ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 15 (1967)

WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I AMPLITUD UKŁADU O SKOŃCZONEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY

BOHDAN KOWALCZYK (GDAŃSK)

Jednym z najbardziej pracochłonnych elementów numerycznej analizy drgań układów liniowych o dużej liczbie stopni swobody jest obliczanie wartości współczynników tzw. równania częstości drgań swobodnych (lub równania wiekowego). Rozwiązanie tego zagadnienia za pomocą teorii wyznaczników jest praktycznie nie do przyjęcia. Dlatego opracowano szereg metod wyznaczania tych współczynników bez rozwijania wyznaczników przy zastosowaniu rachunku macierzy. Głównym celem tych opracowań jest stworzenie najmniej pracochłonnych metod.

Jak wiadomo, przy rozpatrywaniu drgań układu mechanicznego o n stopniach swobody, którego więzy nie zależą od czasu i który znajduje się pod działaniem sił potencjalnych, energia kinetyczna jest równa

(1) $$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j,$$

a energia potencjalna

(2) $$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_i x_j,$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznacza współrzędną uogólnioną, $m_{ij}=m_{ji}$ współczynniki bezwładności oraz $k_{ij}=k_{ji}$ współczynniki sprężystości.

Równania Lagrange'a prowadzą w tym przypadku do układu jednorodnych równań różniczkowych rzędu drugiego o stałych współczynnikach w postaci

$$\begin{gathered} m_{11}\ddot{x}_1+m_{12}\ddot{x}_2+\ldots+m_{1n}\ddot{x}_n+k_{11}x_1+k_{12}x_2+\ldots+k_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}\ddot{x}_1+m_{n2}\ddot{x}_2+\ldots+m_{nn}\ddot{x}_n+k_{n1}x_1+k_{n2}x_2+\ldots+k_{nn}x_n=0 \end{gathered}$$

lub w zapisie macierzowym do równania

$$-M\ddot{X}=KX.$$

Mnożąc obie strony ostatniego równania lewostronnie przez macierz nieosobliwą M^{-1} i oznaczając $M^{-1}K=A$ znajdziemy

(3) $$AX=-\ddot{X}.$$

Rozpatrując rozwiązania odpowiadające czystemu ruchowi harmonicznemu

$$x_i = A_i \sin(\omega t + \varphi), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

otrzymamy

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i.$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie do związku (3) otrzymujemy układ n równań algebraicznych liniowych jednorodnych w postaci:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= \lambda x_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= \lambda x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= \lambda x_n, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $\lambda = \omega^2$, lub w zapisie macierzowym równanie

$$(A - \lambda E) X_i = 0, \tag{5}$$

gdzie A jest macierzą kwadratową rzędu n-tego o elementach a_{ij}, E macierzą jednostkową rzędu n-tego oraz gdzie

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Układ (4) lub (5) ma pierwiastki niezerowe, jeżeli

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{7}$$

Równanie (7) nosi nazwę równania częstości lub równania wiekowego macierzy A.

Można wykazać [2], że jeżeli energia potencjalna układu jest dodatnio określoną formą kwadratową współrzędnych uogólnionych, to pierwiastki równania (7) są dodatnie. Mianowicie pierwiastkami równania (7) są w tym przypadku kwadraty częstości ω^2, które oznaczyliśmy przez λ.

Jak wiadomo, pierwiastki równania (7) nazywamy wartościami własnymi macierzy A.

W przypadku n stopni swobody mamy n wartości własnych:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n.$$

Każdej wartości własnej odpowiada wektor własny (kolumna modalna) D_i

$$D_i = \begin{bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{in} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Rozwiązanie ogólne układu (3) będzie miało więc postać:

$$x_s = \sum_{r=1}^{n} d_{sr} \sin(\omega_r t + \varphi_r). \tag{9}$$

Ponieważ d_{ir} spełniają ten sam układ równań jednorodnych (4) co i x_i, można więc określić tylko ich stosunek.

Aby znaleźć wszystkie wartości własne macierzy A, należy wyznaczyć wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego (7).

Równanie wiekowe (7) jest wielomianem stopnia n-tego:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n [\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - , \ldots, - p_n],$$

gdzie

$$p_1 = a_{11} + a_{22} +, \ldots, + a_{nn},$$

$$p_n = (-1)^{n-1} |A|,$$

a pozostałe współczynniki p_k są równe sumie wszystkich minorów głównych stopnia k macierzy A, ze znakiem $(-1)^k$. Liczba tych minorów jest równa $\binom{n}{k}$.

Zajmiemy się wyznaczaniem współczynników wielomianu (7).

Po znalezieniu pierwiastków tego wielomianu λ_i przy zastosowaniu naszej metody możemy wyznaczyć za pomocą elementarnych operacji rachunkowych (stosując jedynie schemat Hornera) składowe wektora własnego odpowiadającego danej wartości własnej.

Metoda składa się z dwóch etapów. W pierwszym etapie znajdujemy macierz prawie trójkątną podobną do macierzy wyjściowej; w drugim etapie wyznaczamy wielomian charakterystyczny macierzy.

Macierzą prawie trójkątną nazywamy macierz kwadratową stopnia n-tego $A = [a_{ik}]$ o elementach

$$a_{ik} = \begin{cases} a_{ik}, & \text{gdy} \quad i > k-2; \\ 0, & \text{gdy} \quad i \leqslant k-2. \end{cases}$$

Rozważmy następujące macierze stopnia n-tego:

macierz prawie trójkątną

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-2,1} & b_{n-2,2} & b_{n-2,3} & b_{n-2,4} & \ldots & b_{n-2,n-1} & 0 \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \ldots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \ldots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

oraz macierz trójkątną

$$
(11) \qquad C=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\
0 & 0 & 1 & c_{34} & \dots & c_{3,n-1} & c_{3n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Niewiadome elementy macierzy B i C wyznaczamy z równania macierzowego

$$
(12) \qquad CA = BC.
$$

Ponieważ zachodzi oczywisty związek

$$
A = C^{-1}BC,
$$

przeto macierze A i B są macierzami podobnymi, a więc macierze A i B mają jednakowe wielomiany charakterystyczne.

Niewiadome elementy macierzy B i C znajdujemy w sposób jednoznaczny mnożąc macierze po lewej i prawej stronie związku (12) i przyrównując odpowiadające elementy. I tak z pierwszego wiersza macierzy wynikowych wyznaczamy elementy pierwszego wiersza macierzy B i drugiego wiersza macierzy C, z drugiego wiersza macierzy wynikowych — elementy drugiego wiersza macierzy B oraz trzeciego wiersza macierzy C itd. Niech

$$
(13) \qquad \alpha B^T = \beta,
$$

gdzie

$$
(14) \qquad \alpha=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\
1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n
\end{bmatrix},
$$

$$
(15) \qquad \beta=\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{n-1,1} & b_{n1} \\
0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1,n-1} & \beta_{1n} \\
0 & 0 & \beta_{23} & \dots & \beta_{2,n-1} & \beta_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-2,n-1} & \beta_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1,n}
\end{bmatrix}.
$$

Niewiadome elementy macierzy α i β możemy wyznaczyć ze związku (13) względnie stosując oczywisty wzór rekurencyjny:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad i \leqslant k-1. \\ \beta_{k-1,i}, & \text{gdy} \quad i = k \end{cases} \tag{16}$$

$$a_1 \equiv 1; \quad k = 2, 3, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

TWIERDZENIE. *Wartość wyznacznika macierzy B jest równa*

$$|B| = (-1)^{n+1} b_{12} b_{23} \ldots b_{n-1,n} \beta_{n-1,n}. \tag{17}$$

Dowód. Weźmy pod uwagę macierz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \alpha_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i znajdźmy iloczyn:

$$BF = D. \tag{18}$$

Z łatwością przekonywujemy się, że

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} a_j b_{1j} & b_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \sum_{j=1}^{3} a_j b_{2j} & b_{22} & b_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \sum_{j=1}^{4} a_j b_{3j} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-1,j} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \ldots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_j b_{nj} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \ldots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_1 \equiv 1$.

Zgodnie z (16) elementy pierwszej kolumny macierzy D z wyjątkiem ostatniego są równe zeru, ostatni zaś jest równy $\beta_{n-1,n}$.

Ze związku (18) mamy:

$$|B|\,|F| = |D|, \quad \text{ale} \quad |F| = 1.$$

Twierdzenie zostało więc tym samym udowodnione. Z twierdzenia powyższego wynika, że aby wyznaczyć wartość wyznacznika macierzy B, nie ma potrzeby wyznaczania wszystkich elementów macierzy β.

Należy ze wzorów rekurencyjnych

$$
(19)\qquad
\begin{array}{l}
b_{11} \quad +\alpha_2 b_{12} = 0, \\
b_{21} \quad +\alpha_2 b_{22} \quad +\alpha_3 b_{23} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{n-1,1}+\alpha_2 b_{n-1,2}+\alpha_3 b_{n-1,3}+\dots+\alpha_n b_{n-1,n} = 0
\end{array}
$$

wyznaczyć elementy macierzy α, wyraz zaś $\beta_{n-1,n}$ znajdujemy ze związku:

$$
(20)\qquad b_{n1}+\alpha_2 b_{n2}+\alpha_3 b_{n3}+\dots+\alpha_n b_{nn} = \beta_{n-1,n}\,.
$$

Metoda postępowania przy wyznaczaniu wielomianu charakterystycznego macierzy A jest więc następująca:

a) z równania

$$CA = BC$$

wyznaczamy niewiadome elementy macierzy B i C. (Kontrolą dokładności obliczeń jest zachodzenie równości: $spB = spA$; spA — ślad macierzy A);

b) w celu znalezienia współczynników wielomianu charakterystycznego

$$|A-\lambda E| = |B-\lambda E|$$

wyznaczamy wyrażenia $\alpha_i(\lambda)$ ($i = 2, 3, \dots, n$; $\alpha_1(\lambda) = 1$) ze związków rekurencyjnych:

$$
(21)\qquad
\begin{array}{l}
b_{11} - \lambda + \alpha_2(\lambda) b_{12} = 0, \\
b_{21} + \alpha_2(\lambda)(b_{22} - \lambda) + \alpha_3(\lambda) b_{23} = 0, \\
b_{31} + \alpha_2(\lambda) b_{32} + \alpha_3(\lambda)(b_{33} - \lambda) + \alpha_4(\lambda) b_{34} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{n-1,1}+\alpha_2(\lambda) b_{n-1,2}+\alpha_3(\lambda) b_{n-1,3}+\alpha_4(\lambda) b_{n-1,4}+\dots+ \\
\qquad\qquad +\alpha_{n-1}(\lambda)(b_{n-1,n-1}-\lambda)+\alpha_n(\lambda) b_{n-1,n} = 0;
\end{array}
$$

c) na podstawie (17) i (20) mamy:

$$
(22)\qquad |A-\lambda E| = b_{n1}+\alpha_2(\lambda) b_{n2}+\alpha_3(\lambda) b_{n3}+\dots+\alpha_n(\lambda)(b_{nn}-\lambda).
$$

Uwaga 1. W udowodnionym twierdzeniu milcząco zakładaliśmy, że wszystkie wyrazy nadprzekątne $b_{12}, b_{23}, \dots, b_{n-1,n}$ macierzy B są różne od zera. W przypadku gdy np. $b_{ik}=0$ postępowanie przy wyznaczaniu wielomianu charakterystycznego macierzy A (lub macierzy B) znacznie się upraszcza. Macierz B ma bowiem wtedy postać:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i-1,1} & b_{i-1,2} & b_{i-1,2} & \dots & b_{i-1,i} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} & \dots & b_{i,i} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{i+1,1} & b_{i+1,2} & b_{i+1,3} & \dots & b_{i+1,i} & b_{i+1,k} & b_{i+1,k+1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{ni} & b_{nk} & b_{n,k+1} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ G & B_2 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i-1,1} & b_{i-1,2} & b_{i-1,3} & b_{i-1,4} & \dots & b_{i-1,i-1} & b_{i-1,1} \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & b_{i4} & \dots & b_{i,i-1} & b_{ii} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{i+1,k} & b_{i+1,k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{i+2,k} & b_{i+2,k+1} & b_{i+2,k+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{nk} & b_{n,k+1} & b_{n,k+2} & b_{n,k+3} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix},$$

a więc

$$|B - \lambda E| = |B_1 - \lambda E|\,|B_2 - \lambda E|.$$

Obie macierze B_1 i B_2 mają postać prawie trójkątną — możemy więc w celu wyznaczania ich wielomianów charakterystycznych zastosować omówioną powyżej metodę. Mamy więc w tym przypadku (zerowania się elementu b_{ik}) jedynie ułatwienie obliczeń.

Uwaga 2. Celem wyznaczenia wektorów własnych macierzy A zwróćmy przede wszystkim uwagę na fakt, iż wektor

(23)
$$Y_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2(\lambda_i) \\ \alpha_3(\lambda_i) \\ \vdots \\ \alpha_n(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

jest wektorem własnym macierzy B odpowiadającym wartości własnej λ_i. Wynika to bezpośrednio ze związków (19) i (20). Zachodzi więc związek

(24)
$$BY_i = \lambda_i Y_i.$$

Ale na podstawie (12)

$$B = CAC^{-1},$$

więc

$$CAC^{-1}\, Y_i = \lambda_i\, Y_i$$

lub

$$AC^{-1}\, Y_i = \lambda_i\, (C^{-1}\, Y_i).$$

Z ostatniego związku wynika, iż wektor własny macierzy A, odpowiadający wartości własnej λ_i, wyznaczamy ze wzoru:

$$X_i = C^{-1}\, Y_i. \tag{25}$$

Uwaga 3. Ważnymi czynnikami użyteczności każdej z metod obliczeniowych są: liczba mnożeń i dzieleń potrzebna dla uzyskania końcowego wyniku oraz prostota (względnie złożoność) danego schematu rachunkowego.

Porównajmy pod kątem widzenia tych dwóch czynników metodę omawianą w niniejszej pracy z trzema najczęściej używanymi metodami wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy, mianowicie z metodą Le Verriera, Kryłowa i Danilewskiego.

Najprostszym schematem rachunkowym (wśród powyższych metod) odznacza się metoda Le Verriera, jednakże wymaga $\frac{1}{2}(n-1)(2n^3-2n^2+n+2)$ mnożeń i dzieleń [3].

Schemat rachunkowy metody Kryłowa, jeżeli chodzi o swą prostotę, zajmuje pośrednie miejsce pomiędzy metodą Le Verriera i Danilewskiego i wymaga $\frac{3}{2}n\left(n^2-\frac{1}{2}n-\frac{20}{3}\right)$ mnożeń i dzieleń z tym, iż przy wyliczeniu tej liczby operacji przyjęto dwumiany zawierające λ w pierwszej potędze za jeden element oraz nie uwzględniono koniecznych działań przy rozkładzie wyznacznika liczbowego czwartego stopnia [5]. Praktycznie więc biorąc liczba końcowych operacji jest większa niż wynika to z powyżej podanego wzoru.

Przy stosowaniu metody Danilewskiego wykonujemy $(n^2-1)(n+1)$ mnożeń i dzieleń [4], jednakże bardzo skomplikowany schemat rachunkowy metody Danilewskiego znacznie obniża jej wartość dla zastosowań.

Przy posługiwaniu się metodą omawianą w niniejszej pracy wykonujemy przy wyznaczaniu elementów macierzy prawie trójkątnej B i macierzy trójkątnej C: $\frac{1}{6}(5n^3-12n^2+n+6)$ mnożeń i dzieleń, przy wyznaczaniu współczynników wielomianu charakterystycznego $\frac{1}{6}(n^3+9n^2+2n-12)$ mnożeń i dzieleń, a więc łącznie $n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ mnożeń i dzieleń.

Widzimy więc, iż w porównaniu z rozpatrywanymi powyżej metodami metoda przedstawiona w niniejszej pracy wymaga najmniejszej liczby mnożeń i dzieleń. Drugą, nie mniej ważną zaletą tej metody jest wielka prostota schematu rachunkowego.

Uwaga 4. Macierz A, dla której podano metodę obliczania wartości własnych i wektorów własnych, może być macierzą zupełnie dowolną, tzn. metoda jest słuszna zarówno dla macierzy symetrycznych jak i niesymetrycznych.

Przykład. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Zgodnie ze wzorami (10), (11) i (12) mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Mnożymy macierze po lewej i prawej stronie równości (27); przyrównujemy w macierzach wynikowych odpowiadające sobie elementy i otrzymujemy

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 10 & 0 \\ 3{,}5 & 13 & 18 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Ze związków rekurencyjnych (21) mamy:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) &= 1, \\ \alpha_2(\lambda) &= \lambda - 1, \\ \alpha_3(\lambda) &= 0{,}1\,(\lambda^2 - 10\lambda+6), \\ \alpha_4(\lambda) &= 0{,}05\,(\lambda^3 - 28\lambda^2+56\lambda - 13). \end{aligned} \tag{30}$$

Na podstawie (22) wielomian charakterystyczny macierzy A (względnie macierzy B) ma postać:

$$\lambda^4 - 29\lambda^3+72\lambda^2 - 29\lambda+1 = 0. \tag{31}$$

Pierwiastkami wielomianu charakterystycznego (31) są liczby:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0{,}038\,016, & \lambda_3 &= 2{,}203\,446, \\ \lambda_2 &= 0{,}453\,835, & \lambda_4 &= 26{,}304\,703. \end{aligned} \tag{32}$$

Podstawiając (32) do (30) otrzymujemy macierz wektorów własnych macierzy B:

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
(33)	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 0000
	−0,961 984	−0,546 165	1,203 446	25,304 703
	0,562 129	0,166 762	−1,117 929	43,489 038
	−0,545 576	0,337 058	−0,742 690	14,351 207

Macierz C^{-1} ma postać:

(34) $$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 & -2,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ze wzoru (25) otrzymujemy macierz wektorów własnych macierzy A:

$$\begin{bmatrix} 1,000\,000 & 1,000\,000 & 1,000\,000 & 1,000\,000 \\ -2,342\,476 & -0,207\,340 & 1,207\,340 & 3,342\,476 \\ 1,926\,068 & -0,675\,884 & 0,738\,796 & 7,611\,020 \\ -0,545\,576 & 0,337\,058 & -0,742\,689 & 14,351\,207 \end{bmatrix}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1957.

2. И. М. Бабаков, *Теория колебаний*, Москва 1958.

3. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Москва-Ленинград 1963.

4. И. С. Березин и Х. П. Зидков, *Методы вычислений*, Москва 1962.

5. А. М. Данилевский, *О численном решении векового уравнения*, Матем. Сб., 2, **44** (1937)

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И АМПЛИТУД СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

При определении собственных колебаний и амплитуд системы с конечным числом степеней свободы (а также во многих числовых задачах механики и физики) необходимо найти собственные значения и собственные векторы матрицы. Дается метод определения коэффициентов характеристического (векового) уравнения матрицы, основанной на некоторых свойствах почти треугольных матриц. После определения корней характеристического уравнения (собственных значений) при помощи предложенного метода можно легко определить собственные векторы матрицы.

Представленный метод отличается простой схемой, вычислительного характера и при его использовании применяется меньшее количество умножений и делений по сравнению с широко применяемыми методами Крылова, Данилевского и Ле Верье.

Summary

DETERMINATION OF THE NATURAL FREQUENCIES AND AMPLITUDES OF A SYSTEM WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

To determine the natural frequencies and amplitudes of a system with a finite number of degrees of freedom (and in many numerical problems of mechanics and physics) it is necessary to find the eigenvalues and eigenvectors of a matrix. The present paper proposes a method for determining the coefficients of the characteristic (secular) equation of a matrix based on certain properties of almost triangular matrices. After determining the roots of the characteristic equation (the eigenvalues) the eigenvectors of the matrix can be determined by this method in a simple manner.

The method is characterized by a simple computation scheme and the fact that a smaller number of multiplications and divisions must be done than in the well-known methods of Krylov, Danilevsky and Le Verrier.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 listopada 1966 r.