

ROZKŁAD WIROWOŚCI W OSCYLUJĄCEJ WARSTWIE PRZYŚCIENNEJ
WOKÓŁ CYLINDRYCZNEGO CIAŁA

HANNA PACZYŃSKA (WARSZAWA)

Rozważana jest dwuwymiarowa warstwa przyścienna powstająca przy opływie ciała cylindrycznego płynem lepkiem. Prędkość napływającego strumienia ma stały kierunek, natomiast moduł prędkości zmienia się w czasie. Dla płaskiego przepływu cieczy lepkiej nieściśliwej w warstwie przyściennej stosuje się równania Prandtla

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

$$u = v = 0 \quad \text{dla } y = 0, \quad u \rightarrow U(x, t), \quad \text{gdy } y \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

x jest mierzone wzdłuż powierzchni ciała od punktu spiętrzenia, y oznacza odległość normalną od powierzchni ciała, a u i v są odpowiednimi składowymi prędkościami w warstwie przyściennej; $p = p(x, t)$ jest ciśnieniem, ρ gęstością (z założenia stałą), $\nu = \mu/\rho$ lepkością kinematyczną, $U = U(x, t)$ prędkością napływającego strumienia potencjalnego.

Założmy, że wielkości u , v , U ulegają małym oscylacjom wokół wartości średniej:

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) e^{i\omega t}, \\ v &= v_0(x, y) + \varepsilon v_1(x, y) e^{i\omega t}, \\ U &= U_0(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Jeżeli pominiemy kwadraty zaburzeń, to z równań (1) wynikną równania następujące:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0, \quad u_1 = v_1 = 0 \quad \text{dla } y = 0, \quad u_1 \rightarrow U_1(x) \quad \text{dla } y \rightarrow \infty, \\ i\omega u_1 + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= i\omega U_1 + \frac{d}{dx}(U_0 U_1) + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Dla takiej warstwy przyściennej M. J. LIGHTHILL otrzymał rozwiązania stosując dla małych ω (tzn. $\omega V/l \gg 1$) metodę Kármána-Pohlhausena, a dla dużych ω uproszczone równanie

$$i\omega(u_1 - U_1) = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2},$$

które powstało z (3) po pozostawieniu w nim tylko wyrazów zawierających duży parametr ω i pochodną najwyższego rzędu.

Dla dużych częstości

$$(4) \quad u_1(x, y) = U_0(x) (1 - e^{-y\sqrt{i\omega/\nu}}),$$

a dla małych

$$(5) \quad u_1(x, y) = u_s(x, y) + i\omega u_2(x, y),$$

gdzie $u_s(x, y)$ jest quasi-ustalonym rozwiązaniem (3), tzn. spełnia równanie (3) w przypadku, gdy ω dąży do zera; $u_s(x, y)$ wyraża się przez u_0 w sposób następujący:

$$u_s = u_0 + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial u_0}{\partial y},$$

przy czym

$$(6) \quad u_0(x, y) = U_0 \left\{ 1 - (1 - y/\delta)^3 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{6} \lambda \right) \frac{y}{\delta} \right] \right\}$$

oraz

$$(7) \quad u_2(x, y) = (U_0 \delta^2/\nu) (1 - y/\delta)^2 \left[\frac{36 - \lambda}{240} \frac{y}{\delta} + \left(\frac{36 - \lambda}{120} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right];$$

δ oznacza tu grubość warstwy przyściennej, a $\lambda = (\delta^2/\nu) (dU_0/dx)$.

Wykorzystując powyższe rozwiązanie Lighthilla wyznaczmy wirowość w warstwie przyściennej.

Oznaczmy przez K

$$(8) \quad K = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Z (2) K możemy przedstawić w postaci

$$(9) \quad K = K_0(x, y) + \varepsilon e^{i\omega t} K_1(x, y).$$

Z definicji K i z (9) oraz z równania ciągłości

$$(10) \quad K = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \int_0^y \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dy + \varepsilon e^{i\omega t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^y \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} dy \right).$$

Równania Prandtla otrzymuje się z równań Naviera-Stokesa odrzucając te wyrazy, których rząd wielkości jest mniejszy niż $O(U_\infty/l^2)$ i $O(U_\infty^2/l)$.

Oszacujmy wyrazy wchodzące w skład K

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = O\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right), \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = O\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right),$$

natomiast

$$\int_0^y \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dy = O\left(\frac{U_\infty \delta}{l^2}\right), \quad \int_0^y \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} dy = O\left(\frac{U_\infty \delta}{l^2}\right).$$

Odrzucając w (9) wyrazy, których rząd wielkości jest mniejszy niż rząd wyrazów pozostawionych w przybliżeniu Prandla, dostajemy

$$(11) \quad K = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon e^{i\omega t} \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Biorąc pod uwagę związki (4)–(7) otrzymujemy

$$(12) \quad K = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon e^{i\omega t} U_0 \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} e^{-y\sqrt{i\omega/\nu}}$$

dla dużych częstości oraz

$$(13) \quad K = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon e^{i\omega t} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + i\omega \frac{\partial u_2}{\partial y} \right\}$$

dla małych częstości.

Rozkład wirowości zależy od kształtu opływającego ciała. Rysunek 1 przedstawia rozkład $[K_0]_{y=0}$ dla walca kołowego i dwóch walców eliptycznych o stosunku półosi $b/a = 2$ i $b/a = 1/2$ oraz dla płaskiej płytki ustawionej równolegle do kierunku przepływu. W pobliżu punktu spiętrzenia wirowość ma największą wartość dla płaskiej płytki. Dla płytki wirowość maleje szybko w przedziale $(0; 0,1 y/\sigma)$, a następnie zmienia się bardzo powoli zachowując prawie stałą wartość. Dla walców maksimum wirowości jest osiągnięte tym później (dalej od punktu spiętrzenia), im większy jest stosunek $k = b/a$. Dla $k = 1/2$ maksimum jest w odległości około $0,1 y/\sigma$ od początku układu współrzędnych, dla $k = 2$ w pobliżu punktu oderwania.

Na powierzchni ciała tzn. dla $y = 0$ ze związków (12) i (13) wynika, że

$$(14) \quad [K_d]_{y=0} = \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_{y=0} + \varepsilon e^{i\omega t} U_0 \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}$$

oraz

$$(15) \quad [K_m]_{y=0} = \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_{y=0} + \varepsilon e^{i\omega t} \left\{ \frac{3}{2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_{y=0} + i\omega \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} \right]_{y=0} \right\},$$

gdzie K_d jest wirowością dla dużych ω , K_m wirowością dla ω małych. Z (14) wynika, że amplituda oscylacji rośnie z częstością, a przesunięcie fazowe wirowości względem napływającego strumienia prędkości wynosi 45° .

Porównując (14) i (15) znajdujemy, że przesunięcie fazowe $[K_m]_{y=0}$ rośnie do wartości 45° , gdy

$$\omega = \frac{3 \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_{y=0}}{2 \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} \right]_{y=0}} = \omega_0.$$

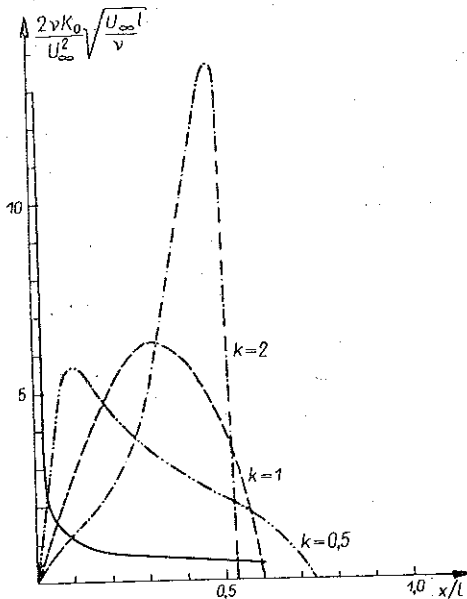
Podstawiając na miejsce $[\partial u_0 / \partial y]_{y=0}$ i $[\partial u_2 / \partial y]_{y=0}$ wartości wynikające z (6) i (7) otrzymamy

$$\omega_0 = \frac{\nu}{\delta^2} \frac{60(12+\lambda)}{36-\lambda}.$$

Stosunek amplitud jest wtedy równy

$$\frac{\varepsilon \frac{3\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_{y=0}}{\varepsilon U_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}} = \sqrt{\frac{(12+\lambda)(36-\lambda)}{480}}.$$

Ten stosunek zmienia się od 1,1 przy $\lambda = 8$ do 0,8 przy $\lambda = -4$, a więc w najczęściej spotykanych warstwach laminarnych zgodność jest zupełnie dobra. Można zatem uważać, że ω_0 jest częstotliwością graniczną stosowalności dwóch metod rozwiązania.



Rys. 1

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiony jest rozkład $K_1(x, y)$ dla dwóch warstw laminarnych: Blasiusa i Hiemenza dla granicznej częstotliwości ω_0 . Dla warstwy Blasiusa $U_0 = \text{const} = V$, $\lambda = 0$

$$K_{1a} = \frac{V}{\delta} \sqrt{10} e^{-\sqrt{10}\eta} [(\cos \sqrt{10}\eta + \sin \sqrt{10}\eta) + i(\cos \sqrt{10}\eta - \sin \sqrt{10}\eta)],$$

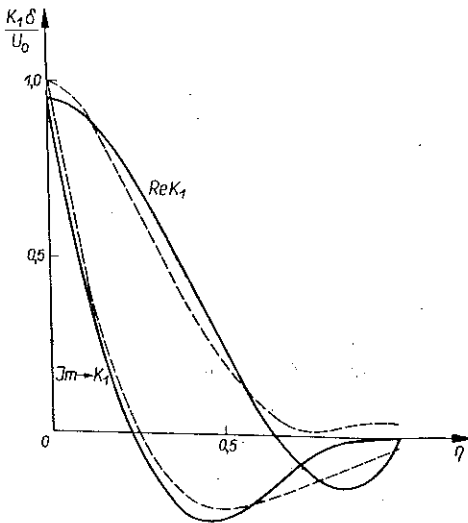
$$K_{1m} = \frac{V}{\delta} (1 - \eta) [(3 + 3\eta - 12\eta^2) + i(3 - 17\eta + 16\eta^2)].$$

Dla warstwy Hiemenza $U_0 = \beta x$, $\lambda = 7.05$, $\delta = \text{const}$

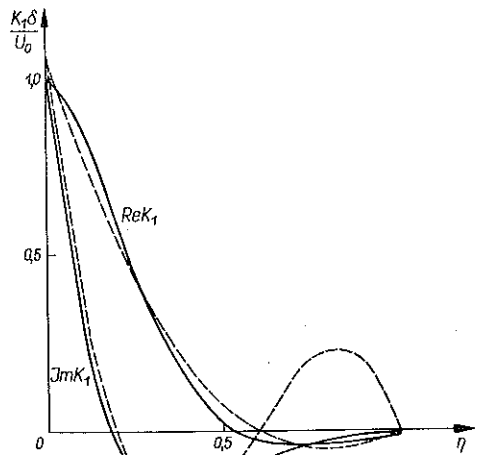
$$K_{1a} = \frac{\beta x}{\delta} \sqrt{19,7} e^{-\sqrt{19,7}\eta} [(\cos \sqrt{19,7}\eta + \sin \sqrt{19,7}\eta) + i(\cos \sqrt{19,7}\eta - \sin \sqrt{19,7}\eta)],$$

$$K_{1m} = \frac{\beta x}{\delta} (1 - \eta) [(4,7625 + 9,3375\eta + 2,1\eta^2) + 39,482i(0,121 - 0,879\eta + 1,035\eta^2)].$$

Jak widać z rysunków, zgodność wyników otrzymanych dla dużych i małych częstości jest dobra dla $\eta = y/\delta$ z przedziału (0; 0,5). Dla pozostałych η różnice są znaczne podobnie jak i dla rozkładu prędkości.



Rys. 2

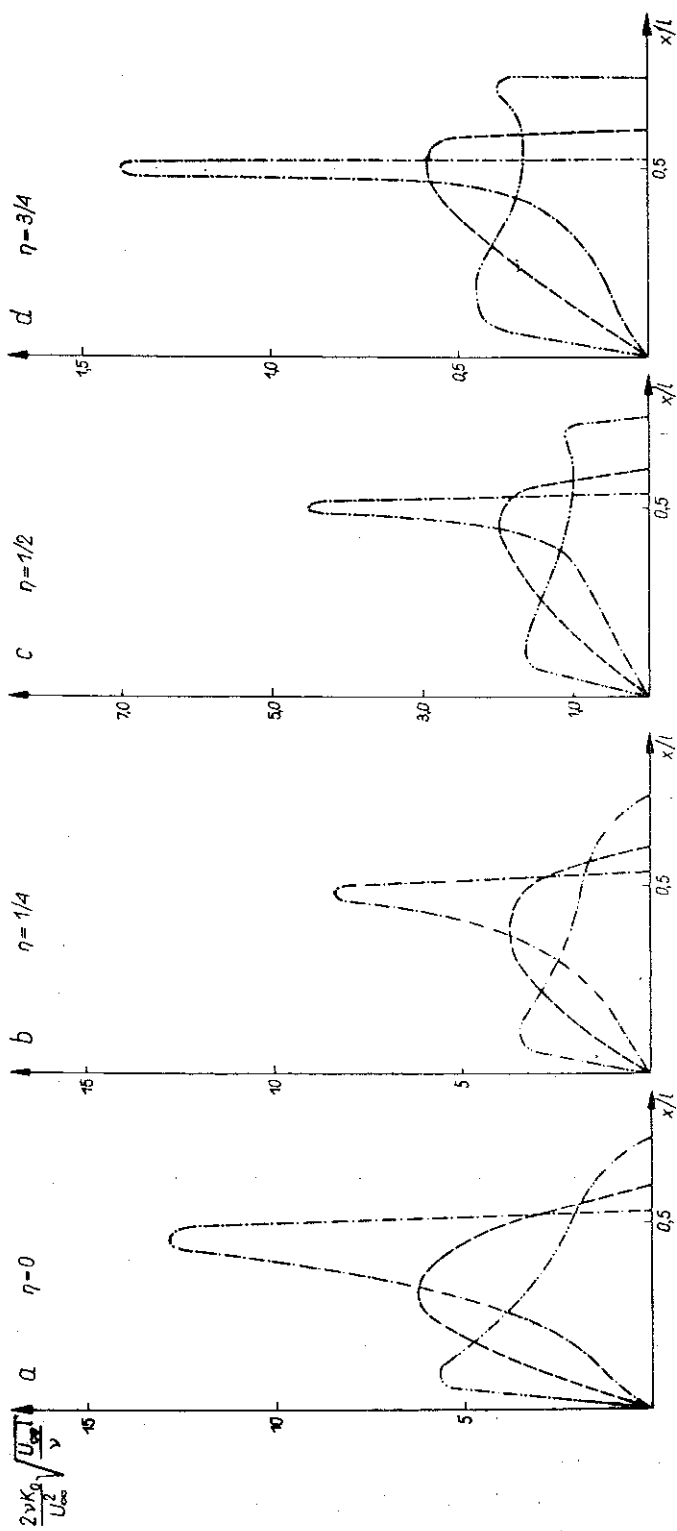


Rys. 3

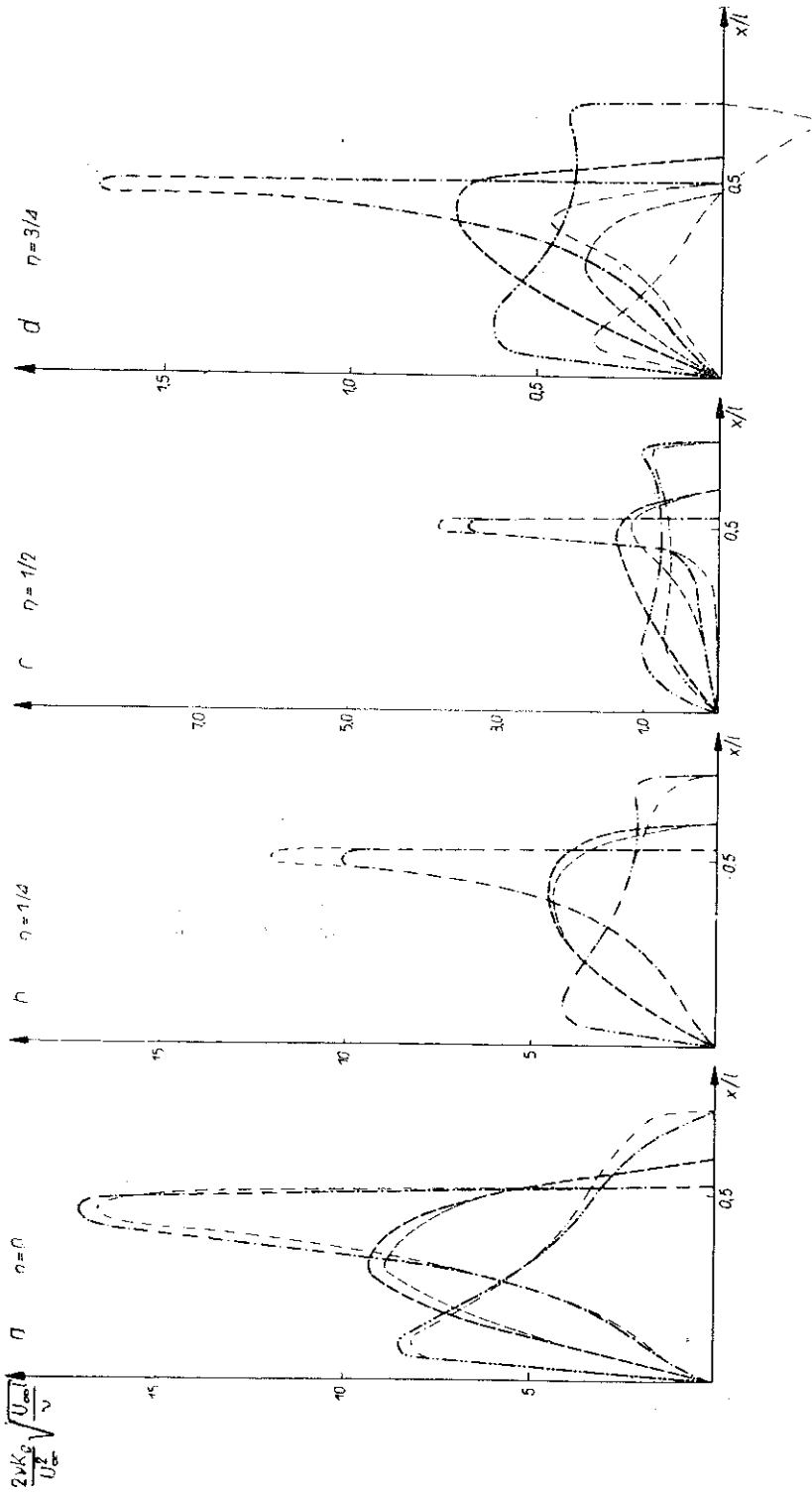
Rozkład wirowości w całej warstwie przyściennej jest następujący:

$$K_m = \frac{U_0}{\delta} (1 - \eta)^2 \left[\left(2 + \frac{1}{6} \lambda \right) + 2\eta \left(2 - \frac{1}{3} \lambda \right) \right] + \varepsilon e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{2} \frac{U_0}{\delta} (1 - \eta) \left[\left(6 + \frac{1}{2} \lambda \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta \left(6 - \frac{7}{2} \lambda \right) - 4\eta^2 (6 - \lambda) \right] + i\omega \frac{U_0 \delta}{\gamma} (1 - \eta) \left[\left(\frac{3}{20} - \frac{\lambda}{240} \right) - \eta \left(\frac{17}{20} + \frac{\lambda}{240} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{30} \lambda \right) \right] \right\},$$

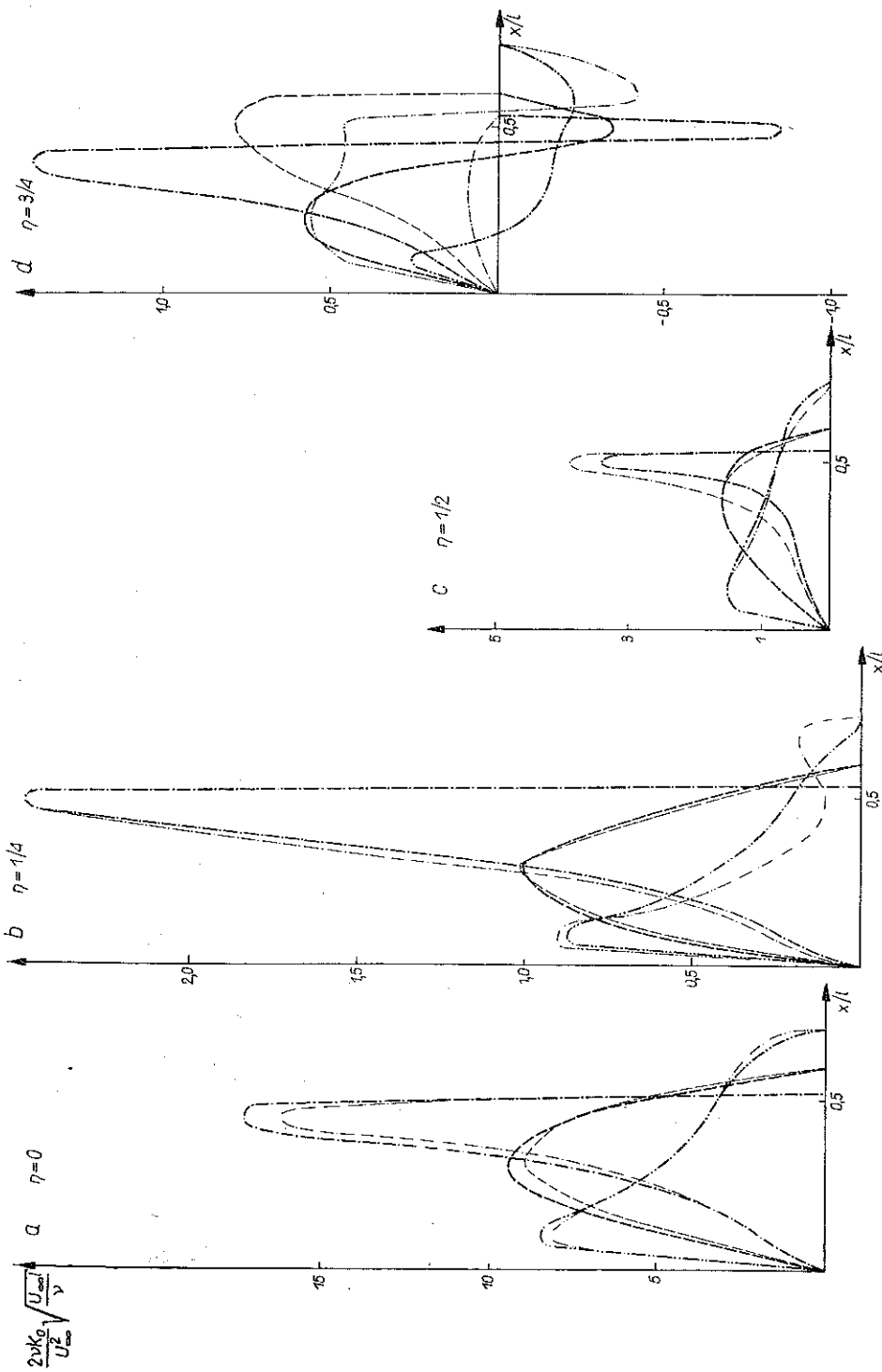
$$K_a = \frac{U_0}{\delta} (1 - \eta)^2 \left[\left(2 + \frac{1}{6} \lambda \right) + 2\eta \left(2 - \frac{1}{3} \lambda \right) \right] + \varepsilon e^{i\omega t} U_0 \sqrt{i\omega/\nu} e^{-\eta\delta\sqrt{i\omega/\nu}}.$$



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Rysunki 4-6 przedstawiają rozkład wirowości dla walca kołowego i dwóch walców eliptycznych dla wartości $\eta = 0, 1/4, 1/2, 3/4$.

Rysunki 4a-c przedstawiają rozkład $K_0(x, \eta)$. Podobnie jak na ciełe ($\eta = 0$) dla wszystkich η maksimum wirowości jest tym dalej od punktu spiętrzenia, im większy jest stosunek $k = b/a$. Im większe jest η , tym dalej od punktu spiętrzenia występuje maksimum wirowości, tzn. im dalej od ciała, tym później wirowość osiąga największą wartość.

Rysunki 5a-c przedstawiają rozkład części rzeczywistej $K_1(x, \eta)$ dla granicznej częstości ω_0 . Ten rozkład jest bardzo podobny do rozkładu $K_0(x, \eta)$. Liniami przerywanymi naznaczono rozkład obliczony z przybliżenia dla dużych ω , ciągłymi liniami — dla małych. Dla η zmieniającego się od 0 do 0,5 zgodność otrzymanych wyników jest dobra. Znaczne różnice otrzymano dla $\eta = 3/4$, szczególnie duża jest niezgodność dla walca eliptycznego o stosunku półosi równym 2.

Część urojona $K_1(x, \eta)$ dla częstości ω_0 przedstawiona jest na rysunkach 6a-c. Zależność $\text{Im } K_1(x, \eta)$ od kształtu ciała jest analogiczna do zależności $K_0(x, \eta)$ i $\text{Re } K_1(x, \eta)$. Niezgodność wyników z przybliżenia dla dużych i małych częstości, gdy oddalamy się od ciała, jest dla części urojonej $K_1(x, \eta)$ szczególnie duża.

Jak widać z tej analizy, rozkład wirowości w oscylującej warstwie przyściennej zależy od kształtu ciała opływającego w ten sposób, że największą wartość osiąga tym dalej od punktu spiętrzenia, im przeszkoda jest «bardziej stroma» w stosunku do kierunku przepływu. To maksimum przesuwa się w kierunku punktu oderwania, gdy oddalamy się od ciała. W miarę oddalania się od ciała maleją wartości, jakie przyjmuje wirowość dążąc do zera na granicy warstwy. Dla wartości granicznej ω_0 dobrą zgodność wyników otrzymuje się tylko do $\eta = 1/2$; dla η większych od $1/2$ różnice są znaczne, szczególnie dla części urojonej $K_1(x, \eta)$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. FISZDON, *On certain methods of analysis of the vortex flow behind an oscillating two-dimensional blunt-body*, Arch. Mech. Stos., 1, 17 (1965).
2. M. J. LIGHTHILL, *The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity*, Proc. Roy. Soc., 224 (1953).
3. S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1952.
4. L. ROSENHEID, *Laminar Boundary layers*, Oxford University Press, 1963.
5. Т. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, Изд. Иностранной Литературы, 1956.

Резюме

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИХРЕННОСТИ В ОСЦИЛИРУЮЩИМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Для определения завихренности в следе возникающим за колеблющимся телом [1] следует найти распределение завихренности на самом теле и вблизи него.

Завихренность в несжимаемом течении возникает вследствие сил вязкости, которые действуют, прежде всего, в пограничном слое. В работе найдено распределение завихренности

осциллирующего пограничного слоя при обтекании цилиндрического тела. Автор исходит из тех соображений, которым руководился Ляйтхилл и использовал его результаты. Рассматриваются два случая: малой ($\omega V/l \ll 1$) и большой ($\omega V/l \gg 1$) частоты, где ω — обозначает частоту, V — скорость потенциального течения, l — характеристический размер тела. Рассматривается зависимость распределения завихренности от формы обтекаемого тела.

S u m m a r y

VORTICITY DISTRIBUTION IN AN OSCILLATING BOUNDARY LAYER AROUND A CYLINDRICAL BODY

The vorticity in the wake behind of an oscillating body depends on the vorticity distribution on the body and near it. The generation of vorticity in an incompressible fluid is due to the viscosity which acts above all in the boundary layer. The object of this paper is to analyse the vorticity distribution in the boundary layer around a cylindrical body. The problem of velocity distribution in such a layer was considered by Lighthill in [2]. His results are used in this paper as a starting point. The calculations are made for the two limiting cases, when $\omega V/l \gg 1$ and $\omega V/l \ll 1$; V is the velocity of potential flow, undisturbed by the presence of the body, l — the characteristic length of the body, and ω — the frequency of oscillation. The dependence of the vorticity distribution on the shape of the body is investigated.

ZAKŁAD MECHANIKI CIECZY I GAZÓW
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 października 1966 r.
