

OBLICZANIE WSPÓLRZĘDNYCH ŚRODKA ŚCINANIA
DOWOLNEGO PRZEKROJU ASYMETRYCZNEGO O BRZEGU JEDNOSPÓJNYM

R. ŁĄCZKOWSKI (ELBLĄG)

1. Wstęp

Środkiem ścinania nazywamy punkt, leżący w płaszczyźnie poprzecznego przekroju pręta, przez który poprowadzona siła prostopadła do osi pręta wywoła jego zginanie bez skręcania. Jeżeli przekrój posiada jedną oś symetrii, to środek ścinania leży na tej osi, która jest jednocześnie główną osią bezwładności przekroju. Jeżeli przekrój posiada dwie osie symetrii, to środek ścinania leży w punkcie przecięcia głównych osi bezwładności i pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju.

Znajomość położenia środka ścinania jest niezbędna przy dokładnych obliczeniach wytrzymałościowych i wibracyjnych prętów o przekrojach z jedną osią symetrii lub asymetrycznych. W dostępnej literaturze istnieją uproszczone metody pozwalające obliczyć położenie środka ścinania dla przekrojów cienkich i posiadających jedną oś symetrii. Metod tych nie można stosować dla przekrojów grubych lub asymetrycznych, ponieważ błędy obliczeniowe są wtedy duże.

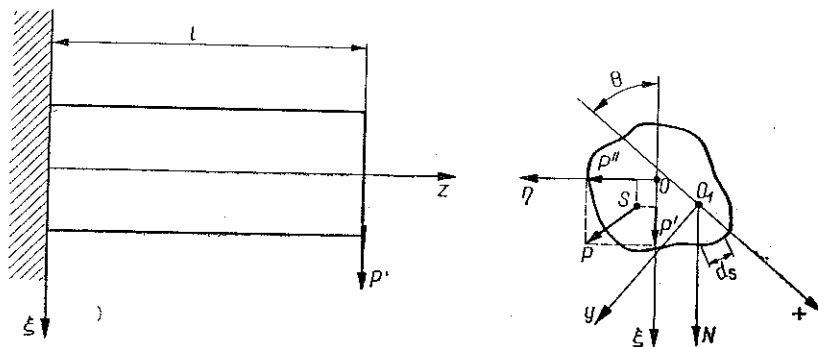
W niniejszej pracy przedstawiono metodę obliczania położenia środka ścinania oraz sztywności skręcania dla dowolnego przekroju. Model matematyczny zbudowano na podstawie podstawowych równań teorii sprężystości. Rozwiązano go przez wprowadzenie funkcji naprężeń oraz zastosowanie rachunku wariacyjnego. Dla przekrojów o brzegu opisanym nieanalitycznie rozwiązanie podano w postaci numerycznej osiągając dokładność wystarczającą dla praktycznych zastosowań.

2. Ważniejsze oznaczenia

- x_0, y_0 współrzędne środka ciężkości w skali rysunku w cm,
- x_s, y_s współrzędne środka ścinania w skali rysunku w cm,
- I_ξ, I_η momenty bezwładności względem głównych osi bezwładności w cm^4 ,
- I_0 biegunowy moment bezwładności względem środka ciężkości w cm^4 ,
- I_p biegunowy moment bezwładności względem środka ścinania w cm^4 ,
- C sztywność przekroju na skręcanie w kGcm^2/rd ,
- F pole przekroju w cm^2 ,
- M moment skręcający w kGcm ,
- σ naprężenie normalne w kG/cm^2 ,
- τ naprężenie styczne w kG/cm^2 ,
- G moduł odkształcenia postaciowego w kG/cm^2 ,
- ν współczynnik Poissona.

3. Model matematyczny

Do rozważań przyjęto pręt o stałym przekroju (rys. 1). W środku ciężkości $O(x_0, y_0)$ utwierdzonego przekroju umieszczono początek układu współrzędnych prostokątnych ξ, η, z . Oś ξ i η są głównymi osiami bezwładności przekroju. Wprowadzono również drugi układ współrzędnych prostokątnych x, y, z , którego początek umieszczono w dowolnym punkcie O_1 , a osie x i y skierowano w dowolnym kierunku.



Rys. 1

Pręt obciążono na prawym brzegu siłą P prostopadłą do osi pręta i zaczepioną w środku ścinania $S(x_s, y_s)$. Siłę tę rozłożyło na dwie składowe P' i P'' działające w kierunku głównych osi bezwładności.

Z warunku równowagi momentów obliczanych względem środka ścinania można napisać

$$\iint [(x - x_s) \tau_{yz} - (y - y_s) \tau_{xz}] dx dy = 0.$$

Stąd

$$(3.1) \quad M - x_s \bar{Y} + y_s \bar{X} = 0,$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} M &= \iint (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy, \\ \bar{Y} &= \iint \tau_{yz} dx dy, \\ \bar{X} &= \iint \tau_{xz} dx dy. \end{aligned}$$

Z równania (3.1) można obliczyć współrzędne środka ścinania, jeżeli jest znany rozkład naprężeń stycznych powstałych przy zginaniu siłą P . Rozkład ten określono stosując metodę półdwrotną Saint-Venanta [1]. W tym celu założono, że naprężenia normalne są rozmieszczone tak samo, jak przy czystym zginaniu pręta. Dla przekroju poprzecznego określonego współrzędną z naprężenia te wyrażone są wzorem

$$\sigma_z = - \frac{P'(l-z) \xi}{I_\eta} - \frac{P''(l-z) \eta}{I_\xi}.$$

Stosując wzory na obrót i przesunięcie układu współrzędnych powyższą zależność wyrażono za pomocą zmiennych x i y :

$$(3.3) \quad \sigma_z = [a(x - x_0) + b(y - y_0)](z - l),$$

gdzie

$$a = \frac{P'}{I_\eta} \cos \theta - \frac{P''}{I_\xi} \sin \theta,$$

$$b = \frac{P'}{I_\eta} \sin \theta + \frac{P''}{I_\xi} \cos \theta.$$

Przyjęto również, że $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Przy podanych założeniach i pominięciu sił masowych równania równowagi teorii sprężystości [1] mają postać

$$(3.4) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Jeżeli warunki brzegowe teorii sprężystości [1] zastosujemy do powierzchni bocznej pręta wolnej od sił zewnętrznych, to zredukują się one do równania

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0,$$

gdzie przez l i m oznaczono kosinusy kierunkowe zewnętrznej normalnej N do powierzchni bocznej pręta (rys. 1). Po wprowadzeniu elementu ds krzywej ograniczającej przekrój poprzeczny można napisać

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}.$$

Stąd warunek brzegowy przyjmuje postać

$$(3.5) \quad \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Wykorzystując przyjęte założenia i zależność (3.3) zredukowano sześć równań nierozdzielności [1] do dwu równań o postaci

$$(3.6) \quad \nabla^2 \tau_{yz} = -\frac{b}{1+\nu}, \quad \nabla^2 \tau_{xz} = -\frac{a}{1+\nu},$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

W ten sposób rozważane zagadnienie sprowadzono do znalezienia dla τ_{xz} i τ_{yz} takich funkcji x i y , które będą spełniały równania (3.4)–(3.6). Mając w ten sposób określony rozkład naprężeń stycznych z równań (3.1) i (3.2) obliczyć można współrzędne środka ścinania.

4. Funkcja naprężeń

Przedstawiony problem matematyczny rozwiązano przez wprowadzenie funkcji naprężeń $\Phi(x, y)$ [1]. Można stwierdzić, że równania równowagi (3.4) będą spełnione, jeżeli przyjmie się następujące zależności:

$$(4.1) \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{a}{2}(x^2 - 2x_0 x), \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{b}{2}(y^2 - 2y_0 y).$$

Podstawiając (4.1) do warunku brzegowego (3.5) znajdziemy równanie

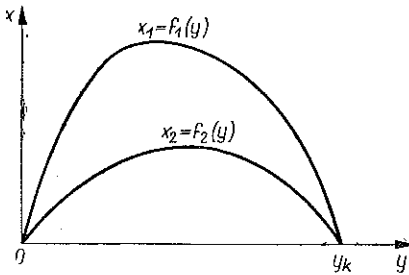
$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{a}{2}(x^2 - 2x_0 x) \frac{dy}{ds} - \frac{b}{2}(y^2 - 2y_0 y) \frac{dx}{ds}.$$

Ponieważ

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{ds} = x' \frac{dy}{ds},$$

to ostatnie równanie przyjmuje postać

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{a}{2}(x^2 - 2x_0 x) \frac{dy}{ds} - \frac{b}{2}(y^2 - 2y_0 y) x' \frac{dy}{ds}.$$



Rys. 2

Z równania tego można obliczyć wartość funkcji naprężeń Φ wzdłuż brzegu przekroju poprzecznego.

Na rysunku 2 pokazano przykładowo asymetryczny przekrój poprzeczny łopatki turbinowej. W przyjętym układzie współrzędnych górny brzeg przekroju opisuje funkcja $x_1 = f_1(y)$, a dolny $x_2 = f_2(y)$. Całkując ostatnie równanie wzdłuż obu tych linii otrzymano odpowiednie wartości funkcji naprężeń na górnym i dolnym brzegu profilu:

(4.2)

$$\Phi = F_1(y) = a \int_0^y \left(\frac{1}{2} x_1^2 - x_0 x_1 \right) dy - b \left[\left(\frac{1}{2} y^2 - y_0 y \right) x_1 - \int_0^y (y - y_0) x_1 dy \right],$$

$$\Phi = F_2(y) = a \int_0^y \left(\frac{1}{2} x_2^2 - x_0 x_2 \right) dy - b \left[\left(\frac{1}{2} y^2 - y_0 y \right) x_2 - \int_0^y (y - y_0) x_2 dy \right].$$

Funkcje F_1 i F_2 określają warunek brzegowy, który można przedstawić w postaci jednorodnej jako funkcję

$$(4.3) \quad F(x, y) = \frac{(F_2 - F_1)x + F_1x_2 - F_2x_1}{x_2 - x_1},$$

dla której $F = F_1(y)$, jeśli $x = x_1$ i $F = F_2(y)$, jeśli $x = x_2$. Podobnie równanie brzegu przekroju można zapisać w postaci jednorodnej

$$f(x, y) = (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Po wykorzystaniu zależności (4.2) wzór (4.3) przedstawiono w postaci

$$(4.4) \quad F = a(\varphi x + \psi) + b(vx + q),$$

gdzie

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{x_1 - x_2} \int_0^y (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) dy, \\ \psi &= \frac{x_1}{x_1 - x_2} \int_0^y \left(\frac{x_2^2}{2} - x_0 x_2 \right) dy - \frac{x_2}{x_1 - x_2} \int_0^y \left(\frac{x_1^2}{2} - x_0 x_1 \right) dy, \\ v &= - \left(\frac{y^2}{2} - y_0 y \right) + \frac{1}{x_1 - x_2} \int_0^y (y - y_0)(x_1 - x_2) dy, \\ q &= \frac{x_1}{x_1 - x_2} \int_0^y (y - y_0) x_2 dy - \frac{x_2}{x_1 - x_2} \int_0^y (y - y_0) x_1 dy. \end{aligned}$$

Otrzymano w ten sposób warunek brzegowy (4.4) na brzegu $f(x, y) = 0$.

5. Wariacyjne równanie zginanego pręta

Po podstawieniu zależności (4.1) do równań (3.6) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = a \frac{\nu}{1 + \nu}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = -b \frac{\nu}{1 + \nu}.$$

Stąd można napisać równanie

$$(5.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} (ay - bx) + C.$$

Według [1] stałą całkowania C można określić z zależności

$$(5.2) \quad \frac{\partial}{\partial z} (2\omega_z) = - \frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right),$$

gdzie ω_z oznacza obrót elementu powierzchni w płaszczyźnie przekroju. Po podstawieniu (5.1) do (5.2) znajdziemy

$$2G \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = - \frac{\nu}{1+\nu} (ay - bx) - C.$$

Ponieważ na wstępie przyjęto, że siła P jest zaczepiona w środku ścinania, stąd pręt jest zginany bez skręcania. Wiadomo z [1], że wtedy $\partial \omega_z / \partial z = 0$ dla elementów położonych w środku ciężkości przekroju. Stąd

$$(5.3) \quad C = - \frac{\nu}{1+\nu} (ay_0 - bx_0).$$

Po podstawieniu (5.3) do (5.1) mamy

$$(5.4) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = - Q(x, y),$$

gdzie

$$(5.5) \quad Q(x, y) = \frac{\nu}{1+\nu} [b(x - x_0) - a(y - y_0)].$$

Równanie (5.4) określa jednoznacznie warunki nierozdzielności dla pręta zginanego bez skręcania. Jest to równanie Poissona, dla którego należy znaleźć rozwiązanie przy jednoczesnym spełnieniu warunku brzegowego (4.4). Wiadomo z [2], że zadanie to można zastąpić zadaniem wariacyjnym na ekstremum funkcjonau, dla którego równanie (5.4) jest równaniem Ostrogradskiego. W rozpatrywanym przypadku funkcjonal ten ma postać

$$(5.6) \quad I[\Phi(x, y)] = \iint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 2\Phi Q(x, y) \right] dx dy.$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy nową funkcję

$$\Omega(x, y) = \Phi(x, y) - F(x, y),$$

która na brzegu przekroju spełnia warunek $\Omega = 0$. Podstawiając do wzoru (5.6) zależność $\Phi = F + \Omega$ otrzymujemy

$$I[\Phi(x, y)] = I_1 + 2I_2 + I_3 - 2 \iint (F + \Omega) Q(x, y) dx dy,$$

gdzie

$$I_1 = \iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

$$I_2 = \iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$I_3 = \iint \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Za pomocą wzoru Greena można wykazać [3], że

$$I_2 = \oint \frac{\partial F}{\partial n} \Omega ds - \iint \Omega \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dx dy,$$

gdzie n oznacza kierunek zewnętrznej normalnej N do brzegu przekroju. Ze względu na warunek brzegowy $\Omega = 0$ można napisać

$$\oint \frac{\partial F}{\partial n} \Omega ds = 0,$$

stąd

$$I_2 = - \iint \Omega \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Funkcjonał (5.6) przyjmuje wówczas postać

$$\begin{aligned} I[\Phi(x, y)] = & \iint \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 2 \iint \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + Q(x, y) \right] \times \\ & \times \Omega dx dy + \iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 2 \iint FQ(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału jest zerowanie się jego wariacji, czyli $\delta I = 0$. Stąd otrzymano wariacyjne równanie zginanego pręta o postaci

$$(5.7) \quad \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 2 \iint \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + Q(x, y) \right] \delta \Omega dx dy.$$

Z równania tego można określić funkcję Ω , która spełni również warunek brzegowy $\Omega = 0$.

6. Określenie funkcji Ω metodą Rietza

Przyjęto funkcję dopuszczalną w postaci

$$(6.1) \quad \Omega = D(x - x_1)(x - x_2).$$

Spełnia ona warunek brzegowy $\Omega = 0$. Parametr D należy określić z równania (5.7). W tym celu obliczamy

$$\iint \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{1}{3} D^2 \int_0^{y_b} (x_1 - x_2)^3 [1 + (x_1')^2 + (x_2')^2 - x_1' x_2'] dy,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = a(\varphi'' x + \psi'') + b(v'' x + q'').$$

Wykorzystując ostatnie dwie zależności i wzór (5.5) oraz równanie (5.7) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} D \int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 [1 + (x_1')^2 + (x_2')^2 - x_1' x_2'] dy = \\ = \int_0^{y_k} \int_{x_2}^{x_1} \left\{ a \left[\varphi'' x + \psi'' - \frac{\nu}{1+\nu} (y - y_0) \right] [x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2] + \right. \\ \left. + b \left[\varphi'' x + q'' + \frac{\nu}{1+\nu} (x - x_0) \right] [x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2] \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Po wykonaniu całkowania prawej strony powyższego równania i wykorzystaniu faktu, że dla $y = 0$ i $y = y_k$ jest $x_1 = x_2$, znajdziemy

$$(6.2) \quad D = a \frac{\gamma_1}{\lambda} + b \frac{\gamma_2}{\lambda},$$

gdzie

$$\begin{aligned} (6.3) \quad \lambda &= \int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 [1 + (x_1')^2 + (x_2')^2 - x_1' x_2'] dy, \\ \gamma_1 &= \int_0^{y_k} \left\{ \frac{1}{2} \varphi' [x_1' (2x_1 + x_2) - x_2' (x_1 + 2x_2)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \psi' (x_1' - x_2') + \frac{\nu}{2(1+\nu)} (y - y_0) (x_1 - x_2) \right\} (x_1 - x_2)^2 dy, \\ \gamma_2 &= \int_0^{y_k} \left\{ \frac{1}{2} \varphi' [x_1' (2x_1 + x_2) - x_2' (x_1 + 2x_2)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} q' (x_1' - x_2') - \frac{\nu}{4(1+\nu)} [(x_1^2 - x_2^2) - 2x_0(x_1 - x_2)] \right\} (x_1 - x_2)^2 dy. \end{aligned}$$

Podstawiając zależności (4.5) do dwóch ostatnich równań otrzymujemy

$$(6.4) \quad \gamma_1 = \int_0^{y_k} \left[- (x_1 - x_2) (x_1' + x_2') (x_1' - x_2') \int_0^y (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) dy + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{2(1+\nu)} (y - y_0) (x_1 - x_2)^3 \right] dy,$$

$$(6.5) \quad \gamma_2 = \int_0^{y_k} \left[- (x_1 - x_2) (x_1' + x_2') (x_1' - x_2') \int_0^y (y - y_0) (x_1 - x_2) dy - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{2(1+\nu)} (x_1 - x_2)^3 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) \right] dy.$$

Po obliczeniu parametru D ze wzoru (6.2) funkcja Ω jest jednoznacznie określona z zależności (6.1).

7. Współrzędne środka ścinania

Po wstawieniu wzorów (4.1) do (3.2), wykorzystaniu związku $\Phi = F + \Omega$ oraz uwzględnieniu przy całkowaniu warunku $\Omega = 0$ na brzegu profilu znajdziemy

$$M = - \int \int \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - 2\Omega - \frac{a}{2} y(x^2 - 2x_0 x) + \frac{b}{2} x(y^2 - 2y_0 y) \right] dx dy,$$

$$\bar{Y} = - \int \int \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{b}{2} (y^2 - 2y_0 y) \right] dx dy,$$

$$\bar{X} = \int \int \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{a}{2} (x^2 - 2x_0 x) \right] dx dy.$$

Podstawiając funkcje (4.4) i (6.1) do powyższych wzorów oraz wykonując całkowanie względem zmiennej x przekształcono je do postaci następującej:

$$M = - \int_0^{y_k} \left\{ \frac{1}{2} a \left[\varphi(x_1 + x_2) + \varphi'(x_1 + x_2) + 2\psi' y - y \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} + \right. \right. \\ \left. \left. + x_0 y(x_1 + x_2) \right] (x_1 - x_2) + \frac{1}{2} b \left[v(x_1 + x_2) + yv'(x_1 + x_2) + 2q' y + \right. \right. \\ \left. \left. + (x_1 + x_2) \left(\frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \right] (x_1 - x_2) + \frac{1}{3} D(x_1 - x_2)^3 \right\} dy,$$

$$\bar{Y} = - \int_0^{y_k} \left[a\varphi + b \left(v + \frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \right] (x_1 - x_2) dy,$$

$$\bar{X} = \frac{1}{2} \int_0^{y_k} \left\{ a \left[\varphi'(x_1 + x_2) + 2\psi' - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} + x_0(x_1 + x_2) \right] + b [v'(x_1 + x_2) + 2q'] \right\} (x_1 - x_2) dy.$$

Wykorzystanie wzorów (4.5) oraz całkowanie przez części doprowadza do zależności:

$$(7.1) \quad M = -a \int_0^{y_k} \left\{ (x_1 + x_2) \int_0^y (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) dy + \right. \\ \left. + \frac{y}{2} \left[(x_1^2 - x_2^2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) + \frac{(x_1 - x_2)^3}{6} \right] \right\} dy - \\ - b \int_0^{y_k} \left\{ (x_1 + x_2) \int_0^y (y - y_0) (x_1 - x_2) dy + \frac{y}{2} (x_1^2 - x_2^2) (y - y_0) \right\} dy - \\ - \frac{1}{3} \int_0^{y_k} D (x_1 - x_2)^3 dy,$$

$$(7.2) \quad \bar{Y} = -a \int_0^{y_k} (y_k - y) (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) dy - \\ - b \int_0^{y_k} (y_k - y) (y - y_0) (x_1 - x_2) dy,$$

$$(7.3) \quad \bar{X} = \frac{1}{2} a \int_0^{y_k} \left[\frac{2}{3} (x_1^3 - x_2^3) - x_0 (x_1^2 - x_2^2) \right] dy + \\ + \frac{1}{2} b \int_0^{y_k} (x_1^2 - x_2^2) (y - y_0) dy.$$

Jeżeli zależność (6.2) zostanie wstawiona do wzoru (7.1), to moment M będzie jednoznacznie określony. Wykorzystując związki (7.1)–(7.3), z równania (3.1) można określić współrzędne środka ścinania x_s i y_s .

Funkcje x_1 i x_2 są najczęściej określone za pomocą rysunku przekroju wykreślonego w skali ε . Wtedy całki występujące w wyprowadzonych zależnościach należy obliczać przybliżonymi metodami numerycznymi. W tym celu przedział całkowania $[0, y_k]$ dzieli się na n części. Wielokrotne obliczenia wykazały, że podział na 20 części zapewnia dokładność wystarczającą dla zastosowań praktycznych. Wówczas $\Delta y = y_k/20$, a pochodne zastąpiono ilorazami różnicowymi:

$$x'_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta y} = \frac{20}{y_k} \Delta x_1, \quad x'_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta y} = \frac{20}{y_k} \Delta x_2.$$

Po zastąpieniu całek oznaczonych sumami skończonymi i wprowadzeniu współrzędnej bezwymiarowej $\zeta = y/y_k$ i $\zeta_0 = y_0/y_k$ znajdziemy

$$D = \frac{y_k}{2} \left[a \frac{- \sum (x_1 - x_2) [(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2] \cdot 2 \int_0^{\zeta} (x_1 - x_2) \times \right. \\ \times \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) d\zeta + \frac{y_k^2}{400} \frac{\nu}{1 + \nu} \sum (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2)^3 \\ \left. \sum (x_1 - x_2)^3 \left[\frac{y_k^2}{400} + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - \Delta x_1 \Delta x_2 \right] \right. \\ \left. y_k \sum (x_1 - x_2) [(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2] 2 \int_0^{\zeta} (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{y_k}{400} \frac{\nu}{1 + \nu} \sum (x_1 - x_2)^3 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) \right] \\ - b \frac{\sum (x_1 - x_2)^3 \left[\frac{y_k^2}{400} + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - \Delta x_1 \Delta x_2 \right]}{\sum (x_1 - x_2)^3 \left[\frac{y_k^2}{400} + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - \Delta x_1 \Delta x_2 \right]}, \\ \bar{Y} = \frac{y_k}{20} \left[-a y_k \sum (1 - \zeta) (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) - \right. \\ \left. - b y_k^2 \sum (1 - \zeta) (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2) \right],$$

$$\bar{X} = \frac{y_k}{20} \left\{ a \sum \left[\frac{1}{3} (x_1^3 - x_2^3) - \frac{x_0}{2} (x_1^2 - x_2^2) \right] + b \frac{y_k}{2} \sum (x_1^2 - x_2^2) (\zeta - \zeta_0) \right\},$$

$$M = \frac{y_k}{20} \left\{ -a \frac{y_k}{2} \left(\sum (x_1 + x_2) \cdot 2 \int_0^\xi (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) d\zeta + \right. \right.$$

$$+ \sum \zeta \left[(x_1^2 - x_2^2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) + \frac{(x_1 - x_2)^3}{6} \right] -$$

$$- b \frac{y_k^2}{2} \left[\sum (x_1 + x_2) \cdot 2 \int_0^\xi (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2) d\zeta + \right.$$

$$\left. \left. + \sum \zeta (x_1^2 - x_2^2) (\zeta - \zeta_0) \right] - \frac{1}{3} D \sum (x_1 - x_2)^3 \right\}.$$

Podstawiając ostatnie wzory do równania (3.1) mamy

$$(7.4) \quad (d_5 + d_7 - x_s d_1 + y_s d_3) a + (d_6 + d_8 - x_s d_2 + y_s d_4) b = 0,$$

gdzie

$$d_1 = -2 \sum (1 - \zeta) (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right),$$

$$d_2 = -2y_k \sum (1 - \zeta) (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2),$$

$$d_3 = \frac{1}{y_k} \sum \left[\frac{2}{3} (x_1^3 - x_2^3) - x_0 (x_1^2 - x_2^2) \right],$$

$$d_4 = \sum (x_1^2 - x_2^2) (\zeta - \zeta_0),$$

$$(7.5) \quad d_5 = - \left\{ \sum (x_1 + x_2) \cdot 2 \int_0^\xi (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) d\zeta + \right.$$

$$\left. + \sum \zeta \left[(x_1^2 - x_2^2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) + \frac{(x_1 - x_2)^3}{6} \right] \right\},$$

$$d_6 = -y_k \left[\sum (x_1 + x_2) \cdot 2 \int_0^\xi (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2) d\zeta + \sum \zeta (x_1^2 - x_2^2) (\zeta - \zeta_0) \right],$$

$$\sum (x_1 - x_2) [(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2] \cdot 2 \int_0^\xi (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right) d\zeta -$$

$$- \frac{y_k^2}{400} \frac{\nu}{1 + \nu} \sum (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2)^3$$

$$d_7 = \frac{\quad \times}{3 \sum (x_1 - x_2)^3 \left[\frac{y_k^2}{400} + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - \Delta x_1 \Delta x_2 \right]}$$

$$\times \sum (x_1 - x_2)^3,$$

$$(7.5) \quad d_8 = \frac{y_k \sum (x_1 - x_2) [(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2] \cdot 2 \int_0^{\zeta} (\zeta - \zeta_0) (x_1 - x_2) d\zeta + \frac{y_k}{400} \frac{\nu}{1+\nu} \sum (x_1 - x_2)^3 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0 \right)}{3 \sum (x_1 - x_2)^3 \left[\frac{y_k^2}{400} + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - \Delta x_1 \Delta x_2 \right]} \times \sum (x_1 - x_2)^3.$$

Równanie (7.4) będzie spełnione, jeżeli

$$d_5 + d_7 - x_s d_1 + y_s d_3 = 0, \quad d_6 + d_8 - x_s d_2 + y_s d_4 = 0.$$

Rozwiązania powyższego układu równań mają postać:

$$(7.6) \quad x_s = \frac{d_3 (d_6 + d_8) - d_4 (d_5 + d_7)}{d_2 d_3 - d_1 d_4}, \quad y_s = \frac{d_1 (d_6 + d_8) - d_2 (d_5 + d_7)}{d_2 d_3 - d_1 d_4}.$$

Posługując się znanymi zależnościami z geometrii mas można wyprowadzić następujące wzory na współrzędne środka ciężkości przekroju:

$$(7.7) \quad x_0 = \frac{\sum (x_1^2 - x_2^2)}{2 \sum (x_1 - x_2)}, \quad y_0 = \frac{y_k \sum \zeta (x_1 - x_2)}{\sum (x_1 - x_2)}.$$

Współrzędne środka ścinania oraz środka ciężkości podano w skali rysunku przekroju ε . Rzeczywista odległość między tymi punktami wynosi

$$(7.8) \quad h = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2}.$$

Biegunowy moment bezwładności względem środka ścinania można określić wówczas z zależności

$$(7.9) \quad I_p = I_0 + Fh^2,$$

gdzie

$$I_0 = I_\xi + I_\eta.$$

8. Sztywność skręcania przekroju

Dla obliczenia sztywności skręcania dowolnego przekroju założono czyste skręcanie rozważanego pręta. W tym przypadku zagadnienie można sprowadzić [1] do wyznaczenia funkcji naprężeń Φ , dla której istnieje ekstremum funkcjonu

$$U[\Phi(x, y)] = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\bar{\theta}\Phi \right\} dx dy.$$

Symbolem $\bar{\theta}$ oznaczono w tym wzorze kąt skręcania pręta na jednostkę długości.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonau jest zerowanie się jego wariacji

$$(8.1) \quad \delta \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\bar{\theta}\Phi \right\} dx dy = 0.$$

Do określenia funkcji naprężeń zastosowano metodę Rietza. W tym celu przyjęto funkcję dopuszczalną w postaci

$$(8.2) \quad \Phi = D_s (x - x_1) (x - x_2),$$

która spełnia na brzegu przekroju warunek $\Phi = 0$. Po podstawieniu (8.2) do (8.1) otrzymano

$$(8.3) \quad D_s = -\bar{\theta}G \frac{\int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 dy}{\int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 [1 + (x_1')^2 + (x_2')^2 - x_1' x_2'] dy}.$$

Wielkość momentu skręcającego wynosi [1]

$$M_s = 2 \iint \Phi dx dy.$$

Wykorzystując zależności (8.2) i (8.3) ostatni wzór przedstawiamy w postaci

$$M_s = \frac{G}{3} \bar{\theta} \frac{\left[\int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 dy \right]^2}{\int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 [1 + (x_1')^2 + (x_2')^2 - x_1' x_2'] dy}.$$

Ponieważ

$$M_s = \bar{\theta}C,$$

to z porównania prawych stron ostatnich dwóch wzorów otrzymano wzór na sztywność skręcania

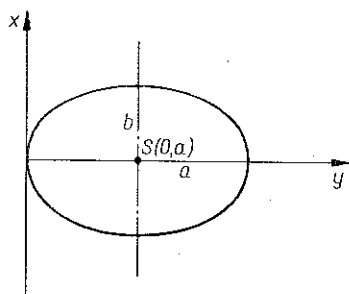
$$C = \frac{G}{3} \frac{\left[\int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 dy \right]^2}{\int_0^{y_k} (x_1 - x_2)^3 [1 + (x_1')^2 + (x_2')^2 - x_1' x_2'] dy}.$$

Po zastąpieniu całek oznaczonych sumami skończonymi ostatni wzór przedstawiamy w postaci

$$(8.4) \quad C = \frac{y_k^3 G}{24\epsilon^4} 10^{-3} \frac{[\sum (x_1 - x_2)^3]^2}{\sum (x_1 - x_2)^3 \left[\frac{y_k^2}{400} + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 - \Delta x_1 \Delta x_2 \right]}.$$

9. Dokładność metody

Przedstawiona metoda została zaprogramowana dla elektronicznej maszyny cyfrowej UMC-1. Obliczenie jednego profilu na tej maszynie trwa około 20 minut.



Rys. 3

W wyniku obliczeń otrzymuje się współrzędne środka ścinania i środka ciężkości, odległość między nimi, biegunowy moment bezwładności względem środka ścinania oraz sztywność skręcania.

Dokładność metody określono dla przekroju eliptycznego, który pokazano na rys. 3. W tabelicy 1 podano obliczone współrzędne środków ciężkości i środków ścinania dla koła i dwóch różnych elips. Dokładność obliczenia tych wielkości jest bardzo dobra. W tabelicy zestawiono

również sztywności skręcania: C_m obliczono przedstawioną metodą oraz C_a obliczono wzorem

$$C_a = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G.$$

Błąd względny między tymi wielkościami rośnie w miarę pogrubiania elipsy i dla koła osiąga wartość 3,1%. Błąd taki jest dopuszczalny w większości praktycznych obliczeń wytrzymałościowych.

Tabela 1

ε	W skali rysunku ε						Wielkości naturalne		$\frac{C_a - C_m}{C_a} 100\%$
	a	b	x_0	y_0	x_s	y_s	C_m	C_a	
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	kg cm ² /rd	kg cm ² /rd	%
2	4	4	0,00000	3,99954	0,00000	3,99952	24,351 G	25,132 G	3,1
2	4	2	0,00000	3,99966	0,00000	3,99964	4,964 G	5,024 G	1,2
2	4	1,5	0,00000	3,99966	0,00000	3,99964	2,306 G	2,324 G	0,8

10. Przykład zastosowania metody

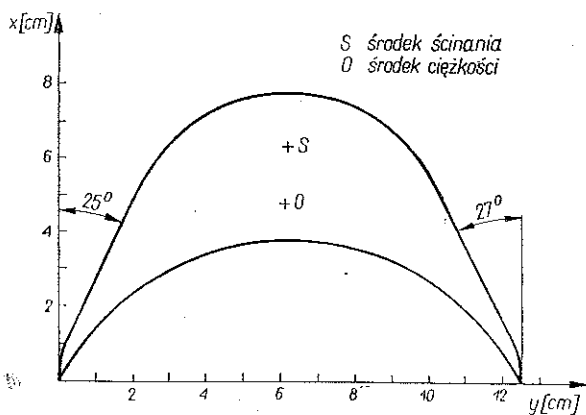
Na rysunku 4 pokazano asymetryczny profil łopatki turbinowej, dla którego wykonano obliczenia opisaną metodą. W tym celu profil wykreślono w skali $\varepsilon = 5$. Cięciwę profilu podzielono na 20 części. W wyniku obliczeń otrzymano w skali rysunku współrzędne środka ciężkości

$$x_0 = 4,76552 \text{ cm}, \quad y_0 = 6,16570 \text{ cm}.$$

i współrzędne środka ścinania:

$$x_s = 6,30141 \text{ cm}, \quad y_s = 6,27837 \text{ cm}.$$

Rzeczywista odległość między tymi punktami $h = 0,30801 \text{ cm}$.



Rys. 4

Rzeczywista sztywność skręcania profilu $C = 0,152 G \text{ kG cm}^2/\text{rd}$, a moment biegunowy względem środka ścinania $I_p = 0,75030 \text{ cm}^4$.

Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSCHENKO i J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
2. L. E. ELSGOLC, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.
3. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. III. Москва 1949.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ИЗГИБА ПРОИЗВОЛЬНОГО АСИММЕТРИЧЕСКОГО С ОДНОСВЯЗНОМ КРАЕМ СЕЧЕНИЯ

В работе дается метод вычисления координат центра изгиба сечения и его жесткости на кручение. Строится математическая модель опираясь на основные уравнения теории упругости, а ее решения сводятся к определению распределения касательных напряжений на поверхности сечения. С этой целью вводится функция напряжений, для которой получено уравнение Пуассона с краевыми условиями. Задача решается с помощью вариационного исчисления, стараясь определить экстремум, соответствующего функционала при использовании метода Ритца. Для сечения с краем, описанным неаналитически, дается решение в численном виде. Точность метода определяется для эллиптических и круговых сечений.

Summary

COMPUTATION OF THE COORDINATES OF THE FLEXURAL CENTRE OF ANY ASYMMETRIC SIMPLY CONNECTED PROFILE

The paper is concerned with a computation method of the flexural centre and the torsional rigidity. The mathematical model is based on the fundamental equations of the theory of elasticity and its solution is reduced to the determination of the distribution of the shear stress flexural over

the surface. To do this a stress function is introduced, for which Poisson's equation is obtained together with appropriate boundary conditions. The problem is solved by means of the variational calculus, by seeking for the extremum value of the relevant functional by means of the Ritz method. For profiles, the edge of which is described in a non-analytic manner solutions are given in a numerical form. The accuracy of the method is determined for elliptic and circular sections.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1966 r.
