

**BADANIE WPŁYWU WSPÓŁCZYNNIKA PRZENIKANIA CIEPŁA NA KOŃCOWY STAN
NAPRĘŻENIA W SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ KULI
PODDANEJ PROCESOWI CHŁODZENIA**

BOGDAN RANIECKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Niech wolna od naprężeń kula zostanie w dostatecznie powolny sposób ogrzana od temperatury $T = 0$ do stałej temperatury $T = T_0$. Pod dostatecznie powolnym ogrzewaniem rozumiemy taki proces, który nie doprowadzi do pojawienia się trwałych końcowych naprężeń. Warunki, jakie muszą być w takim procesie spełnione, sprecyzujemy w p. 2. Niech następnie kula zostanie zanurzona w zimnym płynie i szybko ochłodzona do początkowej temperatury $T = 0$. Szybkemu procesowi chłodzenia towarzyszą zmienne chwilowe stany naprężeń. Przy spełnieniu pewnych warunków po zakończeniu tego procesu pojawiają się w materiale kuli trwałe naprężenia. Ich wielkość zależy ogólnie od różnicy temperatur $T = T_0$ oraz od szeregu cieplnych i mechanicznych parametrów charakteryzujących własności płynu i materiału kuli. Niniejszy artykuł, w którym zbadamy przede wszystkim wpływ liczby Biota na wielkość końcowych naprężeń, stanowi przykład praktycznego wykorzystania wzorów otrzymanych w jednym z punktów pracy [2]. W związku z tym wszystkie wnioski słuszne są przy założeniu niezależności własności materiału kuli i liczby Biota od temperatury, pominięciu wpływu przyspieszeń oraz efektów termodynamicznego sprężenia zjawisk mechanicznych z cieplnymi.

Ocena wielkości naprężeń powstających w opisanym powyżej procesie chłodzenia nie jest nowa. H. PARKUS w pracy [1], zakładając dodatkowo nieściśliwość materiału oraz przyjmując model ciała idealnie-plastycznego, zbadał w charakterze przykładu wielkość końcowych naprężeń w kuli, której zewnętrzna powierzchnia zostaje nagle ochłodzona w chwili $t = 0$ od temperatury T_0 do $T = 0$.

Należy jednak zwrócić uwagę na szczególny aspekt wyżej dokonanej idealizacji. Mianowicie, o ile może ona prowadzić do stosunkowo dobrych dla praktyki rezultatów z punktu badania pola temperatur, to z drugiej strony może być przyczyną poważnych błędów popełnionych przy wyznaczaniu końcowych naprężeń. Wynika to stąd, że opór cieplny cienkiej warstwy płynu otaczającego zewnętrzną powierzchnię kuli wpływa istotnie na różnicę między średnią temperaturą kuli oraz temperaturą jej zewnętrznej powierzchni w początkowym okresie chłodzenia. Różnica ta we wspomnianym okresie ma natomiast decydujący wpływ na wielkość końcowych

naprężeń [2]. Tak więc do istotnego dla szeregu materiałów błędu wynikającego z założenia nieściślności i braku wzmocnienia dochodzi jeszcze inny wynikający z pominięcia oporu cieplnego przypowierzchniowej warstwy płynu.

Ocena wpływu czynników, pominięcie których prowadzi do powyższych błędów, oraz wyznaczenie wielkości końcowych naprężeń stanowi treść niniejszej pracy.

Wszystkie wypowiedziane w pracy uwagi oraz wyniki niektórych obliczeń mogą być zastosowane również w odwrotnym procesie: szybkie ogrzewanie — wolne chłodzenie (końcowe naprężenia będą posiadały przeciwne znaki).

2. Podstawowe równania

Niech w chwili, którą uważamy za początkową dla procesu chłodzenia, temperatura kuli będzie stała

$$(2.1) \quad [T]_{t=0} = T_0.$$

Weźmy pod uwagę równanie przewodnictwa

$$(2.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Szukać będziemy rozwiązania tego równania spełniającego następujący mieszany warunek brzegowy:

$$(2.3) \quad \frac{\partial T}{\partial r} + Th = 0 \quad \text{dla } r = R,$$

gdzie k oznacza współczynnik dyfuzyjności ciepła, α_p współczynnik przenikania ciepła w płynie, λ współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału kuli, R promień zewnętrznej powierzchni kuli oraz $h = \alpha_p/\lambda$.

Rozwiązanie równania przewodnictwa z warunkami (2.1)–(2.3) w zmiennych bezwymiarowych przyjmuje postać [5]

$$(2.4) \quad \bar{T}(\varrho, \tau) = \frac{2Bi}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n^2 \tau} \frac{b_n^2 + (Bi - 1)^2 \sin b_n}{b_n^2 [b_n^2 + Bi(Bi - 1)]} \sin \varrho b_n,$$

gdzie

$$\bar{T} = \frac{T}{T_0}, \quad \varrho = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{kt}{R^2}, \quad Bi = \frac{Ra_p}{\lambda}.$$

Symbole b_n oznaczają kolejne pierwiastki równania

$$b \operatorname{ctg} b + Bi - 1 = 0.$$

Wielkości τ i Bi są odpowiednio liczbami Fouriera i Biota.

Decydującym czynnikiem wpływającym na kształt końcowych naprężeń jest różnica [2]

$$(2.5) \quad V(\varrho, \tau) = \frac{3}{\varrho^3} \int_0^{\varrho} \bar{T}(\eta, \tau) \eta^2 d\eta - \bar{T}(\varrho, \tau),$$

która przy naszych założeniach przyjmuje postać

$$(2.6) \quad V(\varrho, \tau) = \frac{6Bi}{\varrho^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n^2 \tau} \frac{[b_n^2 + (Bi - 1)^2] \left[\sin(\varrho b_n) \left(1 - \frac{\varrho^2 b_n^2}{3} \right) - \varrho b_n \cos \varrho b_n \right] \sin b_n}{b_n^4 [b_n^2 + Bi(Bi - 1)]}$$

Oznaczmy

$$\max |2V(1, \tau)| = x'_s.$$

Maksymalna wartość funkcji $V(1, \tau)$ będzie oczywiście zależała od liczby Biota $x'_s = x'_s(Bi)$.

Zgodnie z wynikiem uzyskanym w pracy [2] na to, aby po zakończeniu procesu chłodzenia pozostały trwale naprężenia, musi być spełniony następujący warunek:

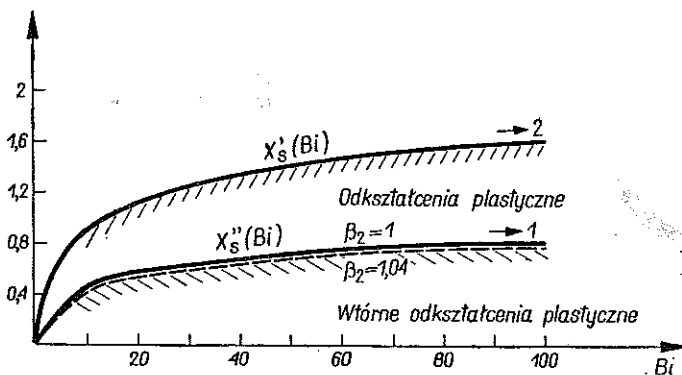
$$(2.7) \quad x_s \leq x'_s(Bi),$$

gdzie

$$x_s = \frac{E_w \varepsilon_s}{KaT_0} = \frac{2(1 - \nu) \sigma_s}{EaT_0}, \quad E_w = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

oraz gdzie $(\sigma_s, \varepsilon_s)$ oznacza granicę sprężystości, K moduł ściśliwości objętościowej, E moduł Younga, ν współczynnik Poissona oraz α współczynnik rozszerzalności liniowej kuli.

Wykres $x'_s(Bi)$ przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1

Graniczna wartość

$$\lim_{Bi \rightarrow \infty} x'_s(Bi) = 2$$

odpowiada wyidealizowanemu warunkowi brzegowemu pierwszego rodzaju dla równania przewodnictwa

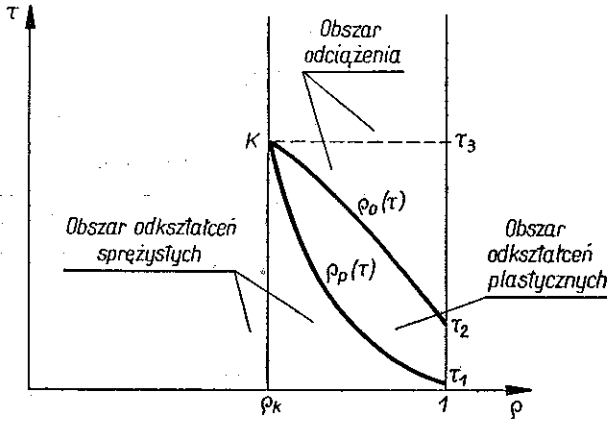
$$[T]_{\varrho=1} = 0, \quad \tau > 0$$

Zatem dla najczęściej spotykanych w praktyce liczb Biota (1–100) wartość krytyczna parametru x_s jest mniejsza od 2 o istotną wartość.

Na podstawie rys. 1 możemy teraz dokładnie sprecyzować warunki, jakie musiały być spełnione w powolnym procesie ogrzewania kuli. Ponieważ żądaliśmy, aby po zakończeniu tego procesu (po wyrównaniu się temperatury) nie pojawiły się końcowe naprężenia, to jak wynika z powyższych uwag, w procesie tym musi być spełniony warunek

$$x_s \geq x'_s(Bi).$$

Powracając do procesu chłodzenia przy spełnieniu warunku (2.7) w materiale powstaną chwilowe obszary różnego rodzaju odkształceń, których opis przedstawiony jest na rys. 2.



Rys. 2

Granice obszaru odkształceń plastycznych $\varrho_p(\tau)$ oraz obszaru odciążenia $\varrho_0(\tau)$ określone są przez równania [2]

$$(2.8) \quad V[\varrho_p(\tau), \tau] = \frac{x_s}{2}, \quad \left[\frac{\partial V}{\partial \tau} \right]_{\varrho = \varrho_0(\tau)} = 0.$$

Podstawiając do układu równań (2.8)

$$\varrho_0(\tau_3) = \varrho_p(\tau_3) = \varrho_k$$

i następnie po wyeliminowaniu τ_3 (przy założeniu nieznikania odpowiedniego wyznacznika funkcyjnego) możemy obliczyć szerokość warstwy kulistej $1 - \varrho_k$ odkształconej plastycznie w procesie chłodzenia.

Łatwo zauważyć, że szerokość tej warstwy będzie zależała jedynie od dwu bezwymiarowych parametrów

$$1 - \varrho_k = \varphi(Bi, x_s)$$

charakteryzujących ciepłe i mechaniczne własności ośrodka i materiału kuli oraz różnicę temperatur T_0 .

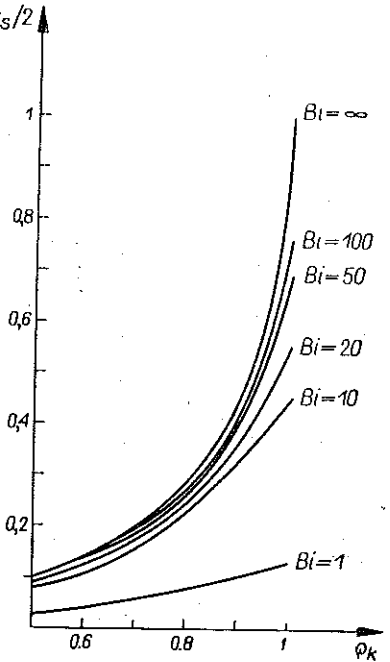
Wykres funkcji $q_k(x_s)$ dla różnych liczb Biota przedstawiono na rys. 3.

3. Chwilowy stan intensywności naprężenia

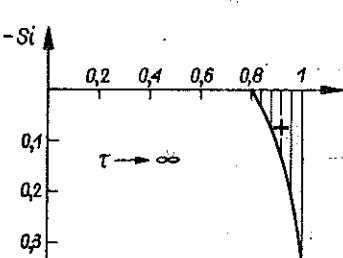
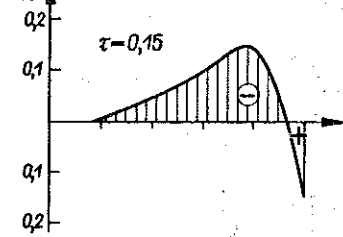
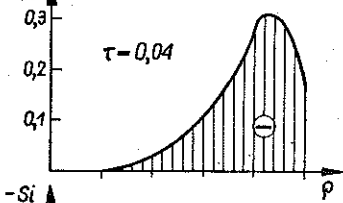
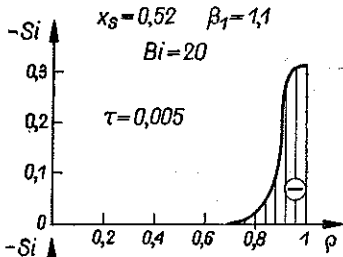
Różnica między promieniowymi i obwodowymi naprężeniami określona jest w poszczególnych obszarach następującymi wzorami [2]: w obszarze odkształceń sprężystych (rys. 2)

$$(3.1) \quad S_t(\varrho, \tau) = S_r - S_\varphi = \frac{2\sigma_r}{3KaT_0} - \frac{2\sigma_\varphi}{3KaT_0} = 3V(\varrho, \tau) (1 - \gamma_1^2);$$

w obszarze odkształceń plastycznych (rys. 2)



Rys. 3



Rys. 4

$$(3.2) \quad S_t(\varrho, \tau) = 3 \left(1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right) V(\varrho, \tau) - \frac{3}{2} \gamma_1^2 \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \right) x_s;$$

w obszarze odciążenia (rys. 2)

$$(3.3) \quad S_t(\varrho, \tau) = 3 (1 - \gamma_1^2) V(\varrho, \tau) - \frac{3\gamma_1^2}{\gamma^2} (1 - \gamma^2) \left[V[\varrho, \varrho_0(\varrho)] - \frac{x_s}{2} \right],$$

gdzie

$$\gamma_1^2 = \frac{K}{E_w} = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)},$$

$$\gamma^2 = \frac{\frac{4}{9} E_1 + K}{E_w} = \frac{(1 + \nu) [4\gamma_0^2 (1 - 2\nu) + 3]}{9(1 - \nu)}$$

oraz gdzie $\gamma_0 = E_1/E$ oznacza współczynnik wzmocnienia, a E_1 moduł wzmocnienia przy czystym rozciąganiu.

Na rysunku 4 przedstawione są wykresy funkcji S_t w różnych chwilach czasu. Obliczenia przeprowadzone zostały dla $x_s = 0,52$, $Bi = 20$, $\nu = 0,3$ i $\gamma_0 = 0,03$.

W początkowym okresie chłodzenia różnica $\sigma_r - \sigma_\varphi$ bardzo szybko maleje do minimalnej wartości (którą osiąga na powierzchni $\varrho = 1$) obejmując przy tym w istotny sposób tylko pewną warstwę przypowierzchniową. W miarę upływu czasu szerokość warstwy, dla której S_t osiąga wartości istotnie (ze względów praktycznych) różne od zera, początkowo zwiększa się i następnie maleje do $1 - \varrho_k$ dla $\tau \rightarrow \infty$. Jednocześnie różnica $\sigma_r - \sigma_\varphi$ po osiągnięciu minimalnej wartości dla każdego ustalonego ϱ rośnie z upływem czasu osiągając wartości dodatnie w przedziale $[\varrho_k, 1]$ po zakończeniu procesu chłodzenia.

Intensywność naprężenia w środkowej części kuli $0 \leq \varrho \leq \varrho_k$ jest po zakończeniu tego procesu równa zeru.

Przy dostatecznie dużej różnicy temperatury T_0 odciążenie w procesie chłodzenia kuli może doprowadzić do pojawienia się wtórnych odkształceń plastycznych. Aby to nie nastąpiło, musi być spełniony warunek [2]

$$x_s > x_s''(Bi),$$

gdzie

$$x_s''(Bi) = \frac{x_s'(Bi)}{2\beta_2}, \quad \beta_2 = \frac{3 + \gamma_0(1 - 5\nu)}{3 - 2\gamma_0(1 + \nu)}.$$

Na rysunku 1 przedstawiono krzywą $x_s''(Bi)$ dla $\beta_2 = 1$ i $\beta_2 = 1,04$.

4. Badanie końcowego stanu naprężenia

Naprężenia obwodowe σ_φ^0 i promieniowe σ_r^0 po zakończeniu procesu chłodzenia określone są następującymi równaniami [2]:

$$(4.1) \quad S_r^0(\varrho) = \frac{2\sigma_r^0}{3KaT_0} = \begin{cases} \beta_1 [2Y(\varrho) + x_s \ln \varrho] & \text{dla } \varrho_k \leq \varrho \leq 1; \\ \beta_1 [2Y(\varrho_k) + x_s \ln \varrho_k] = \text{const} & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq \varrho_k; \end{cases}$$

$$S_\varphi^0(\varrho) = \frac{2\sigma_\varphi^0}{3KaT_0} = \begin{cases} S_r^0(\varrho) - \beta_1 \left\{ V[\varrho, \tau_0(\varrho)] - \frac{x_s}{2} \right\} & \text{dla } \varrho_k \leq \varrho \leq 1; \\ S_r^0(\varrho) = \text{const} & \text{dla } 0 \leq \varrho \leq \varrho_k, \end{cases}$$

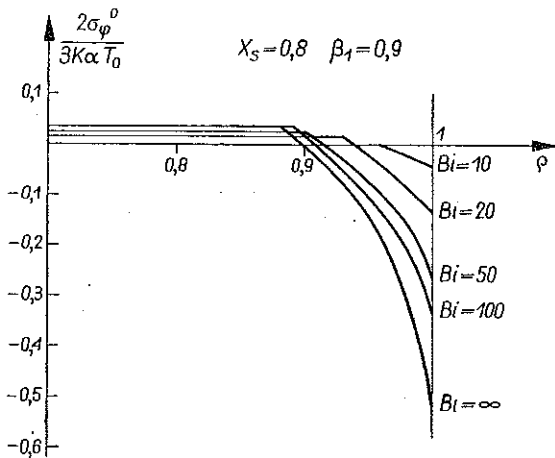
gdzie $\tau_0(\varrho) = \varrho_0^{-1}(\varrho)$ jest równaniem granicy obszaru odciążenia

$$(4.2) \quad Y(\varrho) = \int_{\varrho}^1 \frac{V[\xi; \tau_0(\xi)]}{\xi} d\xi,$$

$$\beta_1 = 3\gamma_1^2 \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \right) = \frac{9}{4\gamma_0(1 - 2\nu) + 3} - \frac{1 + \nu}{1 - \nu}.$$

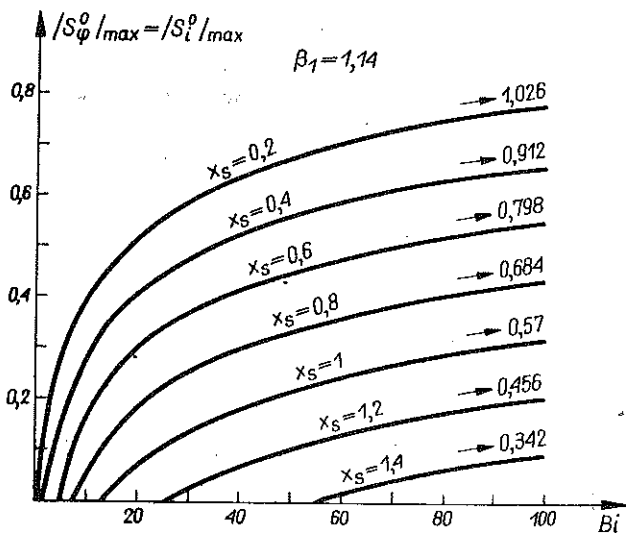
Z równań tych wynika, że wewnętrzna część kuli ($0 \leq \varrho \leq \varrho_k$) znajduje się w stanie hydrostatycznego ściskania.

Na rysunku 5 przedstawiono wykres naprężeń obwodowych wzdłuż promienia dla różnych liczb Biota. Naprężenia obwodowe osiągają minimalną ujemną wartość na powierzchni $\varrho = 1$.



Rys. 5

Naprężenia promieniowe są zawsze dodatnie i maleją monotonicznie od maksymalnej wartości (którą posiadają w przedziale $0 \leq \varrho \leq \varrho_k$), do zera dla $\varrho = 1$. Należy podkreślić, że powyższe wnioski dotyczące jakościowej strony rozwiązania pokrywają się z wnioskami wypowiedzianymi we wcześniej opublikowanej pracy [1].

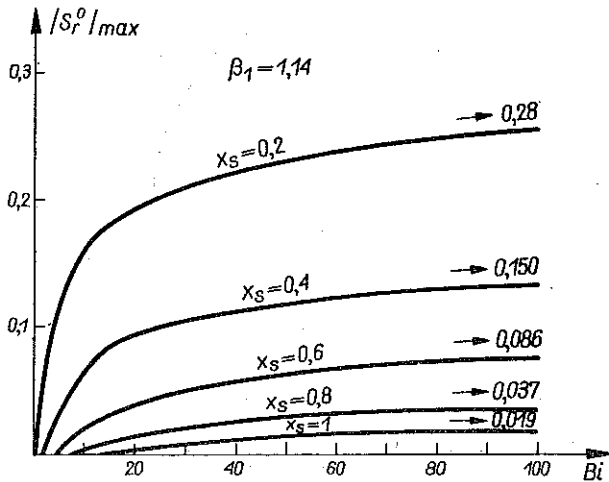


Rys. 6

4.1. Analiza wpływu liczby Biota. Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono wykresy maksymalnych wartości $|S_\varphi^0|$ i $|S_r^0|$ w zależności od liczby Biota i bezwymiarowego parametru x_s dla $\beta_1 = 1,14$. Z wykresów tych wynika, że pominięcie oporu cieplnego

cienkiej przypowierzchniowej warstwy płynu ($Bi \rightarrow \infty$) prowadzi do bardzo dużych błędów dla liczb Biota mniejszych od 100.

Dla wartości $Bi = 100$ błąd ten zmienia się od 20% dla małych x_s i dochodzi do 70% dla x_s bliskich 2. Można zatem stwierdzić, że idealizacja polegająca na przyjmowaniu skoku temperatury powierzchni $\varrho = 1$ w chwili $t = 0$ jest dopuszczalna dla małych x_s tylko przy $Bi > 100$. W przeciwnym przypadku można otrzymać wartości naprężeń kilkakrotnie większe od rzeczywistych.



Rys. 7

W ogólnym przypadku liczba Biota zależy w sposób bardzo złożony i jednocześnie bardzo istotny od promienia kuli R (ze względu na to, że α_p jest funkcją R). Prowadzi to do tego, że małym R rzędu 1–5 cm odpowiada liczba Biota rzędu 0,3–5 nawet przy praktycznie bardzo intensywnym chłodzeniu.

4.2. Analiza wpływu parametrów ν i γ_0 . Zwróćmy uwagę, że funkcja $\tau_0(\varrho)$ nie zależy od parametrów ν i γ_0 . Funkcja ta zależy jedynie od liczby Biota. W związku z tym również funkcja $V[\varrho, \tau_0(\varrho)]$ oraz $Y(\varrho)$ w przedziale $1 \geq \varrho > \varrho_k$ nie zależą od powyższych parametrów. Natomiast granica ϱ_k zależy już od ν :

$$\varrho_k(Bi, x_s) = \varrho_k[Bi, x_s(\nu)].$$

Spostrzeżenie to pozwala stwierdzić, że zależność końcowych naprężeń od współczynnika γ_0 wyraża się tylko przez związek $\beta_1(\gamma_0)$ [por. równanie (4.2)] w całym przedziale $0 \leq \varrho \leq 1$.

Podobnie można stwierdzić, że wpływ ν na S_r^0 i S_φ^0 w przedziale $1 \geq \varrho > \varrho_k$ przejawia się tylko za pośrednictwem $\beta_1(\gamma_0)$.

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali σ_r^0 i σ_φ^0 jako funkcje interesujących nas parametrów ν i γ_0 :

$$\sigma_r^0 = \sigma_r^0(\gamma_0, \nu), \quad \sigma_\varphi^0 = \sigma_\varphi^0(\gamma_0, \nu).$$

Przyjmijmy za definicję względnego błędu, popełnianego z powodu pominięcia wzmocnienia, wielkości

$$(4.3) \quad \varepsilon_1 = \left| \frac{\sigma_r^0(\gamma_0, \nu) - \sigma_r^0(0, \nu)}{\sigma_r^0(0, \nu)} \right|, \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{\sigma_\varphi^0(\gamma_0, \nu) - \sigma_\varphi^0(0, \nu)}{\sigma_\varphi^0(0, \nu)} \right|.$$

Rozwijając $\Delta\sigma = \sigma^0(\gamma_0, \nu) - \sigma^0(0, \nu)$ w szereg potęgowy względem γ_0 w otoczeniu $\gamma_0 = 0$ i ograniczając się do pierwszego wyrazu rozwinięcia otrzymamy

$$(4.4) \quad \left[\frac{1}{\sigma_r^0(0, \nu)} \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial \gamma_0} \right]_{\gamma_0=0} = \left[\frac{1}{\sigma_\varphi^0(0, \nu)} \frac{\partial \sigma_\varphi^0}{\partial \gamma_0} \right]_{\gamma_0=0} = -2(1-\nu)\gamma_0,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2(1-\nu)\gamma_0 + O(\gamma_0^2).$$

Zatem pominięcie wzmocnienia powoduje zwiększenie naprężeń. Popełniany błąd jest bardzo mały; np. dla $\gamma_0 = 0,02$ $\nu = 0,3$ wynosi on $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2,8\%$. Podobnie postępując otrzymamy proste wyrażenie na błąd wynikający z założenia nieściślności materiału dla ciała idealnie plastycznego:

$$(4.5) \quad \varepsilon_3 \stackrel{\text{df}}{=} \left| \frac{\sigma_r^0(0, \frac{1}{2}) - \sigma_r^0(0, \nu)}{\sigma_r^0(0, \frac{1}{2})} \right| = \varepsilon_4 \stackrel{\text{df}}{=} \left| \frac{\sigma_\varphi^0(0, \frac{1}{2}) - \sigma_\varphi^0(0, \nu)}{\sigma_\varphi^0(0, \frac{1}{2})} \right| =$$

$$= 1 - 2\nu + 0[(0,5 - \nu)^2].$$

Ocena powyższa odnosi się jedynie do przedziału $\rho > \rho_k$. Błąd ten jest stonkowo duży. Dla $\nu = 0,3$ wynosi on $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 40\%$. Można łatwo wykazać, że przyjęcie $\nu = 0,5$ prowadzi również do zwiększenia bezwzględnej wartości naprężeń.

Charakterystyczną jest niezależność $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ od promienia ρ .

5. Przykład

5.1. Kula o promieniu $R = 0,1$ m, posiadająca temperaturę $T_0 = 300^\circ\text{C}$, została zanurzona w wodzie o temperaturze bliskiej 0°C . Należy ocenić maksymalne wartości naprężeń obwodowych i promieniowych powstałych w materiale kuli po zakończeniu procesu chłodzenia oraz wyznaczyć szerokość warstwy odkształconej plastycznie.

Zakładamy, że pojemność cieplna zbiornika z wodą jest bardzo duża.

Charakterystyka materiału kuli [3]: stal normalizowana, średnio węglowa o składzie C = 0,25%, Mn = 0,68%, Si = 0,34%, Cr = 0,05%, Ni = 0,19%, S = 0,022%, P = 0,029%.

Własności materiału kuli w temperaturze ok. 250°C :

$$\alpha \cdot 10^6 = 12,8 \frac{1}{^\circ\text{C}}, \quad \lambda = 45,3 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}, \quad k = 0,048 \text{ m}^2/\text{h},$$

$$C_p = 0,120 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}, \quad \gamma = 7,82 \text{ Gcm}^{-3}, \quad E = 1800 \cdot 10^3 \text{ kGcm}^{-2},$$

$$E_0 = 40 \cdot 10^3 \text{ kGcm}^{-2}, \quad \nu = 0,3, \quad \sigma_s = 3000 \text{ kGcm}^{-2}, \quad \gamma_0 = 0,022.$$

Symbol γ oznacza ciężar właściwy.

Procesowi chłodzenia w warunkach wymienionych w przykładzie towarzyszy tzw. wrzenie warstewkowe cieczy. Wyniki badań doświadczalnych wykazują, że w takim procesie współczynnik przenikania ciepła jest prawie stały dla $T_0 > 200^\circ\text{C}$ i jednakowy dla większości cieczy, [4]. Jego wielkość jest rzędu $3 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3$ kcal/m²h°C. Przyjmujemy $\alpha_p = 4 \cdot 10^3$ kcal/m²h°C.

Zakładając, że współczynnik emisji powierzchni kuli jest mały, pominiemy wpływ promieniowania.

Danym wyszczególnionym w zadaniu odpowiadają następujące wartości bezwymiarowych parametrów:

$$x_s = 0,61, \quad Bi = 9, \quad \beta_1 \approx 1,14.$$

Z wykresów 3, 6 i 7 odczytujemy:

$$\varrho_k = 0,89, \quad \frac{2|\sigma_\varphi^0|_{\max}}{3KaT_0} \approx 0,15, \quad \frac{2|\sigma_r^0|_{\max}}{3KaT_0} \approx 0,015$$

obliczamy interesujące nas wielkości:

$$|\sigma_\varphi^0|_{\max} \approx 1300 \text{ kG cm}^{-2}, \quad |\sigma_r^0|_{\max} \approx 130 \text{ kG cm}^{-2}.$$

Szerokość warstwy $R - r_k = 1,1$ cm.

5.2. Należy wyznaczyć warunek, jaki musi spełniać promień kuli (dane dotyczące własności materiału kuli oraz jej temperatura przyjmujemy takie same jak w przykładzie pierwszym), aby wystąpiły w niej końcowe naprężenia po zakończeniu procesu chłodzenia drogą konwekcji naturalnej w powietrzu o temperaturze bliskiej 0°C .

Współczynnik przenikania ciepła określimy z równań następujących [4]:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha_r + \alpha_k, \quad Nu = 0,13 (G_r P_r)^{1/3}, \\ Nu &= \frac{2\alpha_k R}{\lambda_1}, \quad G_r = \frac{8R^3 \gamma_p^2 \beta_2 T_0}{\mu_1^2 g}, \quad P_r = \frac{C\mu g}{\lambda}, \\ \alpha_r &= \frac{4,9 \cdot 10^{-8} \varepsilon (T_0^4 - 273^4)}{T_0 - 273}, \end{aligned}$$

gdzie

$$T_0 = 273 + 300^\circ\text{K}, \quad \beta_2 = 1/273$$

oraz λ_1 oznacza przewodnictwo cieplne powietrza, μ_1 lepkość powietrza, γ_p ciężar właściwy powietrza, C ciepło właściwe powietrza oraz ε współczynnik emisyjności powierzchni kuli. Przyjmujemy $\varepsilon = 0,8$.

Po podstawieniu odpowiednich danych charakteryzujących własności powietrza (w temperaturze 200°C) ostatecznie otrzymamy

$$Bi = 0,48 R.$$

We wzorze tym R należy wyrazić w metrach.

Z rys. 1 odczytujemy, że dla $x_s = 0,61$ krytyczna wartość liczby Biota wynosi 4,5. Zatem ostateczny warunek przyjmie postać

$$R > 9,4 \text{ m.}$$

W zakończeniu pragnę serdecznie podziękować dr inż. Leszkowi SOLARZOWI za pomoc w przeprowadzeniu obliczeń na maszynie cyfrowej.

Literatura cytowana w tekście

1. H. PARKUS, *Spannungen beim Abkühlen einer Kugel*, Ing.-Arch., **28** (1959), 251-254.
2. B. RANIECKI, *Naprężenia w sprężysto-plastycznej kuli z pustką kulistą znajdującej się w zmiennym polu temperatur*, Rozpr. Inżyn., **3**, **14** (1966).
3. И. Гольденблат, и др., *Расчеты на прочность в условиях Высоких температур*, Машиностроение, Москва 1965.
4. J. SIBOROWSKI, *Inżynieria Chemiczna*, PWT., Warszawa 1955.
5. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford 1947.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОНИКАНИЯ ТЕПЛА НА КОНЕЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ШАРЕ, ПОДВЕРЖЕННОМ ПРОЦЕССУ ОХЛАЖДЕНИЯ

В работе исследовались напряжения в упруго-пластическом шаре, охлаждаемым путем погружения в холодной жидкости от постоянной начальной температуры T_0 до 0°C . Обсуждения проводились на основе результатов, полученных в работе [2], предполагая сжимаемость материала шара, линейное упрочнение и пренебрегая влиянием температуры на физические свойства. Обсуждается влияние числа Биота и степень значения упрочнения на конечное напряженное состояние. Показано, что идеализация, состоящая в предположении температурного скачка, в момент $t = 0$ в краевом условии для уравнения теплопроводности проводит, для чисел Биота < 100 , к ошибочной оценке величин конечных напряжений.

Summary

A STUDY OF THE INFLUENCE OF THE COEFFICIENT OF HEAT TRANSFER ON THE FINAL STATE OF STRESS IN AN ELASTIC-PLASTIC SPHERICAL BODY UNDERGOING A COOLING PROCESS

The subject of the present paper is study of the stress that appear in an elastic-plastic spherical body cooled (by immersing in a cold liquid) from a uniform initial temperature T_0 to 0°C . The considerations are based on the results of [2] assuming a compressible material,

linear strain-hardening and rejecting the influence of the temperature on the physical properties of the material. The paper contains also a discussion of the influence on the final state of stress, of the Biot number and the degree of strain-hardening.

It is shown that the idealization consisting in the assumption of a temperature jump at the moment $t = 0$ in the boundary condition for the heat equation leads, for Biot numbers below 100, to an erroneous appraisal of the final value of the stress.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 czerwca 1966 r.
