

OSIADANIE PÓLPRZESTRZENI KONSOLIDUJĄCEJ
POD DZIAŁANIEM OBCIĄŻENIA SKUPIONEGO
W PRZYPADKU POWIERZCHNI NIEPRZEPUSZCZALNEJ DLA CIECZY

ZOFIA SOBCZYŃSKA (POZNAŃ)

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzoru na osiadanie powierzchni półprzestrzeni podlegającej zjawisku konsolidacji.

Zagadnienie potraktujemy jako przypadek płaskiego stanu odkształcenia. Przyjmujemy, że rozważana półprzestrzeń obciążona jest w chwili $t = 0$ nagle przyłożonym do jej powierzchni obciążeniem skupionym. Założymy, że powierzchnia półprzestrzeni jest całkowicie nieprzepuszczalna dla cieczy. Analogiczne zadanie dla przypadku powierzchni przepuszczalnej dla cieczy rozwiązano już w pracy [20].

Za punkt wyjściowy przyjmujemy podany przez BIOTA układ podstawowych równań liniowej teorii konsolidacji sformułowany w przemieszczeniach. Przy rozwiązywaniu tego układu równań wykorzystamy metodę podaną w pracy [5] W. DER-SKIEGO oraz w pracy [20]. Nie czynimy tutaj żadnych założeń upraszczających, które ograniczałyby wyniki rozwiązania do ściśle określonego rodzaju ośrodka. Jedynymi ograniczeniami są założenia liniowej teorii konsolidacji w przypadku ruchu quasi ustalonego (por. BIOT [1]).

Uproszczone rozwiązanie tego zagadnienia podali w pracy [14] MCNAMEE i GIBSON. Rozważyli oni półprzestrzeń równomiernie obciążoną na powierzchni pasma o szerokości $2a$. Przyjęli jednak, że rozpatrywany ośrodek jest nieściśliwy. Ogranicza to stosowalność wyników rozwiązania do glin nasyconych wodą.

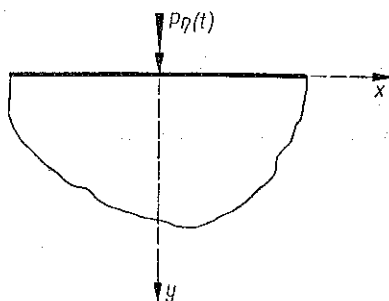
1. Równania teorii konsolidacji w przypadku płaskiego stanu odkształcenia i sformułowanie zagadnienia

Przyjmujemy, że odkształcenie zachodzi równoległe do płaszczyzny xy . Oś y skierowana jest normalnie do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń (rys. 1). Oś x leży w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń i skierowana jest prostopadle do linii działania obciążenia.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia równania równowagi wewnętrznej dla ośrodka dwufazowego sprowadzają się do dwóch równań

$$(1.1) \quad \frac{\partial(\sigma_{xx} + \sigma)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} + \sigma)}{\partial y} = 0.$$

W równaniach tych σ_{ij} oznaczają współrzędne tensora stanu naprężenia, $\sigma = -pf$ jest hydrostatycznym stanem naprężenia przenoszonym przez ciecz wypełniającą pory szkieletu, p parciem cieczy (dodatnim), f współczynnikiem porowatości szkieletu. Z uwagi na założoną jednorodność ośrodka (por. [1]) współczynnik ten uważamy za stały. W równaniach (1.1) pominiemy wpływ sił masowych, ponieważ rozważamy powolne zmiany stanu półprzestrzeni.



Rys. 1

Drugą grupę równań tworzą związki geometryczne:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \theta &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \end{aligned}$$

gdzie u i v są współrzędnymi wektora przemieszczenia szkieletu, U oraz V współrzędnymi wektora przemieszczeń filtracyjnych cieczy, odniesionymi odpowiednio do osi x i y , (ε_{ij}) jest tensorem stanu odkształcenia szkieletu porowatego, a θ oznacza dylatację cieczy.

Związki fizyczne przyjmujemy w postaci (por. BIOT [2])

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2N\varepsilon_{xx} + (A\varepsilon + Q\theta), & \sigma_{zz} &= A\varepsilon + Q\theta, & \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0, \\ \sigma_{yy} &= 2N\varepsilon_{yy} + (A\varepsilon + Q\theta), & \sigma_{xy} &= 2N\varepsilon_{xy}, & \sigma &= Q\varepsilon + R\theta, \end{aligned}$$

przy czym A, N, Q i R są stałymi rozważanego ośrodka [4], $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ jest dylatacją szkieletu. Należy w tym miejscu podkreślić, że ε jest tylko dylatacją pozorną szkieletu. Opisuje ona przypadek, gdy szkielet wypełnia bez reszty badany obszar. Dylatacja rzeczywista szkieletu $\bar{\varepsilon}$ w sensie zmiany objętości materiału szkieletu związana jest z dylatacją pozorną prostym wzorem [5]

$$\bar{\varepsilon} = (1 - f)\varepsilon.$$

Rozróżnienie między dylatacją pozorną a dylatacją rzeczywistą jest istotne przy wyznaczaniu i interpretacji stałych ośrodka.

Związki (1.1), (1.2) i (1.3) uzupełniają prawo przepływu cieczy przez ośrodki porowate odkształcalne (prawo Darcy'ego), które po pominięciu sił masowych piszemy w postaci równania [2]

$$(1.4) \quad k\nabla^2\sigma = \dot{\theta} - \dot{\varepsilon}, \quad (\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t},$$

w którym k oznacza współczynnik przepuszczalności (permeability) ośrodka.

Związki fizyczne (1.3) możemy po wyrugowaniu z nich dylatacji cieczy θ zapisać w postaci

$$(1.5) \quad \sigma_{xx} = 2N\varepsilon_{xx} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma \right), \quad \sigma_{zz} = M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma,$$

$$\sigma_{yy} = 2N\varepsilon_{yy} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R} \sigma \right), \quad \sigma_{xy} = 2N\varepsilon_{xy}, \quad M = \frac{AR - Q^2}{R},$$

przy czym M jest odpowiednikiem stałej Lamégo λ dla ośrodków porowatych nasyconych cieczą [4].

Sformułujemy zagadnienie w przemieszczeniach. W tym celu związki fizyczne w postaci (1.5) podstawiamy w równania równowagi wewnętrznej (1.1) i po wykorzystaniu zależności geometrycznych (1.2) oraz uporządkowaniu otrzymujemy układ równań zbiorczych liniowej teorii konsolidacji, wyrażony w przemieszczeniach szkieletu i jako funkcja parcia cieczy σ :

$$(1.6) \quad \begin{aligned} NV^2u + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & k\nabla^2\sigma &= \frac{1}{R} \dot{\sigma} - \frac{H}{R} \dot{\varepsilon}, \\ NV^2v + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, & H &= Q+R. \end{aligned}$$

Ostatnie równanie odpowiada równaniu przepływu (1.4), w którym za pomocą ostatniego ze związków fizycznych (1.3) wyeliminowano dylatację cieczy θ .

Poszukiwane rozwiązanie układu równań (1.6) musi spełniać następujące warunki początkowe:

$$(1.7) \quad u(x, y; 0) = v(x, y; 0) = \sigma(x, y; 0) = 0$$

oraz brzegowe

$$(1.8) \quad \begin{aligned} [(\sigma_{yy} + \sigma)]_{y=0} &= -P\delta(x)\eta(t), \\ [\sigma_{xy}]_{y=0} &= 0, \quad \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, \end{aligned}$$

gdzie $\delta(x)$ jest funkcją Diraca, a $\eta(t)$ funkcją Heavyside'a. Ostatni z warunków brzegowych odpowiada założeniu, że powierzchnia rozpatrywanej półprzestrzeni jest nieprzepuszczalna dla cieczy.

Pomijamy ciężar własny ośrodka, a więc trzeba przyjąć dodatkowo, że wszystkie rozważane funkcje naprężeń i przemieszczeń dla $y \rightarrow \infty$ mają wartości ograniczone.

Układ równań (1.6) jest układem sprzężonym za pośrednictwem funkcji σ i ε . Metodę rozprężenia tego układu podaje W. DERSKI w pracy [5]. Pierwsze z równań (1.6) różniczkujemy względem x , drugie względem y , dodajemy i po uporządkowaniu znajdujemy

$$(1.9) \quad \nabla^2 \varepsilon = - \frac{H}{R(M+2N)} \nabla^2 \sigma.$$

Nad ostatnim z równań (1.6) wykonujemy obustronnie operację laplasjanu, związek (1.9) różniczkujemy względem czasu i za jego pomocą rugujemy ε z równania przepływu (1.6) otrzymując ostatecznie

$$(1.10) \quad \nabla^2 \nabla^2 \sigma = K \nabla^2 \dot{\sigma}, \quad K = \frac{R(M+2N)+H^2}{k(M+2N)R^2} = \frac{A+R+2(Q+N)}{k(AR-Q^2+2NR)}.$$

Równanie (1.10) i dwa pierwsze równania (1.6) tworzą rozprzężony układ równań liniowej teorii konsolidacji:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} NV^2 u + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ NV^2 v + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \sigma &= KV^2 \dot{\sigma} \end{aligned}$$

z warunkami początkowymi (1.7) i brzegowymi (1.8). Przejdziemy do omówienia rozwiązania tego układu.

2. Metoda rozwiązania. Funkcja potencjału przemieszczenia dyfuzyjnego

Warunki początkowe omawianego rozwiązania pozwalają na zastosowanie transformacji Laplace'a określonej związkami

$$(2.1) \quad (u_L, v_L, \sigma_L) = \int_0^{\infty} (u, v, \sigma) e^{-st} dt,$$

przy czym $s = \gamma + i\omega$.

Transformata wyjściowa układu równań (1.6) ma teraz postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} NV^2 u_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma_L}{\partial x}, \\ NV^2 v_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= - \frac{H}{R} \frac{\partial \sigma_L}{\partial y}, \\ kV^2 \sigma_L &= \frac{s}{R} \sigma_L - \frac{H}{R} s \varepsilon_L. \end{aligned}$$

Transformata równania (1.10) przedstawia się następująco:

$$(2.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 \sigma_L = Ks \sigma_L.$$

Przetransformowane warunki brzegowe po uwzględnieniu przedstawienia całkowego funkcji Diraca ([19], s. 45) mają postać

$$(2.4) \quad [(\sigma_{yy_L} + \sigma_L)]_{y=0} = - \frac{P}{\pi s} \int_0^{\infty} \cos ax da, \quad [\sigma_{xy_L}]_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \sigma_L}{\partial y} \right]_{y=0} = 0.$$

Równanie (2.3) ma rozwiązanie [5]

$$(2.5) \quad \sigma_L = \varphi_{2L} - \frac{1}{Ks} \varphi_{1L},$$

przy czym funkcja φ_{1L} jest funkcją harmoniczną spełniającą równanie $\nabla^2 \varphi_{1L} = 0$, a funkcja φ_{2L} jest rozwiązaniem równania Helmholtza

$$(2.6) \quad \nabla^2 \varphi_{2L} - sK\varphi_{2L} = 0.$$

Rozwiązania szczególnego równań przemieszczeniowych (2.2) poszukiwać będziemy za pomocą funkcji potencjału przemieszczenia dyfuzyjnego, którą definiujemy wzorami:

$$(2.7) \quad \bar{u}_L = \frac{d\varphi_L}{dx}, \quad \bar{v}_L = \frac{d\varphi_L}{dy}.$$

Funkcja Φ_L jest transformatą Laplace'a funkcji potencjału przemieszczenia dyfuzyjnego. Związki (2.7) wstawiamy w równania przemieszczeniowe (2.2). Porządkujemy je i całkujemy: pierwsze względem x drugie względem y . W wyniku otrzymujemy równanie Poissona

$$(2.8) \quad \nabla^2 \Phi_L = -K_1 \sigma_L, \quad K_1 = \frac{H}{R(M+2N)} = \frac{Q+R}{AR - Q^2 + 2NR}.$$

Uwzględniając σ_L określone wzorem (2.5) znajdujemy, że [5]

$$(2.9) \quad \Phi_L = \frac{K_1}{K_S} (\varphi_{3L} - \varphi_{2L}),$$

przy czym φ_{3L} jest funkcją biharmoniczną i taką, że

$$(2.10) \quad \nabla^2 \varphi_{3L} = \varphi_{1L}.$$

Za pomocą rozwiązania (2.9) nie możemy w ogólności spełnić wszystkich warunków brzegowych. Ponadto rozwiązanie (2.9) spełnia rozprzężony układ równań, ale nie spełnia układu równań (2.2). Łatwo się o tym można przekonać podstawiając rozwiązanie (2.9) do równania przepływu (2.2). W celu spełnienia tego równania oraz dla spełnienia warunków brzegowych dodamy do rozwiązania szczególnego, rozwiązanie jednorodnego układu równań

$$(2.11) \quad N\nabla^2 u_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial x} = 0, \quad N\nabla^2 v_L + (M+N) \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial y} = 0.$$

Rozwiązanie układu (2.11) przyjmujemy w postaci funkcji Galerkina [5] zakładając $\chi_{1L} = \chi_{3L} = 0$ oraz $\chi_{2L} = \chi_L$. W tym przypadku składowe stanu przemieszczenia wyrażają się wzorami

$$(2.12) \quad \bar{u}_L = \bar{b} \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial x \partial y}, \quad \bar{v}_L = \nabla^2 \chi_L + \bar{b} \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2}, \quad \bar{b} = -\frac{M+N}{M+2N}.$$

Funkcja χ_L , jak wiadomo, jest funkcją biharmoniczną $\nabla^2 \nabla^2 \chi_L = 0$.

Szukane rozwiązanie układu równań (2.2) ma zatem postać sumy:

$$u_L = \bar{u}_L + \bar{\bar{u}}_L \quad \text{i} \quad v_L = \bar{v}_L + \bar{\bar{v}}_L.$$

Jeżeli tę sumę podstawimy w równania (2.2), to okaże się, że ostatnie z tych równań, równanie przepływu, wiąże funkcję χ_L z funkcją φ_{1L} za pomocą warunku

$$(2.13) \quad k\varphi_{1L} = -sNK_1 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \chi_L).$$

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia występujących w naszym rozwiązaniu funkcji.

3. Wybór funkcji występujących w rozwiązaniu

Rozpocznijmy od wyznaczenia funkcji σ_L . Funkcja σ_L musi być parzysta względem x i ograniczona, gdy $y \rightarrow \infty$. Wobec tego funkcję harmoniczną φ_{1L} jak i funkcję φ_{2L} przyjmujemy w postaci następujących całek Fouriera

$$(3.1) \quad \varphi_{1L} = \int_0^{\infty} A(a, s) \exp(-ay) \cos ax da,$$

oraz

$$(3.2) \quad \varphi_{2L} = \int_0^{\infty} B(a, s) \exp(-y\sqrt{a^2+Ks}) \cos ax da,$$

gdzie $A(a, s)$ i $B(a, s)$ są chwilowo nieznanymi funkcjami parametrów.

Zgodnie ze wzorem (2.5) funkcja σ_L ma postać

$$(3.3) \quad \sigma_L = \int_0^{\infty} [B(a, s) \exp(-y\sqrt{a^2+Ks}) - \frac{1}{Ks} A(a, s) \exp(-ay)] \cos ax da.$$

Funkcja σ_L musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe (2.4). Wykorzystamy ostatni z tych warunków otrzymując związek

$$(3.4) \quad B(a, s) = A(a, s) \frac{a}{Ks\sqrt{a^2+Ks}}.$$

Za pomocą związku (3.4) możemy ze wzoru (3.3) wyeliminować $B(a, s)$. Otrzymujemy

$$(3.5) \quad \sigma_L = \frac{1}{Ks} \int_0^{\infty} A(a, s) \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+Ks}} \exp(-y\sqrt{a^2+Ks}) - \exp(-ay) \right] \cos ax da.$$

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia funkcji potencjału Φ_L . Jak wynika ze wzoru (2.9) składają się na nią dwie funkcje: φ_{2L} oraz φ_{3L} . Funkcję φ_{2L} określa wzór (3.2), natomiast φ_{3L} przyjmujemy w postaci

$$(3.6) \quad \varphi_{3L} = \int_0^{\infty} C(a, s) ay \exp(-ay) \cos ax da,$$

gdzie $C(a, s)$ jest chwilowo nieznaną funkcją parametrów. Stałą tę określa zależność (2.10). Wynika z niej, że

$$-2C(a, s) a^2 = A(a, s).$$

Powyższy związek pozwala napisać funkcję φ_{3L} w postaci następującej:

$$(3.7) \quad \varphi_{3L} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{y}{a} A(a, s) \exp(-ay) \cos ax da.$$

Ostatecznie na podstawie wzoru (2.9) i po uwzględnieniu związku (3.4) piszemy

$$(3.8) \quad \Phi_L = -\frac{K_1}{Ks} \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{y}{2a} \exp(-ay) \cos ax da - \\ - \frac{K_1}{K^2 s^2} \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + Ks}} \exp(-y\sqrt{a^2 + Ks}) \cos ax da.$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć funkcję χ_L . Przyjmiemy ją w postaci

$$\chi_L = \int_0^{\infty} [D(a, s) + ayE(a, s)] \exp(-ay) \cos ax da,$$

gdzie $D(a, s)$ i $E(a, s)$ są znów nieznanymi chwilowo funkcjami parametrów. Funkcja χ_L musi spełniać warunek (2.13), z którego otrzymujemy zależność

$$kA(a, s) = -2sNK_1 E(a, s) a^3.$$

Stałą $E(a, s)$ wyrażamy za pomocą $A(a, s)$ i piszemy

$$(3.9) \quad \chi_L = \int_0^{\infty} \left[D(a, s) - \frac{ky}{2sNK_1 a^2} A(a, s) \right] \exp(-ay) \cos ax da.$$

4. Wyznaczenie transformaty rozwiązania

Funkcje Φ_L oraz χ_L określają składowe stanu naprężenia i za ich pośrednictwem muszą spełniać przetransformowane warunki brzegowe (2.4):

$$(4.1) \quad [\sigma_{yy_L} + \sigma_{Lz}]_{y=0} = -\frac{P}{\pi s} \int_0^{\infty} \cos ax da, \quad [\sigma_{xy_L}]_{y=0} = 0.$$

Rozwiązanie szczególne po wykorzystaniu wzorów (1.5), (2.7) i równania (2.8) ma następującą postać:

$$\bar{\sigma}_{xx_L} = 2N \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x^2} + \frac{MR - 2NQ}{H} \nabla^2 \Phi_L,$$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy_L} &= 2N \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial y^2} + \frac{MR - 2NQ}{H} \nabla^2 \Phi_L, \\ \bar{\sigma}_{xy_L} &= 2N \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu jednorodnego znajdziemy po wykorzystaniu związków (1.5) i (2.12). Mają one postać:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx_L} &= \frac{N}{M+2N} \frac{\partial}{\partial y} \left[MV^2 \chi_L - 2(M+N) \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2} \right], \\ \bar{\sigma}_{yy_L} &= \frac{N}{M+2N} \frac{\partial}{\partial y} \left[(3M+4N) \nabla^2 \chi_L - 2(M+N) \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2} \right], \\ \bar{\sigma}_{xy_L} &= \frac{N}{M+2N} \frac{\partial}{\partial x} \left[(M+2N) \nabla^2 \chi_L - 2(M+N) \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ostateczne ma postać sumy

$$\sigma_{xx_L} = \bar{\sigma}_{xx_L} + \bar{\bar{\sigma}}_{xx_L}, \quad \sigma_{yy_L} = \bar{\sigma}_{yy_L} + \bar{\bar{\sigma}}_{yy_L}, \quad \sigma_{xy_L} = \bar{\sigma}_{xy_L} + \bar{\bar{\sigma}}_{xy_L}.$$

Po podstawieniu do wzorów (4.2) i (4.3) odpowiednio zróżniczkowanych funkcji Φ_L i χ_L określonych za pomocą wzorów (3.8) i (3.9) oraz po przyjęciu $y=0$ otrzymujemy

$$(4.4) \quad \begin{aligned} [\sigma_{yy_L}]_{y=0} &= \int_0^\infty A(\alpha, s) \left[\frac{K_2}{Ks} \left(1 - \frac{\alpha \sqrt{\alpha^2 + Ks}}{Ks} \right) + \frac{MR - 2NQ}{H} \frac{K_1}{Ks} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + Ks}} \right) - \frac{NkR}{Hs} \right] \cos \alpha x \, d\alpha - 2N\bar{b} \int_0^\infty D(\alpha, s) \alpha^3 \cos \alpha x \, d\alpha, \\ [\sigma_{xy_L}]_{y=0} &= \int_0^\infty A(\alpha, s) \left[\frac{K_2}{2Ks} - \frac{K_2}{K^2 s^2} \alpha^2 + \frac{MkR}{Hs} \right] \sin \alpha x \, d\alpha - \\ &\quad - 2N\bar{b} \int_0^\infty D(\alpha, s) \alpha^3 \sin \alpha x \, d\alpha, \end{aligned}$$

gdzie $K_2 = 2NK_1$.

Wyrażenia (4.4) oraz (3.5) podstawiamy do warunków brzegowych (4.1) i po prostych przekształceniach otrzymujemy następujące warunki pozwalające na wyznaczenie funkcji $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} A(\alpha, s) \left[K_2 K H s - K_2 H \alpha \sqrt{\alpha^2 + Ks} + (MR - 2NQ) K_1 K s \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + Ks}} \right) - \right. \\ \left. - NkR K^2 s - K H s \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + Ks}} \right) \right] - 2N\bar{b} K^2 s^2 H D(\alpha, s) \alpha^3 = - \frac{P}{\pi} K^2 s H, \end{aligned}$$

$$A(\alpha, s) \left(\frac{1}{2} K_2 K s H - K_2 H \alpha^2 + M k R K^2 s \right) - 2 N \bar{b} K^2 s^2 H \alpha^3 D(\alpha, s) = 0.$$

Równania (4.5) odejmujemy od siebie stronami i znajdujemy:

$$(4.6) \quad A(\alpha, s) = \frac{as(a^2 + Ks)}{b\alpha^3 \sqrt{a^2 + Ks + b\alpha^2(a^2 + Ks) + cs(a^2 + Ks)}},$$

gdzie $a = \frac{2PK^2H}{\pi}$, $b = 2K_2H$, $c = 2kRK^2(M + N) - K_2HK$.

Wykorzystując drugie z równań (4.5) wyznaczamy funkcję $D(\alpha, s)$:

$$(4.7) \quad D(\alpha, s) = A(\alpha, s) \frac{ds - b\alpha^2}{4\alpha^3 N \bar{b} K^2 s^2 H},$$

gdzie $d = K_2HK + 2MkRK^2$.

5. Wyznaczenie przemieszczenia powierzchni

W dalszych rozważaniach interesować nas będzie wyłącznie przemieszczenie v_L obciążonej powierzchni w kierunku osi y .

Na podstawie wzorów (2.7) i (2.12) możemy napisać

$$(5.1) \quad [v_L]_{y=0} = \left[\frac{\partial \Phi_L}{\partial y} \right]_{y=0} + \left[\left(\sqrt{2} \chi_L + \bar{b} \frac{\partial^2 \chi_L}{\partial y^2} \right) \right]_{y=0}.$$

Po podstawieniu do wzoru (5.1) odpowiednio zróżniczkowanych funkcji Φ_L i χ_L określonych wzorami (3.8) i (3.9) oraz po przyjęciu $y = 0$ otrzymujemy

$$(5.2) \quad [v_L]_{y=0} = \frac{K_1}{K^2} \int_0^\infty A(\alpha, s) \frac{\alpha}{s^2} \cos \alpha x d\alpha + \left(\frac{\bar{b}k}{NK_1} + \frac{k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right) \times \\ \times \int_0^\infty A(\alpha, s) \frac{1}{\alpha s} \cos \alpha x d\alpha + \bar{b} \int_0^\infty D(\alpha, s) \alpha^2 \cos \alpha x d\alpha.$$

Funkcje $A(\alpha, s)$ i $D(\alpha, s)$ występujące we wzorze (5.2) określone są za pomocą wzorów (4.6) i (4.7).

Wprowadzimy następujące oznaczenia całek wchodzących w skład wzoru na transformatę przemieszczenia:

$$I_A = \int_0^\infty A(\alpha, s) \frac{\alpha}{s^2} \cos \alpha x d\alpha, \quad I_B = \int_0^\infty A(\alpha, s) \frac{1}{\alpha s} \cos \alpha x d\alpha, \\ I_C = \int_0^\infty D(\alpha, s) \alpha^2 \cos \alpha x d\alpha.$$

Na tej podstawie mamy

$$(5.3) \quad [v_L]_{y=0} = \frac{K_1}{K_2} I_A + \left(\frac{\bar{b}k}{NK_1} + \frac{k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right) I_B + \bar{b} I_C.$$

Przed przystąpieniem do wykonania całkowania względem a oraz odwrócenia transformacji Laplace'a rozłożymy funkcje $A(a, s)$ i $D(a, s)$ na składniki proste, tak aby umożliwić sobie korzystanie z gotowych, tabelaryzowanych rozwiązań całek. Jak wynika z budowy funkcji $D(a, s)$ określonej wzorem (4.7), wystarczy przekształcić jedynie funkcję $A(a, s)$. W tym celu w wyrażeniu (4.6) znosimy niewymierność mnożąc licznik i mianownik tego wyrażenia przez

$$-ba^3\sqrt{a^2+Ks} + ba^2(a^2+Ks) + cs(a^2+Ks).$$

Ostatecznie po prostych przekształceniach możemy funkcję $A(a, s)$ napisać w postaci

$$(5.4) \quad A(a, s) = \frac{a^2 \bar{A}}{s+a^2\kappa} - \frac{a^2 \bar{A}}{s+a^2\beta} + \frac{\bar{B}a^2 s}{(s+a^2\beta)(s+a^2\kappa)} + \frac{\bar{C}s}{s+a^2\beta} + \\ + \frac{\bar{C}'s}{s+a^2\kappa} - \frac{\bar{A}a\sqrt{a^2+Ks}}{s+a^2\kappa} + \frac{\bar{A}a\sqrt{a^2+Ks}}{s+a^2\beta},$$

gdzie

$$(5.5) \quad \bar{A} = \frac{ab}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}, \quad \bar{B} = \frac{aba_4}{a_3}, \quad \bar{C} = \frac{aba_5}{2a_3} \left(1 + \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}} \right), \\ \bar{C}' = \frac{aba_5}{2a_3} \left(1 - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}} \right), \quad a_1 = b(bk + 2c), \quad a_2 = c(c + 2bk), \\ a_3 = c^2 K, \quad a_4 = \frac{bK+c}{b}, \quad a_5 = \frac{cK}{b}, \quad \kappa = \frac{1}{2a_3} (a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}), \\ \beta = \frac{1}{2a_3} (a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}).$$

Funkcję (4.7) przedstawimy teraz jak następuje:

$$(5.6) \quad D(a, s) = \frac{1}{4N\bar{h}K^2H} \left[\frac{d\bar{A} - b\bar{C}'}{as(s+a^2\kappa)} - \frac{d\bar{A} + b\bar{C}}{as(s+a^2\beta)} - \frac{b\bar{A}a}{s^2(s+a^2\beta)} + \right. \\ + \frac{b\bar{A}\sqrt{a^2+Ks}}{s^2(s+a^2\kappa)} + \frac{b\bar{A}a}{s^2(s+a^2\beta)} - \frac{b\bar{A}\sqrt{a^2+Ks}}{s^2(s+a^2\beta)} + \frac{d\bar{C}}{a^3(s+a^2\beta)} + \frac{d\bar{C}'}{a^3(s+a^2\kappa)} + \\ \left. + \frac{\bar{B}d}{a(s+a^2\kappa)(s+a^2\beta)} - \frac{b\bar{B}a}{s(s+a^2\kappa)(s+a^2\beta)} - \frac{d\bar{A}\sqrt{a^2+Ks}}{a^2s(s+a^2\kappa)} + \frac{d\bar{A}\sqrt{a^2+Ks}}{a^2s(s+a^2\beta)} \right].$$

W celu wyznaczenia osiadania powierzchni półprzestrzeni trzeba przekształcone

wyżej funkcje $A(a, s)$ i $D(a, s)$ podstawić do wzoru (5.2) i wykonać odwrotną transformację Laplace'a określoną wzorem ([7], s. 27)

$$(5.7) \quad v(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^{\infty} v_L(a, s) e^{st} \cos ax \, da \, ds.$$

Musimy przedtem stwierdzić, czy funkcja (5.2) posiada wartości skończone dla każdego $x > 0$. Dla przykładu rozpatrzmy całkę

$$I_A = \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{a}{s^2} \cos ax \, da.$$

Po podstawieniu do niej funkcji (5.4) otrzymamy

$$(5.8) \quad I_A = \int_0^{\infty} \left[\frac{\bar{A}a^3}{s^2(s+\alpha^2\kappa)} - \frac{\bar{A}a^3}{s^2(s+\alpha^2\beta)} + \frac{\bar{B}a^3}{s(s+\alpha^2\beta)(s+\alpha^2\kappa)} + \frac{\bar{C}a}{s(s+\alpha^2\beta)} + \frac{\bar{C}'a}{s(s+\alpha^2\kappa)} - \frac{\bar{A}a^2\sqrt{a^2+Ks}}{s^2(s+\alpha^2\kappa)} + \frac{\bar{A}a^2\sqrt{a^2+Ks}}{s^2(s+\alpha^2\kappa)} \right] \cos ax \, da.$$

Zajmiemy się bliżej całką z pierwszego składnika sumy w nawiasie kwadratowym. Mamy

$$(5.9) \quad I_{A1} = \int_0^{\infty} \frac{\bar{A}a^3}{s^2(s+\alpha^2\kappa)} \cos ax \, da.$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej Laplace'a za pomocą tablic ([8], s. 229, pozycja 1) otrzymujemy

$$(5.10) \quad I_{A1} = \int_0^{\infty} \frac{\bar{A}t}{\kappa} a \cos ax \, da + \int_0^{\infty} \frac{\bar{A}}{\kappa^2} \frac{1}{a} e^{-\alpha^2\kappa t} \cos ax \, da - \int_0^{\infty} \frac{\bar{A}}{\kappa^2} \frac{\cos ax}{a} \, da.$$

Jak łatwo stwierdzić pierwszy i trzeci składnik całki I_{A1} po scałkowaniu równa się nieskończoności.

Z podanego przykładu wynika, że osiadanie określone transformatą (5.2) dla skończonych wartości zmiennej x byłoby nieskończenie duże. Wobec tego w dalszym ciągu naszych rozważań będziemy podobnie jak w pracy [20] badać przemieszczenia względne $v'(x, t)$, odniesione do prostej łączącej dwa punkty brzegowe o współrzędnych $x = \pm 1$ (przy czym 1 może być dowolnie duże). Założymy, podobnie jak w teorii sprężystości, że w punktach $x = \pm 1$ istnieje fikcyjne utwierdzenie i w związku z tym przemieszczenia pionowe tych punktów będą równe zero. Takie założenie odpowiada dodaniu do funkcji $v(x, t)$ pewnej stałej $\Psi(1)$ tak dobranej, aby dla skończonych wartości x , z wyjątkiem być może bardzo małego otoczenia punktu $x = 0$, osiadanie było wielkością skończoną. Takie utwierdzenie nie wpływa na zmianę wartości naprężeń, ponieważ $\Psi(1)$ nie zależy od zmiennych x i y . Z fizycznego punktu widzenia tego rodzaju operacja może być interpretowana jako prze-

suniecie całego ośrodka traktowanego jako ciało sztywne o pewną stałą wielkość ([11], s. 88).

Przystąpimy teraz do wyznaczenia stałej $\Psi(1)$ z warunku, że dla $x = \pm 1$ $v(x, t) = 0$. Stąd $v(1, s) = 0$. Wygodniej jest wyznaczyć wielkość $\Psi(1)$ dla transformaty Laplace'a. Na podstawie tego warunku piszemy

$$(5.11) \quad \frac{K_1}{K^2} \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{\alpha}{s^2} \cos al da + \left(\frac{\bar{b}k}{NK_1} + \frac{k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right) \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{1}{as} \cos al da + \\ + \bar{b} \int_0^{\infty} D(a, s) a^2 \cos al da + \Psi(1) = 0.$$

Widzimy więc, że poszukiwana stała zależy również od parametru transformacji Laplace'a, a więc $\Psi(1) = \Psi(1, s)$. Wyznaczoną w ten sposób funkcję $\Psi(1, s)$ dodajemy do prawej strony wzoru (5.2) i w rezultacie otrzymujemy transformatę przemieszczenia względnego w postaci

$$(5.12) \quad v'_L = \frac{K_1}{K^2} \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{\alpha}{s^2} (\cos ax - \cos al) da + \left(\frac{\bar{b}k}{NK_1} + \frac{k}{NK_1} - \frac{K_1}{2K} \right) \times \\ \times \int_0^{\infty} A(a, s) \frac{1}{as} (\cos ax - \cos al) da + \bar{b} \int_0^{\infty} D(a, s) a^2 (\cos ax - \cos al) da.$$

Nie będziemy tutaj przytaczać obliczeń poszczególnych całek wchodzących do wzoru (5.12). Całkowanie ich nie jest skomplikowane i zostało wykonane przy pomocy tablic [8, 6 i 16]. Tutaj zajmiemy się jedynie przykładowo jedną całką, która z uwagi na konieczność różniczkowania względem parametru wymaga dowodu jednostajnej zbieżności. Rozpatrzmy mianowicie drugi składnik całki I_{A1} określonej wzorem (5.10). Wykonujemy nad tą całką całkowanie przez części i znajdujemy

$$\frac{\bar{A}}{\varkappa^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha^2 \varkappa t} (\cos ax - \cos al) da = \frac{\bar{A}}{\varkappa^2} \left[\int_0^{\infty} 2\varkappa t e^{-\alpha^2 \varkappa t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2 \varkappa t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da \right].$$

Obliczenie pierwszej całki nie następuje żadnych trudności. Na podstawie tablic (por. [8], s. 73, poz. 18) mamy

$$\frac{2\bar{A}t}{\varkappa} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \varkappa t} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin al}{l} \right) da = - \frac{\bar{A}i\sqrt{\pi t}}{\sqrt{\varkappa^3}} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\varkappa t}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\varkappa t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\varkappa t}} \right).$$

Natomiast drugą całkę musimy zróżniczkować względem czasu, aby w ten sposób doprowadzić ją do postaci, dla której już znamy rozwiązanie. Musimy wobec tego stwierdzić, czy wolno nam w tym przypadku stosować różniczkowanie względem czasu. Przytoczymy tu odpowiednie twierdzenie ([15] s. 311):

Zbieżną całkę właściwą lub niewłaściwą zależną od parametru można zróżniczkować pod znakiem całki względem tegoż parametru, jeżeli całka otrzymana po zróżniczkowaniu będzie jednostajnie zbieżna w otoczeniu rozpatrywanej wartości parametru.

Po zróżniczkowaniu interesującej nas całki względem czasu t otrzymujemy

$$(5.12') \quad -\frac{\bar{A}}{\kappa} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \kappa t} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l} \right) d\alpha.$$

Celem zbadania, czy ta całka jest jednostajnie zbieżna zastosujemy kryterium Abela-Dirichleta:

Jeżeli całka

$$\int_0^{\infty} f(\alpha) d\alpha$$

jest zbieżna, a funkcja $g(\alpha, t)$ jest monotoniczna względem α i ograniczona, to całka

$$\int_0^{\infty} f(\alpha) g(\alpha, t) d\alpha$$

jest jednostajnie zbieżna względem parametru t ([10], s. 589).

Przyjmujemy $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l}$, $g(\alpha, t) = e^{-\alpha^2 \kappa t}$ i stwierdzamy, że

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l} \right) d\alpha.$$

jest zbieżna. Funkcja wykładnicza $e^{-\alpha^2 \kappa t}$ jest jednostajnie malejąca względem α , a więc jest funkcją monotoniczną. Wykazaliśmy w ten sposób, że całka (5.12') jest jednostajnie zbieżna względem parametru t . Możemy ją teraz łatwo obliczyć w oparciu o poz. 18 na s. 73, tablica [8].

Mamy mianowicie

$$-\frac{\bar{A}}{\kappa} \int_0^t \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \kappa \tau} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{\sin \alpha l}{l} \right) d\alpha = \frac{\bar{A} i \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\kappa^3}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\kappa\tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\kappa\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\kappa\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\kappa\tau}} \right) d\tau.$$

Na podstawie podanego wyżej rozumowania możemy obliczyć wszystkie całki wymagające różniczkowania względem parametru t . Całki takie występują we wszystkich składnikach wzoru (5.12).

Powróćmy do wyznaczenia rozważanej funkcji osiadania.

Po wykonaniu całkowania i redukcji wyrażen podobnych oraz po uwzględnieniu oznaczeń (4.6), (4.7) i (5.5) otrzymujemy

$$(5.13) \quad v = \frac{P}{4\pi N b} \left\{ 2 \ln \left| \frac{x}{l} \right| - Ei \left(-\frac{x^2 K}{4t} \right) + Ei \left(-\frac{l^2 K}{4t} \right) - \right. \\ - A \left[\sqrt{t} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\kappa t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - \frac{1}{2} (I'_{ax} - I'_{al}) \right] - \\ - B \left[\sqrt{t} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\beta t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\beta t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\beta t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\beta t}} \right) - \frac{1}{2} (I_{ax} - I_{al}) \right] - \\ \left. - \frac{cK}{\sqrt{c^2 - 4bcK}} [(1 - \kappa K) \beta (I'_{bx} - I'_{bl}) - (1 - \beta K) \kappa (I_{bx} - I_{bl})] \right\},$$

gdzie

$$A = \frac{2i \sqrt{\pi} \sqrt{\kappa}}{c \sqrt{c^2 - 4bcK}} (a_3 \beta + a_1 a_5 \kappa - a_1 a_4),$$

$$B = \frac{2i \sqrt{\pi} \sqrt{\beta}}{c \sqrt{c^2 - 4bcK}} (a_1 a_4 - a_3 \kappa - a_1 a_5 \beta),$$

$$(5.14) \quad I_{ax} - I_{al} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\beta\tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\beta\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\beta\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\beta\tau}} \right) d\tau,$$

$$I'_{ax} - I'_{al} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\kappa\tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\kappa\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\kappa\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\kappa\tau}} \right) d\tau,$$

$$I_{bx} - I_{bl} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1 - \beta K) + \beta K t}} \left(e^{-\frac{x^2 K}{4[\tau(1 - \beta K) + \beta K t]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1 - \beta K) + \beta K t]}} \right) d\tau,$$

$$I'_{bx} - I'_{bl} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1 - \kappa K) + \kappa K t}} \left(e^{-\frac{x^2 K}{4[\tau(1 - \kappa K) + \kappa K t]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1 - \kappa K) + \kappa K t]}} \right) d\tau.$$

W wyrażeniach (5.13) i (5.14) $\operatorname{erf} i\zeta$ jest funkcją błędu Krampa-Laplace'a argumentu urojonego:

$$\operatorname{erf} i\zeta = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\xi^2} d\xi.$$

We wzorze (5.13) występuje jeszcze funkcja

$$Ei(-\zeta) = - \int_\zeta^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi,$$

nazywana funkcją wykładniczo-całkową ([13], s. 39).

Wykażemy, że występujące we wzorze (5.13) całki $I_{ax} - I_{al}$, $I'_{ax} - I'_{al}$ i $I_{bx} - I_{bl}$, $I'_{bx} - I'_{bl}$ są zbieżne dla $t \geq 0$.

Zbadamy całkę $I_{ax} - I_{al}$. Różni się ona od całki $I'_{ax} - I'_{al}$ wyłącznie o występujący w argumentie funkcji podcałkowej stały współczynnik.

Dla ułatwienia dowodu wykonamy podstawienie $1/\sqrt{\tau} = \lambda$, które prowadzi do wyniku

$$I_{ax} - I_{al} = - \int_{\infty}^{1/\sqrt{t}} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2 \lambda^2}{4\beta}} \operatorname{erf} \frac{ix\lambda}{2\sqrt{\beta}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2 \lambda^2}{4\beta}} \operatorname{erf} \frac{i l \lambda}{2\sqrt{\beta}} \right) d\lambda.$$

Do badania zbieżności tej całki zastosujemy kryterium Cauchy'ego ([18] s. 253).
Jeżeli w rozpatrywanej calce niewłaściwej

$$\int_a^{\infty} f(\lambda) d\lambda$$

funkcja podcałkowa $f(\lambda)$ jest ciągła przy $\lambda \geq a$ oraz

$$|f(\lambda)| < \frac{L}{\lambda^p}, \quad p > 1,$$

to całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna. L i p są liczbami stałymi dodatnimi. W zastosowaniach praktycznych często zmieniamy postać tego kryterium.

Jeżeli istnieje taka wartość $p > 1$, dla której iloczyn $f(\lambda) \lambda^p$ pozostaje ograniczony, gdy $\lambda \rightarrow \infty$, to badana całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna ([18], s. 253).

Ten warunek na pewno jest spełniony, jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) \lambda^p.$$

W naszym przypadku, jeżeli przyjmiemy $p = 2$, to po pominięciu stałego mnożnika otrzymujemy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2 \lambda^2}{4\beta}} \operatorname{erf} \frac{ix\lambda}{2\sqrt{\beta}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2 \lambda^2}{4\beta}} \operatorname{erf} \frac{i l \lambda}{2\sqrt{\beta}} \right) \right| = 0,$$

a więc całka jest bezwzględnie zbieżna.

Podobnie możemy wykazać zbieżność drugiej całki, $I_{bx} - I_{bl}$. Wykonujemy podstawienie $1/\sqrt{\tau} = \lambda$ i otrzymujemy

$$I_{bx} - I_{bl} = - \int_{\infty}^{1/\sqrt{t}} \frac{2}{\lambda^2 \sqrt{\frac{1-\beta K}{\lambda^2} + \beta K t}} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\left(\frac{1-\beta K}{\lambda^2} + \beta K t\right)}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\left(\frac{1-\beta K}{\lambda^2} + \beta K t\right)}} \right] d\lambda.$$

Przyjmujemy $p = 2$ i badamy, czy granica wyrażenia podcałkowego ma wartość skończoną. Oczywiście

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\lambda^2 \sqrt{\frac{1-\beta K}{\lambda^2} + \beta K t}} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4\left(\frac{1-\beta K}{\lambda^2} + \beta K t\right)}} - e^{-\frac{l^2 K}{4\left(\frac{1-\beta K}{\lambda^2} + \beta K t\right)}} \right] = \\ = \frac{2}{\sqrt{\beta K t}} \left(e^{-\frac{x^2}{4\beta t}} - e^{-\frac{l^2}{4\beta t}} \right),$$

dla wszystkich wartości t . Ta całka jest więc również bezwzględnie zbieżna.

Zajmiemy się teraz rozważeniem występujących we wzorze (5.13) całek, dla różnych wartości zmiennej x . Rozpatrzmy całkę $I_{ax} - I_{al}$. Granica wyrażenia podcałkowego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\beta\tau}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\beta\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\beta\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\beta\tau}} \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{i}{2\sqrt{\beta\tau}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\beta\tau}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\beta\tau}} \right) < \infty.$$

Podobnie zbadamy zachowanie się całki $I_{bx} - I_{bl}$. Granica wyrażenia podcałkowego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1-\beta K) + \beta K t}} \left[e^{-\frac{x^2 K}{4[\tau(1-\beta K) + \beta K t]}} - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1-\beta K) + \beta K t]}} \right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau(1-\beta K) + \beta K t}} \left[1 - e^{-\frac{l^2 K}{4[\tau(1-\beta K) + \beta K t]}} \right] < \infty.$$

Dalsza analiza wzoru (5.13) pozwala stwierdzić, że dla $x = 0$ występuje w nim osobliwość typu logarytmicznego i funkcji wykładniczo-całkowej. Dla wartości x różnych od zera wszystkie całki mają wartości skończone.

Sprawdźmy, czy w chwili $t = 0$ osiadanie wyrażone wzorem (5.13) jest równe zeru zgodnie z warunkami początkowymi określonymi wzorem (1.7).

Wyżej wykazaliśmy, że całki $I_{ax} - I_{al}$, $I'_{ax} - I'_{al}$, $I_{bx} - I_{bl}$ i $I'_{bx} - I'_{bl}$ dla $t = 0$ dążą do zera. Do zera dąży również wyrażenie

$$\sqrt{t} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\beta t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\beta t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\beta t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\beta t}} \right).$$

Wobec tego, aby $v(x, 0)$ było równe zero, granica różnicy funkcji wykładniczo-całkowych występujących we wzorze (5.13) musi dążyć do $-2\ln|x/l|$. Udowodnimy, że tak jest istotnie. Wykorzystamy definicję funkcji wykładniczo-całkowej i napiszemy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[-Ei\left(-\frac{x^2 K}{4t}\right) + Ei\left(\frac{-l^2 K}{4t}\right) \right] = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{x^2 K/4t}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi - \int_{l^2 K/4t}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{x^2 K/4t}^{l^2 K/4t} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi.$$

Jeżeli w tym wyrażeniu przedstawimy funkcję podcałkową w postaci szeregu i wyodrębimy osobliwość, to otrzymamy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_{x^2K/4t}^{l^2K/4t} \frac{1}{\xi} d\xi + \int_{x^2K/4t}^{l^2K/4t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(\xi)^{n-1}}{n!} d\xi \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[-2 \ln \left| \frac{x}{l} \right| + \int_{x^2K/4t}^{l^2K/4t} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(\xi)^{n-1}}{n!} d\xi \right].$$

Szereg pod znakiem całki jest bezwzględnie zbieżny i jego granica równa jest zeru przy n dążącym do nieskończoności ([18], s. 52 i 272, t. I), a więc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[-Ei \left(-\frac{x^2K}{4t} \right) + Ei \left(-\frac{l^2K}{4t} \right) \right] = -2 \ln \left| \frac{x}{l} \right|.$$

Stąd przy $t = 0$ osiadanie wyrażone wzorem (5.13) jest istotnie równe zeru.

Zbadamy teraz przebieg osiadania wyrażonego wzorem (5.13) dla $t \rightarrow \infty$. W tym celu znów przeanalizujemy kolejno wyrażenia wchodzące w skład tego wzoru.

Granice funkcji wykładniczo-całkowych zbadamy wykorzystując podane przez Ryzika i Gradszteina ([16], s. 338) przedstawienie całkowe tych funkcji. Napiшем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[Ei \left(-\frac{x^2K}{4t} \right) - Ei \left(-\frac{l^2K}{4t} \right) \right] = \\ = - \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-\frac{x^2K}{4t}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \cos \xi + \frac{x^2K}{4t} \sin \xi}{\xi^2 + \left(\frac{x^2K}{4t} \right)^2} d\xi + e^{-\frac{l^2K}{4t}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \cos \xi + \frac{l^2K}{4t} \sin \xi}{\xi^2 + \left(\frac{l^2K}{4t} \right)^2} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Wyrażenie to przedstawimy w postaci jednej całki i funkcję podcałkową sprowadzimy do wspólnego mianownika. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{\xi^3 \cos \xi \left(e^{-\frac{l^2K}{4t}} - e^{-\frac{x^2K}{4t}} \right) + \xi \cos \xi \left(\frac{x^2K}{4t} e^{-\frac{l^2K}{4t}} - \frac{l^2K}{4t} e^{-\frac{x^2K}{4t}} \right)}{\left[\xi^2 + \left(\frac{x^2K}{4t} \right)^2 \right] \left[\xi^2 + \left(\frac{l^2K}{4t} \right)^2 \right]} + \right. \\ \left. + \frac{\xi^2 \sin \xi \left(\frac{l^2K}{4t} e^{-\frac{l^2K}{4t}} - \frac{x^2K}{4t} e^{-\frac{x^2K}{4t}} \right) + \sin \xi \left(\frac{x^4 l^2 K^2}{64 t^3} e^{-\frac{l^2K}{4t}} - \frac{x^2 l^4 K^2}{64 t^3} e^{-\frac{x^2K}{4t}} \right)}{\left[\xi^2 + \left(\frac{x^2K}{4t} \right)^2 \right] \left[\xi^2 + \left(\frac{l^2K}{4t} \right)^2 \right]} \right] d\xi = 0. \end{aligned}$$

Podobnie do zera dążą wyrażenia podcałkowe całek $I_{ax} - I_{al}$, $I'_{ax} - I'_{al}$, $I_{bx} - I_{bl}$ i $I'_{bx} - I'_{bl}$.

Granica wyrażenia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4\beta t}} \operatorname{erf} \frac{ix}{2\sqrt{\beta t}} - \frac{1}{l} e^{-\frac{l^2}{4\beta t}} \operatorname{erf} \frac{il}{2\sqrt{\beta t}} \right] = 0,$$

co możemy łatwo stwierdzić stosując regułę de L'Hospitala.

Tak więc dla $t \rightarrow \infty$ osiadanie określa wzór

$$(5.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{P}{2N\bar{b}\pi} \ln \left| \frac{x}{l} \right|.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $k = \infty$ i uwzględnimy, że M równe jest stałej Lamégo λ a $N = G$, to otrzymamy wzór na osiadanie powierzchni półprzestrzeni sprężystej znany w teorii sprężystości pod nazwą rozwiązania Flamanta (por. [11] s. 88)

$$(5.16) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} v = -\frac{P}{G\pi} (1 - \nu) \ln \left| \frac{x}{l} \right|.$$

6. Przykład liczbowy

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania zilustrujemy teraz przykładem liczbowym. Zbadamy mianowicie przebieg osiadania powierzchni półprzestrzeni pod wpływem obciążenia siłą skupioną. Wykorzystujemy w tym celu wyprowadzony w p. 5 wzór (5.13). Wykresy wykonamy dla czasu $t \rightarrow \infty$, $t = 1$ sek., $t = 1$ godz.

Zanim jednak do tego przejdziemy, musimy jeszcze omówić występujące we wzorze (5.13) stałe N , M , R , Q , A i k . W p. 1 ograniczyliśmy się do stwierdzenia, że M jest odpowiednikiem stałej Lamégo λ dla gruntów porowatych nasyconych cieczą, a k współczynnikiem przepuszczalności. Z pozostałych stałych, które określiliśmy jako stałe ośrodka, N równa się modułowi odkształcenia postaciowego. Stałe R , Q i A nie mają natomiast takich odpowiedników z zakresu mechaniki gruntów czy teorii sprężystości. Zajmiemy się ustaleniem ich wartości. Oprzemy się w tym celu na danych zawartych w pracy [4] BIOTA i WILLISA oraz na pracy FATTA [9].

Jak wynika z przytoczonych przez Biota i Willisa rozważań, interesujące nas stałe można wyznaczyć ze związków fizycznych, w których odkształcenia wyrażono przez cztery wielkości pomiarowe: porowatość f , współczynnik ściśliwości próbki κ , współczynnik rozszerzalności objętościowej δ , współczynnik zawartości wody w porach γ . W wyniku otrzymano następujące związki [4]:

$$Q = \frac{f \left(1 - f - \frac{\delta}{\kappa} \right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}}, \quad R = \frac{f^2}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}},$$

$$A = \frac{\frac{\gamma}{\kappa} + f^2 + (1 - 2f) \left(1 - \frac{\delta}{\kappa} \right)}{\gamma + \delta - \frac{\delta^2}{\kappa}} - \frac{2}{3} N, \quad N = G.$$

Wartości współczynników κ , δ i γ podaje FATT w pracy [9]. Zostały one ustalone dla piaskowca o porowatości $f = 0,26$. Współczynniki Fatta zostały również omówione w pracy [20]. W pracy [20] wyznaczono także wielkości liczbowe stałych Q , R i N . Wynoszą one: $Q = 8479 \text{ kG/cm}^2$, $R = 3394 \text{ kG/cm}^2$ i $N = 162\,000 \text{ kG/cm}^2$. Wartość współczynnika przepływu przyjęto na podstawie pracy [17]: $k' = 50 \text{ m/dobę}$. Te same wartości stałych przyjmujemy również w niniejszym przykładzie. Po podstawieniu ich do wzoru (5.13) otrzymujemy

$$(6.1) \quad v = -P \cdot 0,41 \cdot 10^{-6} \left\{ 2 \ln |e| - Ei \left(-1,408 \frac{\rho^2}{t} \right) + Ei \left(-1,408 \frac{1}{t} \right) - \right. \\ - 27,186 \sqrt{t} \left[\frac{1}{\rho l} \exp \left(-14,87 \cdot 10^3 \frac{\rho^2}{t} \right) \int_0^{121,94 \frac{\rho^2}{\sqrt{t}}} e^{u^2} du - \frac{1}{l} \exp \left(-14,87 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times 10^3 \frac{1}{t} \right) \int_0^{121,94 \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{u^2} du \right] + 13,593 (I'_{ax} - I'_{al}) + 47,694 \sqrt{t} \left[\frac{1}{\rho l} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-4,852 \cdot 10^3 \frac{\rho^2}{t} \right) \int_0^{69,65 \frac{\rho^2}{\sqrt{t}}} e^{u^2} du - \frac{1}{l} \exp \left(-4,852 \cdot 10^3 \frac{1}{t} \right) \int_0^{69,65 \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{u^2} du \right] - \\ \left. - 23,847 (I_{ax} - I_{al}) - 0,00042 (I'_{bx} - I'_{bl}) + (I_{bx} - I_{bl}) \cdot 0,0011 \right\},$$

gdzie

$$I_{ax} - I_{al} = \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{\rho l} \exp \left(-4852 \frac{\rho^2}{\tau} \right) \int_0^{69,65 \frac{\rho^2}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{l} \exp \left(-4852 \frac{1}{\tau} \right) \int_0^{69,65 \frac{1}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du \right) \right] d\tau,$$

$$I'_{ax} - I'_{al} = \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{1}{\rho l} \exp \left(-14,87 \cdot 10^3 \frac{\rho^2}{\tau} \right) \int_0^{21,94 \frac{\rho^2}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{l} \exp \left(-14,87 \cdot 10^3 \frac{1}{\tau} \right) \int_0^{21,94 \frac{1}{\sqrt{\tau}}} e^{u^2} du \right) \right] d\tau,$$

$$I'_{bx} - I'_{bl} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau + 0,339}} \left[\exp \left(-\frac{1,408 \rho^2}{\tau + 0,339} \right) - \exp \left(-\frac{1,408}{\tau + 0,339} \right) \right] d\tau,$$

$$I_{bx} - I_{bl} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau + 1,008}} \left[\exp \left(-\frac{1,408 \rho^2}{\tau + 1,008} \right) - \exp \left(-\frac{1,408}{\tau + 1,008} \right) \right] d\tau.$$

We wzorze (6.1) $e = x/l$, $l = 10,0 \text{ m}$.

Występujące we wzorze (6.1) funkcje wyznaczamy za pomocą tablic [12, 21 i 22]. Przyjmujemy przy tym $\varrho = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9, 1,0$. Całki obliczamy numerycznie metodą trapezów, przyjmując dla $t = 1$ sek. przedział $\Delta t = 0,1$ sek, a dla $t = 1$ godz. przedział $\Delta t = 360$ sek.

Na rysunkach 2, 3 i 4 pokazano wykonane na podstawie powyższych obliczeń wykresy względnego osiadania powierzchni. Dla porównania na każdym rysunku podano analogiczny wykres dla przypadku powierzchni przepuszczalnej dla cieczy. Jak wynika z analizy tych wykresów, krzywe osiadania w przypadku powierzchni przepuszczalnej i nieprzepuszczalnej dla cieczy, różnią się od siebie w sposób zasadniczy.

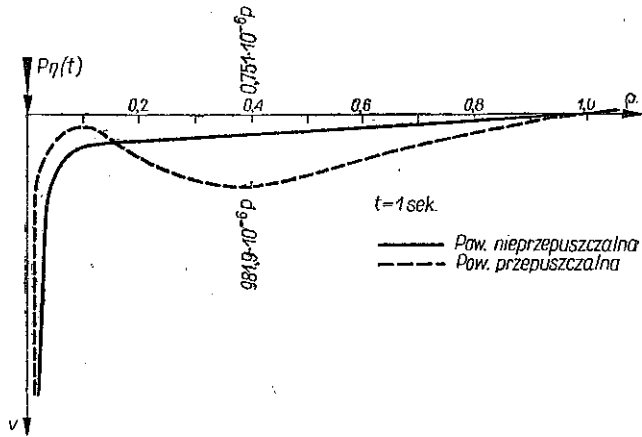
Uwagi końcowe

Na zakończenie niniejszej pracy zresumujemy krótko przebieg rozwiązania oraz wnioski jakie z niego wypływają.

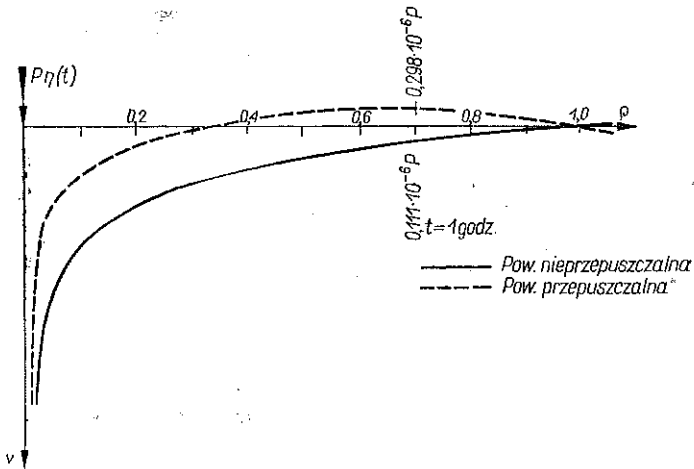
Rozwiązanie przeprowadzono dla przypadku obciążenia półprzestrzeni siłą skupioną przy założeniu, że powierzchnia tej półprzestrzeni jest nieprzepuszczalna dla cieczy. Analogiczne zadanie, lecz przy założeniu, że powierzchnia półprzestrzeni jest przepuszczalna dla cieczy wszędzie z wyjątkiem punktu przyłożenia siły, było przedmiotem pracy [20]. Takie rozwiązania, o ile wiadomo, nie zostały do chwili obecnej nigdzie podane. Oparto je na sformułowanej przez BIOTA teorii przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne nie wprowadzając żadnych założeń upraszczających. Otrzymane rozwiązanie dla siły $P = 1$ jest funkcją Greena dla względnego osiadania powierzchni półprzestrzeni. W wyniku otrzymano wzór na osiadanie powierzchni półprzestrzeni (wzór 5.13) o postaci zbliżonej do wzoru uzyskanego w pracy [20]. Na podstawie tego wzoru można wnioskować o zachowaniu się obciążonej powierzchni w czasie. W p. 6 podano przykład liczbowy oraz wykresy obrazujące względne osiadanie powierzchni w chwili czasu $t = 1$ sek., $t = 1$ godz. i $t = \infty$. Obliczenia przeprowadzono przyjmując jako podłoże piaskowiec. Wykresy dla poszczególnych czasów porównano z analogicznymi wykresami otrzymanymi w pracy [20] dla przypadku powierzchni przepuszczalnej. Na podstawie analizy wzoru (5.13) i analizy wykresów można stwierdzić, że wyrażone nimi osiadanie posiada w otoczeniu $x = 0$ osobliwość typu logarytmicznego oraz typu funkcji wykładniczo-całkowej. Przy rozpatrywaniu osiadania jako funkcji czasu osobliwości nie występują. Wykazano, że w chwili $t = 0$ osiadanie zgodnie z przyjętymi warunkami początkowymi jest równe zero. Dla $t = \infty$ osiadanie wyraża wzór (5.15). Ma ono wielkość skończoną. Ten fakt sugeruje, że podane przez McNAMEE i GIBSONA rozwiązanie dla ośrodków nieściśliwych [14] jest błędne. Podają oni wyniki, w których występują całki rozbieżne przy $t \rightarrow \infty$.

Otrzymane rozwiązanie jako funkcja Greena może służyć do budowy rozwiązań dla dowolnie rozłożonego obciążenia brzegu. Omówiono to dokładniej w pracy [20].

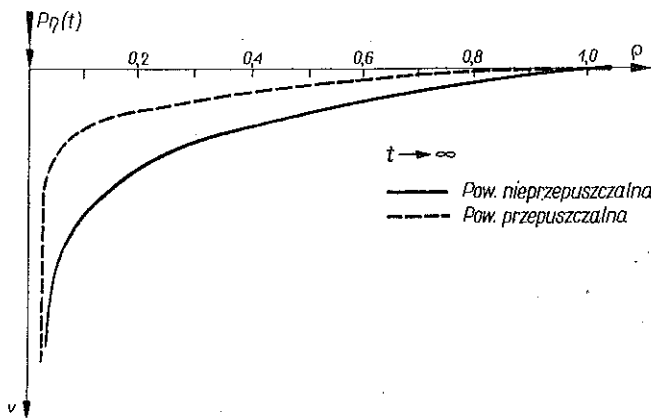
Na zakończenie należy podkreślić, że otrzymane rozwiązanie może służyć do jakościowej oceny zjawisk występujących w praktyce inżynierskiej. Nie może być brane za podstawę rozważań o charakterze ilościowym, gdyż określa wyłącznie względne osiadanie powierzchni.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. BIOT, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., **12** (1941), 115-164.
2. M. A. BIOT, *Theory of stress strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. Appl. Phys., **25** (1954), 1385-1391.
3. M. A. BIOT, *General solutions of the equations of elasticity and consolidation of a porous material*, J. Appl. Phys., (1956), 91-96.
4. M. A. BIOT, D. G. WILLIS, *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, J. Appl. Mech., **24** (1957), 594-601.
5. W. DERSKI, *O zagadnieniach teorii konsolidacji*, Arch. Hydr., **1**, **13** (1966).
6. В. А. ДИТКИН, Ч. П. КУЗНЕЦОВ, *Справочник по операционному исчислению*, Гос. Из. Тех.-Теор. Лит., Москва 1951.
7. G. DOETSCH, *Praktyka przekształcenia Laplace'a*, PWN, Warszawa 1964.
8. A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETINGER, F. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*. V. I., McGraw-Hill, New York 1945.
9. I. FATT, *The Biot-Willis elastic coefficients for a sandstones*, J. Appl. Mech., **26**, ser. E, (1959), 296-297.
10. G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 1962.
11. K. GIRMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, wyd. IV, PWN, Warszawa 1956.
12. К. А. КАРПОВ, *Таблицы функций $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области*, Из. АН СССР, Москва 1958.
13. W. N. LEWIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.
14. J. MCNAMEE, R. E. GIBSON, *Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum*, J. Mech. Appl. Math., **13** (1960), 210-227.
15. В. М. НЕМЫЦКИЙ, А. СПОДСКАЯ, ЧЕРКАСОВ, *Курс математического анализа*, т. 2, Гос. Из. Тех.-Теор. Лит., Москва 1957.
16. I. M. RYŻIK, I. S. GRADSTEIN, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, Warszawa 1964.
17. A. SALUSTOWICZ, J. GALANKA, *Mechanika górotworu*, AGH (1960).
18. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, PWN, Warszawa, t. 1, (1958), t. 2, (1960).
19. И. СНЕДДОН, *Преобразования Фурье*, И. Л., Москва 1954.
20. Z. SOBCZYŃSKA, *Osiadanie róprzestrzeni konsolidującej pod działaniem obciążenia skupionego*, Rozpr. Inżyn., **3**, **14** (1966).
21. *Таблицы интегральной показательной функций*, Из. АН. (1954).
22. M. WARMUS, *Tablice funkcji elementarnych*, PWN, Warszawa 1960.

Резюме

**ОСЕДАНИЕ КОНСОЛИДИРУЮЩЕГОСЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА
ПОД ВЛИЯНИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ
ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕПРОНИЦАЕМОЙ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В работе рассматривается случай консолидирующегося полупространства, нагруженного сосредоточенной силой, приложенной к поверхности. Предполагается, что эта поверхность совершенно непроницаема для жидкости. В качестве основы рассуждений принята теория течения жидкости, через пористые, деформируемые среды, сформулированная Биотом. В результате решения системы уравнений линейной теории консолидации, получена формула, дающая возможность определять относительное оседание поверхности полупространства во времени. Решение, как функция Грина, может быть использовано для построения решений для произвольной нагрузки на краю.

В заключение, даются диаграммы отображающие относительное оседание поверхности для основания из песчаника в момент $t = 1$ сек, $t = 1$ час и $t = \infty$. Эта последняя диаграмма совпадает с результатами, известного в теории упругости, решения Фламана для упругой среды.

Доказывает, также, что в момент $t = 0$ оседание не происходит. Это опровергает факт, приведенный Биотом и другими авторами, существования так наз. „мгновенных оседаний”.

S u m m a r y

SUBSIDENCE OF A CONSOLIDATING SEMI-INFINITE BODY UNDER CONCENTRATED LOAD ASSUMING THE SURFACE TO BE IMPERMEABLE TO LIQUIDS

The problem considered in the present paper is that of a consolidating semi-infinite body loaded by a concentrated force acting on the surface. It is assumed that this surface is absolutely impermeable to liquids. The considerations are based on the theory of flow of liquids through porous deformable bodies formulated by Biot. As a result of solution of the equations of the linear consolidation theory an equation is obtained enabling us to determine the relative subsidence of the surface in the course of time. The solution obtained can be used as Green's function for the obtainment of the solution for any load acting on the boundary.

Finally, diagram of relative subsidence of the surface are presented for sandstone at the time $t = 1$ sec, $t = 1$ h. and $t = \infty$. The latter diagram coincides with the result known from theory of elasticity under the name of Flamant's solution for a elastic medium.

It is also shown that there is no subsidence at $t = 0$. This would contradict the suggestion made by Biot and other authors, that there exists immediate subsidence.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1966 r.
