2 \right] \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \\
\text{[c. d.]} \quad &+ \frac{m\pi}{L} \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \int_0^S \left\{ \left[D'^2 + \nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{1}{\rho} \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds, \\
\sum_{p=1,2,\dots} V_{mp} \int_0^S &\left\{ \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \cos \frac{p\pi s}{S} \right\} \cos \frac{n\pi s}{S} ds = \\
&= -\frac{1}{F} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m\pi}{L} \sum_{p=1,2,\dots} P_{x,mp} \int_0^S \left\{ D' \left[\sin \frac{p\pi s}{S} \right] \right\} \cos \frac{n\pi s}{S} ds + \\
&+ \frac{1}{F} \sum_{p=0,1,2,\dots} P_{s,mp} \int_0^S \left\{ \left[\frac{2}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - D'^2 \right] \cos \frac{p\pi s}{S} \right\} \cos \frac{n\pi s}{S} ds + \\
&+ \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \int_0^S \left\{ \left[(2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 D' - D'^3 \right] \frac{1}{\rho} \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \cos \frac{n\pi s}{S} ds.
\end{aligned}$$

Jeśli promień krzywizny jest funkcją φ , a powłoka jest swobodnie podparta na tworzących $\varphi = 0$ i $\varphi = \varphi_0$, to postać rozwiązania pozostanie taka sama. Operator D' będzie wtedy równy $(1/\rho) (\partial/\partial\varphi)$, $\sin L\pi s/S$, $\cos L\pi s/S$ będzie zastąpiony odpowiednio przez $\sin L\pi\varphi/\varphi_0$ i $\cos L\pi\varphi/\varphi_0$, a całkować należy względem φ w granicach od $\varphi = 0$ do $\varphi = \varphi_0$. Postać operatora sugeruje, że jeśli ρ będzie funkcją s , rozwiązanie będzie mniej skomplikowane niż rozwiązanie problemu, w którym wystąpi ρ jako funkcja φ . Gdy ρ jest funkcją s , równania (4.5) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 \right]^2 \int_0^S \left\{ \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \varrho \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{12(1-\nu^2)}{t^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \int_0^S \frac{1}{\varrho} \sin \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds \right\} = \\
 & \quad + \frac{1}{k} \left\{ \sum_{p=1,2,\dots} P_{e,mp} \int_0^S \left\{ \left[D'^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 \varrho \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + P_{x,mn} \left[\nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right] \frac{m\pi}{L} \frac{S}{2} + \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + P_{s,mn} \left[(2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right] \frac{n\pi}{S} \frac{S}{2}, \right. \\
 & \quad U_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2 \frac{S}{2} = \frac{1}{F} \left\{ P_{x,mn} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right] - \right. \\
 (4.6) \quad & \quad \quad \left. - P_{s,mn} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m\pi}{L} \frac{n\pi}{S} \right\} \frac{S}{2} + \\
 & \quad + \frac{m\pi}{L} \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \int_0^S \left\{ \left[D'^2 + \nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{1}{\varrho} \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \sin \frac{n\pi s}{S} ds, \\
 & \quad V_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2 \frac{S}{2} = \frac{1}{F} \left\{ P_{s,mn} \left[\frac{2}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right] - P_{x,mn} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m\pi}{L} \frac{n\pi}{S} \right\} \frac{S}{2} - \\
 & \quad - \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \int_0^S \left\{ \left[D'^3 - (2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 D' \right] \frac{1}{\varrho} \sin \frac{p\pi s}{S} \right\} \cos \frac{n\pi s}{S} ds.
 \end{aligned}$$

Trzeba zaznaczyć, że czasami odpowiednie uproszczenia przed całkowaniem polepszą zbieżność w_{mn} , co zostanie dalej zilustrowane na następnym przykładzie.

5. Problem szczególny

Rozważmy powłokę walcową o długości L i szerokości S , której promień krzywizny zmienia się wykładniczo $\varrho = ae^{\lambda s}$, gdzie a i λ są stałymi. Przyjmuje się, że wszystkie brzegi są swobodnie podparte. Obciążenie zewnętrzne o intensywności q jest prostopadłe do stycznej w punkcie $s = 0$, tak że $p_\varrho = q \cos \varphi$, a $p_s = q \sin \varphi$, $p_x = 0$.

Przy tych założeniach równanie przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 \right]^2 \left[\lambda^4 - 6 \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{S} \right)^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \lambda^2 + \right. \right. \\
 \left. \left. + 2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \right\} \int_0^S e^{\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \frac{4p\pi\lambda}{S} \left\{ \lambda^2 - \right. \\
 \left. - \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} \int_0^S e^{\lambda s} \cos \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds \Big] + \frac{12}{t^2 a^2} (1 - \nu^2) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \times \\
 (5.1) \quad \times \int_0^S e^{-\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds \Big\} = \frac{1}{k} \sum_{p=1,2} P_{e,mp} \left[\lambda^4 - 6\lambda^2 \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 + \right. \\
 \left. + \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 \right]^2 - 2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \lambda^2 \right] \int_0^S e^{\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \\
 \left. + 4 \frac{p\pi\lambda}{S} \left\{ \lambda^2 - \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} \int_0^S e^{\lambda s} \cos \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds + \right. \\
 \left. + \frac{P_{s,mn}}{k} \left[(2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right] \frac{n\pi}{aS} \frac{S}{2} \right.
 \end{aligned}$$

Wyznaczając wszystkie całki równania otrzymujemy następujący nieskończony układ równań:

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad \sum_{p=1,2,\dots} a_{np}^{(m)} W_{mp} = \sum_{p=1,2,\dots} P_{e,mp} b_{np}^{(m)} + P_{s,mn} C_{mn} \\
 m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie $a_{np}^{(m)}$ i $b_{np}^{(m)}$ i $C_{mn}^{(m)}$ są znanymi funkcjami. Może ono być rozwiązane numerycznie przy pewnych znanych wartościach λ , L , S , a , t i ν . Dla uzyskania lepszej zbieżności W_{mn} dzielimy równanie przez $e^{\lambda s}$ przed całkowaniem i otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned}
 W_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2 \left[\lambda^4 - 6\lambda^2 \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 - 2\lambda^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left\{ \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right\}^2 \right] \frac{S}{2} + \frac{12(1-\nu^2)}{t^2 a^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \int_0^S e^{-2\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds = \\
 = \frac{P_{e,mn}}{k} \left[\lambda^4 - 6\lambda^2 \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 - 2\lambda^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left\{ \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right\}^2 \right] \frac{S}{2} + \\
 + \frac{1}{ka} \sum_{p=1,2,\dots} P_{s,mp} \left[\left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 + (2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{p\pi}{S} \int_0^S e^{-\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds.
 \end{aligned}$$

Obliczając występujące w równaniu całki możemy napisać

$$\begin{aligned}
 W_{mn} + \frac{96(1-\nu^2)n\lambda\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4\left(\frac{\pi}{S}\right)^2}{t^2 a^2 S \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^2 A_{mn}} \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \frac{p}{a_{np}} \left(1 - e^{-2\lambda s} \cos p\pi \cos n\pi\right) = \\
 (5.3) \quad \frac{P_{e,mn}}{k \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^2} + \frac{4n\lambda\left(\frac{\pi}{S}\right)^2}{k S a \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^2} \frac{1}{A_{mn}} \times \\
 \times \sum_{p=1,2,\dots} P_{s,mp} \frac{p^2 \frac{\pi}{S} \left[\left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 + (2+\nu)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right] (1 - e^{-\lambda s} \cos p\pi \cos n\pi)}{\lambda^4 + 2\lambda^2 \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 (p^2 + n^2) + (p^2 - n^2) \left(\frac{\pi}{S}\right)^4},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 A_{mn} &= \lambda^4 - 6\lambda^2 \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2 - 2\lambda^2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^2, \\
 a_{np} &= 16\lambda^4 + 8\lambda^2 \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 (p^2 + n^2) + (p^2 - n^2)^2 \left(\frac{\pi}{S}\right)^4.
 \end{aligned}$$

Gdy $\lambda \rightarrow 0$, powłoka staje się powłoką kołową o promieniu a , a równanie prowadzi do wzoru

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad W_{mn} &= \frac{P_{e,mn}}{k} \frac{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{t^2 a^2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4} + \\
 &+ \frac{P_{s,mn}}{ka} \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{S}\right)^2 + (2+\nu)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{n\pi}{S}\right]}{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{t^2 a^2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4}
 \end{aligned}$$

określający rozwiązanie dla powłoki kołowej.

Gdy λ rośnie do nieskończoności, otrzymuje się przypadek graniczny reprezentujący znane rozwiązanie płyty prostokątnej o wymiarach S i L obciążonej prostopadłe

$$(5.5) \quad W_{mn} = \frac{P_{e,mn}}{k} \frac{1}{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^2}.$$

W niniejszym problemie $p_e = q \cos \varphi$, $p_s = q \sin \varphi$, gdzie

$$\varphi = \frac{1 - e^{-\lambda s}}{a\lambda},$$

przy czym przyjęliśmy $\varphi = 0$ oraz $s = 0$. Dla małych wartości φ (zaniedbując φ^3 i wyższe potęgi φ) $P_{e, mn}$ i $P_{s, mn}$ możemy obliczyć w sposób przybliżony:

$$(5.6) \quad P_{e, mn} = \frac{4q}{m\pi a^2 \lambda^2 S} \left\{ (2a^2 \lambda^2 - 1) \frac{S}{n\pi} (1 - \cos n\pi) + \frac{2n\pi}{S} (1 - e^{-\lambda s} \cos n\pi) - \frac{n\pi}{S} (1 - e^{-2\lambda s} \cos n\pi) \right\} + \frac{\left(\frac{n\pi}{S} \right)^2}{4\lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2}$$

$$P_{s, mn} = -\frac{8q}{m\pi a S} \frac{1 - e^{-\lambda s} \cos n\pi}{\lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2} \quad \text{dla } n \geq 1,$$

$$P_{s, m0} = \frac{4q}{S m \pi a \lambda} \left(S - \frac{1 - e^{-\lambda s}}{\lambda} \right).$$

Po wyznaczeniu W_{mn} można otrzymać U_{mn} i V_{mn} odpowiednio z równań (4.7)₂ i (4.7)₃.

6. Rozwiązanie numeryczne

W celu obliczenia W_{mn} przyjmiemy $\lambda = 10^{-2}$, $\pi/L = \pi/S = 10^{-1}$, $t = 7$ cm, $a = 50$ cms i $\nu = 0,3$. Dla tych wartości parametrów równanie (5.2) przyjmuje postać

$$(6.1) \quad W_{mn} + \frac{0,2270m^4 n}{(m^2 + n^2)^2 [(m^2 + n^2) - 2 \cdot 10^{-2} (3n^2 + m^2)]} \times \\ \times \sum_{p=1,2,\dots} \frac{W_{mp} p [1 - 0,5334 \cos p\pi \cos n\pi]}{(p^2 - n^2)^2 + 8 \cdot 10^{-2} (p^2 + n^2) + 16 \cdot 10^{-4}} = \frac{q_0 \times 10^4}{\pi^2 k} \times \\ \times \frac{8}{m(m^2 + n^2)} \left[\left\{ \frac{4n(1 - 0,7303 \cos n\pi)}{n^2 + 0,01} - \frac{1 - \cos n\pi}{n} - \frac{-2n(1 - 0,5334 \cos n\pi)}{n^2 + 0,04} \right\} - \frac{n}{\pi} \frac{0,016}{[(m^2 + n^2)^2 - 2 \cdot 10^{-2} (3n^2 + m^2)]} \right] \times \\ \times \sum_{p=1,2,\dots} \frac{1 - 0,7303 \cos p\pi}{p^2 + 0,01} \times \\ \times \frac{p^2 (p^2 + 2,3 m^2) (1 - 0,7303 \cos p\pi \cos n\pi)}{(p^2 + 0,01) [(p^2 - n^2)^2 - 2 \cdot 10^{-2} (p^2 + n^2) + 0,0001]}.$$

Z wyliczenia powyższego wynika, że dla m i n większych niż 5 nieskończone szeregi po lewej stronie równania (6.1) są nie istotne dla określenia W_{mn} , jak również w żadnym przypadku nie potrzebujemy przyjmować dla p wartości większych niż 5 w szeregach po obydwu stronach równania. W tabelcy 1 podajemy W_{mn} .

Tabelca 1
dla W_{mn}/d , $d = q \cdot 10^5/k\pi^2$

$m \backslash n$	1	2	3	4
1	03558	000232	000494	000006
3	000526	00001167	00005081	
5	0000478			

Ugięcie w kierunku normalnym dla dowolnego punktu (s, x) wynosi:

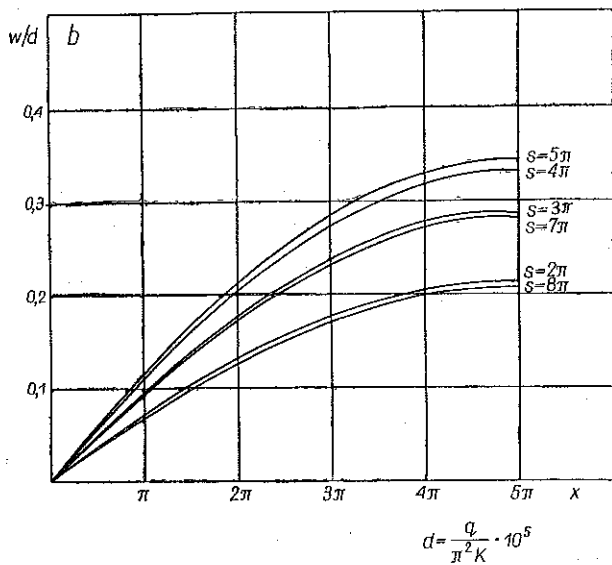
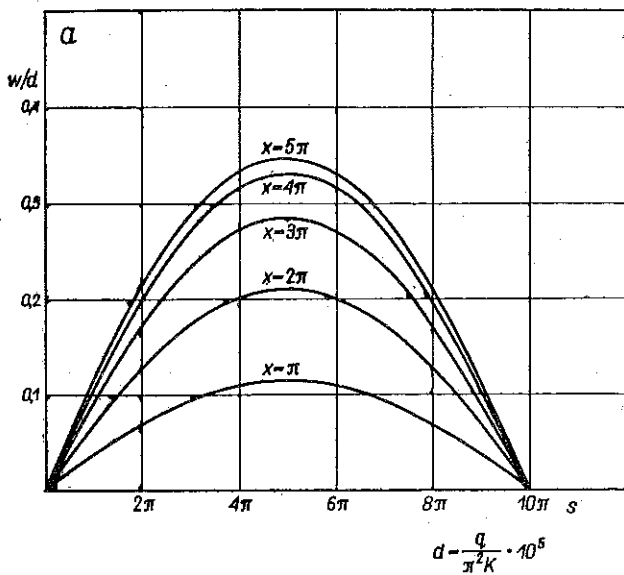
$$(6.2) \quad \frac{w}{d} = \left(0,3558 \sin \frac{s}{10} + 0,0023 \sin \frac{2s}{10} + 0,0049 \sin \frac{3s}{10} + \right. \\ \left. + 0,0001 \sin \frac{4s}{10} \right) \sin \frac{x}{10} + \\ + \left(0,0053 \sin \frac{s}{10} + 0,0001 \sin \frac{2s}{10} + 0,0005 \sin \frac{3s}{10} \right) \sin \frac{3x}{10} + \\ + 0,0005 \sin \frac{s}{10} \sin \frac{5x}{10},$$

Tabelca 2
dla W/d , $d = q \cdot 10^5/k\pi^2$

$s \backslash x$	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π	9π
π	00376	00701	00941	01083	01128	01074	00928	00685	00365
2π	00699	01306	01756	02023	02109	02006	01731	01276	00679
3π	00938	01757	02368	02734	02849	02714	02334	01719	00914
4π	01086	02033	02745	03176	03309	03153	02706	01990	01059
5π	01136	02127	02873	03324	03466	03304	02832	02083	01108

gdzie $d = q \cdot 10^5/\pi^2 k$. Tabelca 2 zawiera w dla różnych punktów powłoki. Rysunki 1a i 1b pokazują przemieszczenia normalne kilku tworzących i kierownic po deformacji. Równania (4.7)₂ i (4.7)₃ dla U_{mn} i V_{mn} będą równe odpowiednio:

$$(6.3) \quad U_{mn} = \frac{2}{3} \frac{t^2 q}{KaSL} \frac{1 + \nu \frac{n\pi}{S}}{1 - \nu \frac{n\pi}{S}} \frac{1 - e^{-\lambda s} \cos n\pi}{\lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2} + \\ + \frac{2m\pi}{LaS} \frac{1}{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S}\right)^2\right]^2} \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \left\{ \lambda^2 - \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 + \right.$$



Rys. 1. a – Przemieszczenie normalne wzdłuż kierownic.
b – Przemieszczenie normalne wzdłuż tworzących

$$\begin{aligned}
 & + \nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \int_0^S e^{-\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds - 2\lambda \frac{p\pi}{S} \int_0^S e^{-\lambda s} \cos \frac{p\pi s}{S} \sin \frac{n\pi s}{S} ds \Big\}, \\
 (6.3) \quad & V_{mn} = - \frac{2}{3} \frac{qt^2}{k\pi a S} \frac{\frac{2}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2}{m \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2} \frac{1 - e^{-\lambda S} \cos n\pi}{\lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2} + \\
 & \quad + \frac{2}{Sa \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2} \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \left\{ \lambda^3 - 3\lambda \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 - \right. \\
 & \quad \left. - (2+\nu) \lambda \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} \int_0^S e^{-\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} \cos \frac{n\pi s}{S} ds + \\
 & \quad + \frac{p\pi}{S} \left[\left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 + (2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - 3\lambda^2 \right] \int_0^S e^{-\lambda s} \cos \frac{p\pi s}{S} \cos \frac{n\pi s}{S} ds \Big\},
 \end{aligned}$$

dla $n \geq 1$, podczas gdy

$$\begin{aligned}
 V_{m0} &= \frac{2}{3} \frac{qt^2}{k\pi a S (1-\nu)} \frac{1}{\lambda m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2} \left(s - \frac{1 - e^{-\lambda S}}{\lambda} \right) + \\
 & \quad + \frac{2}{Sa \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4} + \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} \left\{ \lambda^3 - 3\lambda \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 - (2+\nu) \lambda \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} \times \\
 & \quad \times \int_0^S e^{-\lambda s} \sin \frac{p\pi s}{S} ds + \frac{p\pi}{S} \left[\left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 + (2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - 3\lambda^2 \right] \int_0^S e^{-\lambda s} \cos \frac{p\pi s}{S} ds \Big\}.
 \end{aligned}$$

Wyznaczając występujące w równaniach całki otrzymuje się po uproszczeniach

$$\begin{aligned}
 (6.4) \quad U_{mn} &= \frac{2}{3} \frac{qt^2}{kaSL} \frac{\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{n\pi}{S}}{\left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2} \frac{1 - e^{-\lambda S} \cos n\pi}{\lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2} + \\
 & \quad + \frac{4mn\lambda}{a\pi} \frac{\frac{\pi}{L} \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 \left[\nu \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2} \times \\
 & \quad \times \sum_{p=1,2,\dots} \frac{PW_{mp} (1 - e^{-\lambda S} \cos p\pi \cos n\pi)}{I_{np}},
 \end{aligned}$$

$$(6.4) \quad V_{mn} = -\frac{2}{3} \frac{qt^2}{k\pi aS} \frac{\left[\frac{2}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]}{m \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2} \frac{1 - e^{-\lambda S} \cos n\pi}{\lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2} +$$

$$+ \frac{4\lambda \left(\frac{\pi}{S} \right)^2}{a\pi \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \right]^2} \sum_{p=1,2,\dots} \frac{PW_{mp}}{I_{np}} \left\{ \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 \left[(2+\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2\lambda^2 + 2 \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 \right] - \left[\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{S} \right)^2 \right]^2 \right\} (1 - e^{-\lambda S} \cos p\pi \cos n\pi)$$

dla $n \geq 1$ oraz

$$(6.5) \quad V_{m0} = \frac{2}{3} \frac{qt^2}{k\pi aS (1-\nu) \lambda m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2} \left(S - \frac{1 - e^{-\lambda S}}{\lambda} \right) -$$

$$- \frac{4\lambda \left(\frac{\pi}{S} \right)^2}{a\pi \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4} \sum_{p=1,2,\dots} PW_{mp} (1 - e^{-\lambda S} \cos p\pi),$$

gdzie

$$(6.6) \quad I_{np} = \lambda^4 + 2\lambda^2 \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 (p^2 + n^2) + (p^2 - n^2)^2 \left(\frac{\pi}{S} \right)^4.$$

Dla szczególnego przypadku rozważanej powłoki mamy jak poprzednio $\lambda = 10^{-2}$, $\pi/S = \pi/L = 10^{-1}$, $a = 50$ cms, $t = 7$ cms i $\nu = 0,3$. Dla tych wartości parametrów

$$(6.7) \quad U_{mn} = \frac{q \cdot 10^4}{k\pi^2} \frac{0,1214n}{(m^2+n^2)^2} \frac{1 - 0,7303 \cos n\pi}{n^2 + 0,01} +$$

$$+ \frac{0,2546 \cdot 10^{-1} mn (0,3m^2 - n^2)}{(m^2+n^2)^2} \times$$

$$\times \sum_{p=1,2,\dots} \frac{PW_{mp} (1 - 0,7303 \cos p \cos n\pi)}{(p^2 - n^2)^2 + 2 \cdot 10^{-2} (p^2 + n^2) + 0,0001},$$

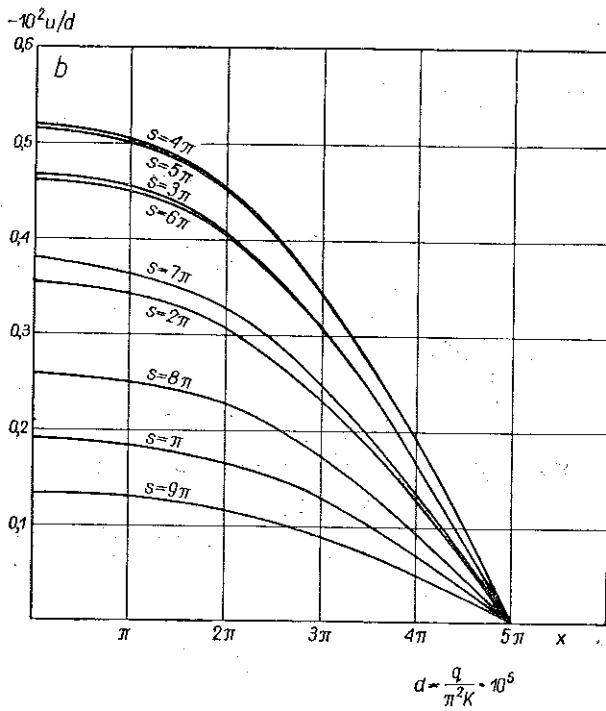
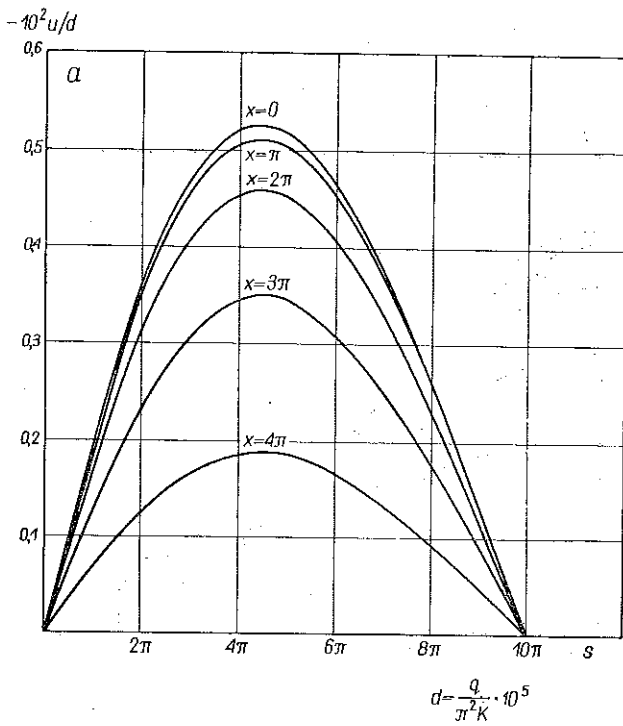
$$V_{mn} = -\frac{q \cdot 10^3}{k\pi^2} \frac{0,9333 (2m^2 + 0,7n^2)}{m (m^2 + n^2)^2} \frac{1 - 0,7303 \cos n\pi}{n^2 + 0,01} +$$

$$+ \frac{0,2546 \cdot 10^{-1}}{(m^2+n^2)^2} \sum_{p=1,2,\dots} \frac{PW_{mp} (1 - 0,7303 \cos p\pi \cos n\pi)}{(p^2 - n^2)^2 + 0,02 (p^2 + n^2) + 0,0001} \times$$

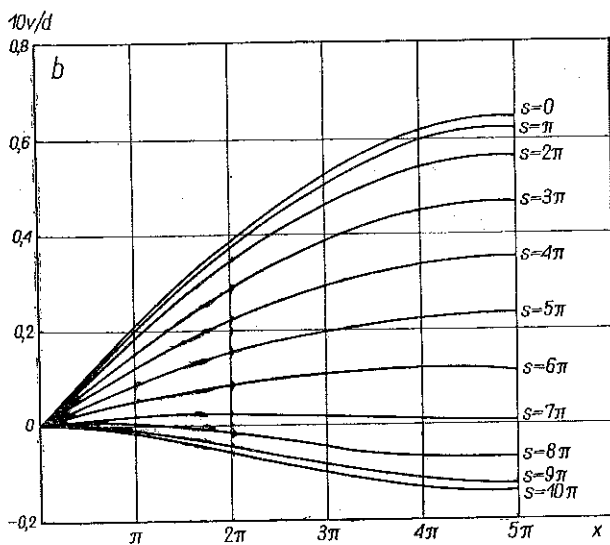
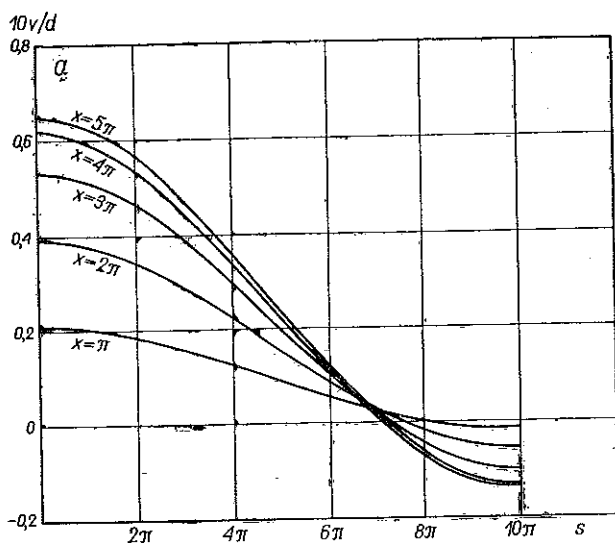
$$\times \{ (2 \cdot 3m^2 - 0,02 + 2p^2) n^2 - (p^2 + 0,01)^2 \} \quad \text{dla } n \geq 1$$

oraz

$$V_{m0} = \frac{q \cdot 10^4}{k\pi^2} \frac{0,4154}{m^3} - \frac{0,2546 \cdot 10^{-1}}{m^4} \sum_{p=1,2,\dots} W_{mp} (1 - \cos p\pi).$$



Rys. 2. a – Przeszczenie osiowe wzdluz kierownic,
b – Przeszczenie osiowe wzdluz tworzcych



Rys. 3. a - Przeszczenie „v” wzdluz kierownic,
 b - Przeszczenie „v” wzdluz tworzczych

Wykorzystując W_{mp} z tablicy 1 otrzymamy wyrażenie na u i v :

$$(6.8) \quad \frac{10u}{d} = - \left(0,0546 \sin \frac{s}{10} + 0,0051 \sin \frac{2s}{10} + 0,0002 \sin \frac{3s}{10} \right) \times \\ \times \cos \frac{x}{10} + \left(0,0025 \sin \frac{s}{10} + 0,0001 \sin \frac{2s}{10} \right) \cos \frac{3x}{10} + \\ + 0,003 \sin \frac{s}{10} \cos \frac{5x}{10}, \\ \frac{10v}{d} = \left(0,2519 + 0,3880 \cos \frac{s}{10} + 0,0119 \cos \frac{2s}{10} + 0,0016 \cos \frac{3s}{10} + \right. \\ \left. + 0,0005 \cos \frac{4s}{10} \right) \sin \frac{x}{10} + \\ + \left(0,0134 - 0,0080 \cos \frac{s}{10} - 0,0001 \cos \frac{2s}{10} \right) \sin \frac{3x}{10} + \\ + \left(0,0030 - 0,0023 \cos \frac{s}{10} \right) \sin \frac{5x}{10} + 0,0011 \sin \frac{7x}{10} + 0,0005 \sin \frac{9x}{10}.$$

Tablica 3

dla $10^2 u/d$, $d = q \cdot 10^5 / k\pi^2$

$x \backslash s$	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π	9π
0	0191	0354	0468	0520	0516	0462	0371	0258	0133
π	0186	0345	0456	0506	0502	0450	0363	0253	0130
2π	0167	0308	0407	0474	0451	0405	0327	0228	0117
3π	0127	0234	0309	0346	0344	0309	0249	0174	0090
4π	0068	0126	0166	0186	0185	0167	0133	0094	0049

W tablicach 3 i 4 zestawiono u i v . Rysunki 2a i 2b zawierają wykresy przemieszczenia u wzdłuż kilku kierownic i tworzących. Podobnie rysunki 3a i 3b przedstawiają charakter v . Po wyznaczeniu wszystkich składowych przemieszczenia siły i momenty można otrzymać z układu równań.

Literatura cytowana w tekście

1. F. ROMANO, J. KEMPNER, *Stress and Displacement Analysis of a simply supported Noncircular Cylindrical Shell under Lateral Pressure*, PIBAL Report No. 415, Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn N.Y. 1958.
2. W.P. VAFAKOS, *Stress and Displacement Analysis of a Clamped Oval Cylindrical Shell under Hydrostatic Pressure*, Ph. D. Dissertation in App. Mech., Polytechnic Institute of Brooklyn, June 1960.
3. E. CHORNY, *Solution for the Displacement and Stresses in a Simply Supported Oval, Cylindrical Shell under a Uniform Load*, M.S. Thesis in App. Mech., Polytechnic Institute of Brooklyn June 1961.

Tablica 4

dla v/d , $d = q \cdot 10^5 / k\pi^2$

$\begin{matrix} s \\ x \end{matrix}$	0	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π	9π	10π
π	02081	02014	01840	01561	01238	00893	00559	00268	00041	-00102	-00151
2π	03880	03748	03395	02855	02213	01529	00867	00284	-00166	-00450	-00546
3π	05307	05119	04618	03855	02938	01964	01022	00190	-00452	-00855	-00994
4π	06190	05965	05368	04463	03369	02210	01189	00098	-00669	-01151	-01315
5π	06487	06252	05622	04669	03516	02294	01110	00071	-00738	-01245	-01419

4. N. NISSEL *Stress and Displacement Analysis of a simply Supported Oval Cylindrical Shell under lateral Loading* M.S., Thesis in App. Mech., Polytechnic Institute of Brooklyn, June 1962.
5. W.P. VAFAKOS, F. ROMANO, J. KEMPNER *Clamped Short Oval Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure*. J. Aero. Sciences, 11, 29 (1962).
6. E. WIEDEMANN, *Ingr.-Arch.*, 8, 1937, 301.
7. R.A. CLARK, T.I. GILROY, E. REISSNER *J. Appl. Mech.*, 19 (1952), 37.
8. J. KEMPNER *Relation for stress, Buckling and Postbuckling Analysis of Orthotropic Shells under Applied Loads and Elevated Temperatures*, Part I of „*Investigation of Plates and Shells under External Loading and elevated Temperatures*” PIBL Report No 481, Technical Summary presented at AFOSR Mechanics Branch Contractor Meeting Kansas City, Missouri, October 23-24, 1958.
9. J. KEMPNER, *Unified Thin-Shell Theory*, PIBL Report No 566, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1960 Brooklyn.
10. W. FLUGGE, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, 1962.

Резюме

НЕКРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Представляется попытка определения составляющих перемещения для общего случая цилиндрической оболочки, подверженной изгибу. Обычноприменяемое уравнение в перемещениях, заключающее осевое, окружное и нормальное перемещения модифицируются и даются в виде одного дифференциального уравнения с частными производными восьмого порядка типа Донелла для нормального напряжения. Для дифференциального же уравнения для осевого и нормального перемещения являются уравнениями четвертого порядка, из которых каждое включает только нормальное перемещение. Решение для перемещений предлагается в виде рядов Леви. Числовые решения получены для оболочки, радиус кривизны которой изменяется экспоненциально.

Summary

NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS

Attempts have been made to find out the displacement components of a general Cylindrical shell under bending. Usual displacement equations involving axial, circumferential and normal displacements have been modified to form an eighth order Donnell type partial differential equation in normal displacement whereas the differential equations for axial and circumferential displacements are of fourth order each involving normal displacement only. Proposed solution assumes Levy type series solutions for the displacements. Numerical solutions are obtained for a shell whose radius of curvature varies exponentially.

JALPAIGURI ENGINEERING COLLEGE
JALPAIGURI, W. BENGAL, INDIA

Received August 17, 1967 r.