

SIŁA KRYTYCZNA RAMIENIA DŹWIGU
PRZY WYBOCZENIU Z PŁASZCZYZNY ZAWIESZENIA

W. DMITRIJUK (HAIFA)

Siła krytyczna pręta z odciażką (ramienia dźwigu) przy wyboczeniu z płaszczyzny zawieszenia do niedawna była obliczana tak jak dla pręta utwierdzonego w stopie i swobodnego na górnym końcu. Nie uwzględniano przy tym, że przy wychyleniu ramienia dźwigu wychyla się również odciażka wytwarzając siłę zwrotną, która zwiększa siłę krytyczną.

Przypadek obciążenia pręta za pośrednictwem linki (a więc siłą, która po wyboczeniu przyjmuje kierunek zwrócony do pewnego ustalonego punktu) omawiają: dla stałego momentu bezwładności W. I. FIEDOSJEW [6], a dla momentu bezwładności zmiennego z drugą potęgą x R. ROSMAN [7]. Przypadek pręta z odciażką ze stałym momentem bezwładności rozpatruje KOROBOW [8], a momentem zmiennym z drugą potęgą x rozpatrywał KOGAN, [9 i 1]. W tej pracy rozpatrzono również przypadki takiego pręta o zmiennym momencie bezwładności z czwartą potęgą x o momencie skokowo zmiennym oraz częściowo stałym i częściowo zmiennym z drugą potęgą x .

Zobaczmy również, że gdy współczynnik oddziaływania odciażki $k = 0$, to pręt jest utwierdzony w stopie i swobodny na górnym końcu, oraz gdy $k = 1$, to odciażka wpływa tak na zachowanie pręta, jak gdyby był on oparty na dwóch podporach. Na tej podstawie otrzymujemy dwa przybliżone wzory, które mogą być stosowane w praktyce do obliczenia siły krytycznej w ramieniu dźwigu.

Drugi wzór przybliżony jest uogólnieniem wzoru podanego przez brytyjską normę B.S. 2573, Part 1 dla ramienia dźwigu o stałym momencie bezwładności.

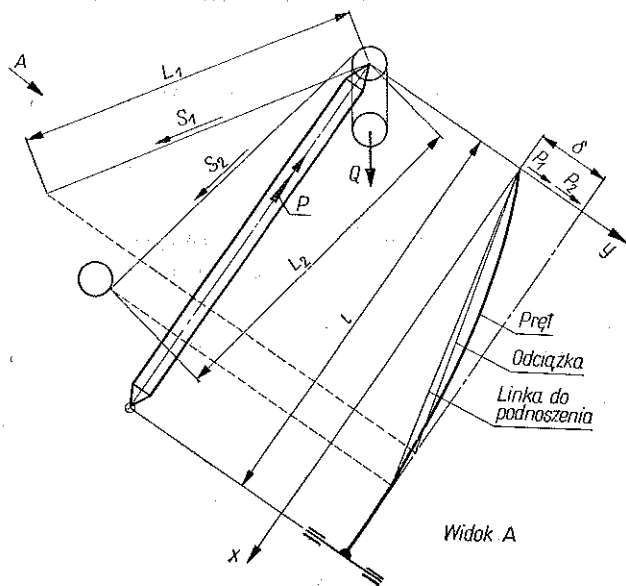
Oznaczenia

- Q ciężar podnoszony,
- n ilość gałęzi w wielokrążku,
- l długość pręta,
- P siła w pręcie,
- L_1 długość odciażki,
- S_1 siła w odciażce,
- L_2 długość linki do podnoszenia,
- S_2 siła w linie do podnoszenia,
- P_1 siła zwrotna wywołana odciażką,
- P_2 siła zwrotna wywołana linką do podnoszenia,
- k współczynnik odciażki,
- δ wychylenie pręta,
- μ współczynnik długości $P = \pi^2 EI/(\mu l)^2$.

1. Wzory podstawowe

1.1. Stały moment bezwładności pręta ($I = \text{const}$) [1 i 3]. Jeżeli pręt wychyli się w bok, to razem z nim wychylają się odciązka i linka do podnoszenia wywołując siły zwrotne (rys. 1)

$$P_1 = S_1 \frac{\delta}{L_1}, \quad P_2 = S_2 \frac{\delta}{L_2}.$$



Rys. 1

Przyjmując początek układu w wierzchołku pręta (rys. 1) możemy napisać równanie różniczkowe w następującej postaci:

$$EIy'' + Py - (P_1 + P_2)x = 0$$

albo

$$(1.1.1) \quad EIy'' + Py - \left(\frac{S_1}{L_1} + \frac{S_2}{L_2} \right) \delta x = 0.$$

Jeżeli oznaczymy

$$(1.1.2) \quad k = \left(\frac{S_1}{L_1} + \frac{S_2}{L_2} \right) \frac{l}{P},$$

to równanie (1.1.1) przyjmuje postać

$$(1.1.3) \quad EIy'' + Py - k \frac{P}{l} \delta x = 0.$$

Ogólnym rozwiązaniem (1.1.3) jest funkcja

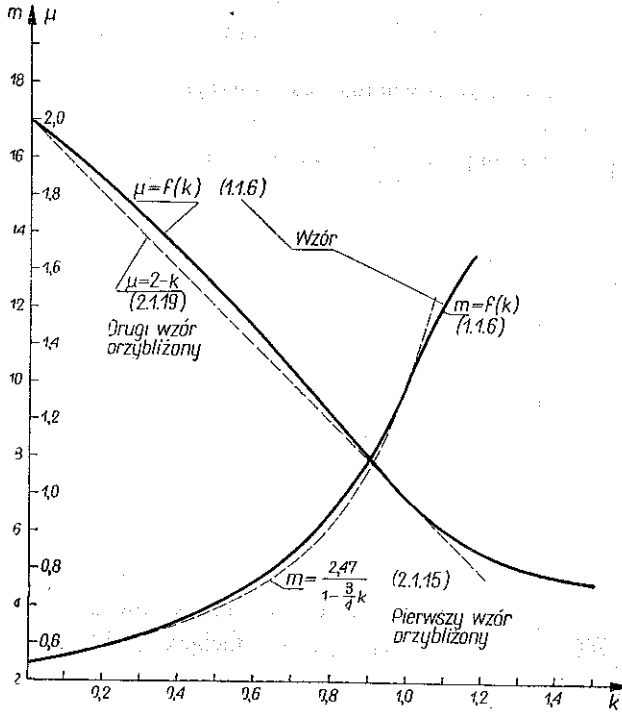
$$(1.1.4) \quad y = k \frac{\delta}{l} x + C_1 \cos \frac{\pi x}{\mu l} + C_2 \sin \frac{\pi x}{\mu l}.$$

Z warunków brzegowych

$$(1.1.5) \quad y'(l) = 0, \quad y(l) = \delta, \quad y(0) = 0$$

określamy C_1 i C_2 i równanie określające π/μ

$$(1.1.6) \quad \frac{\pi/\mu}{\operatorname{tg}(\pi/\mu)} = \frac{k}{k-1}$$



Rys. 2

Tablica do rys. 2

k	(1.1.6)		(2.1.15)		(2.1.19)		
	m	μ	m	$\Delta m\%$	μ	m	$\Delta m\%$
0,0	2,47	2,00	2,47	0	2,0	2,47	0
0,1	2,68	1,92	2,66	0,75	1,9	2,74	-2,24
0,2	2,95	1,83	2,90	1,7	1,8	3,05	-3,39
0,3	3,23	1,75	3,18	1,55	1,7	3,41	-5,58
0,4	3,63	1,65	3,52	3	1,6	3,85	-6,06
0,5	4,10	1,55	3,94	3,9	1,5	4,39	-7,08
0,6	4,75	1,44	4,48	5,7	1,4	5,03	-5,90
0,7	5,50	1,34	5,19	5,7	1,3	5,83	-6,00
0,8	6,60	1,22	6,15	6,8	1,2	6,86	-3,94
0,9	8,00	1,11	7,58	5,25	1,1	8,15	-1,88
1,0	9,87	1,00	9,87	0	1,0	9,87	0

Wyróżnimy dwa charakterystyczne przypadki: (por. rys. 1.1.2).

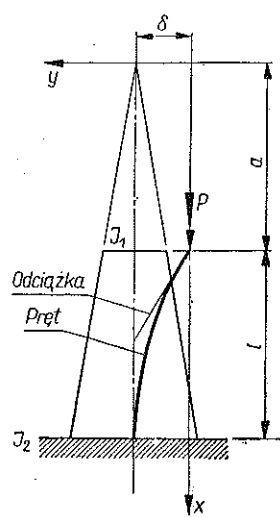
- 1) pręt utwierdzony w jednym a swobodny na drugim końcu: $k=0, \mu=\mu_0=2$;
- 2) odciążka wpływa na pręt tak, jak gdyby pręt był na dwóch podporach: $k=1, \mu=\mu_1=1$.

1.2. Moment bezwładności pręta $I=I_1 \left(\frac{x}{a}\right)^2$, [1]. Przyjmując początek układu jak na rys. 3, równanie różniczkowe pręta możemy napisać w postaci

$$(1.2.1) \quad EI_1 \left(\frac{x}{a}\right)^2 y'' + Py - k \frac{P}{l} \delta(x-a) = 0.$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(1.2.2) \quad y = \sqrt{\frac{x}{a}} \left[A \sin \left(\beta \ln \frac{x}{a} \right) + B \cos \left(\beta \ln \frac{x}{a} \right) \right] + \frac{k}{l} \delta(x-a),$$



Rys. 3

gdzie

$$(1.2.3) \quad \beta = \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1} - \frac{1}{4}}.$$

A i B są to stałe całkowania, które określamy z warunków brzegowych: $y(a) = 0, y'(a+l) = 0$. Z warunku $y(a+l) = \delta$ otrzymamy równanie określające siłę krytyczną w przecię:

$$(1.2.4) \quad \frac{\beta}{\operatorname{tg} \left(\beta \ln \frac{a+l}{a} \right)} = \frac{k}{k-1} \frac{a+l}{l} - \frac{1}{2}.$$

Jeśli $k=0$, to otrzymamy równanie dla określenia siły krytycznej pręta bez odciążki ([2], s. 127, wzór [I]):

$$(1.2.5) \quad \frac{\beta}{\operatorname{tg} \left(\beta \ln \frac{a+l}{a} \right)} = -\frac{1}{2}.$$

Pomnożmy obie strony równania (1.2.4) przez $\ln(a+l/a)$ i przekształćmy je do postaci wygodnej do obliczeń biorąc pod uwagę, że

$$(1.2.6) \quad m = \frac{Pl^2}{EI_2}, \quad \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{a+l}{a}\right)^2,$$

$$(1.2.7) \quad \gamma = \beta \ln \frac{a+l}{a}.$$

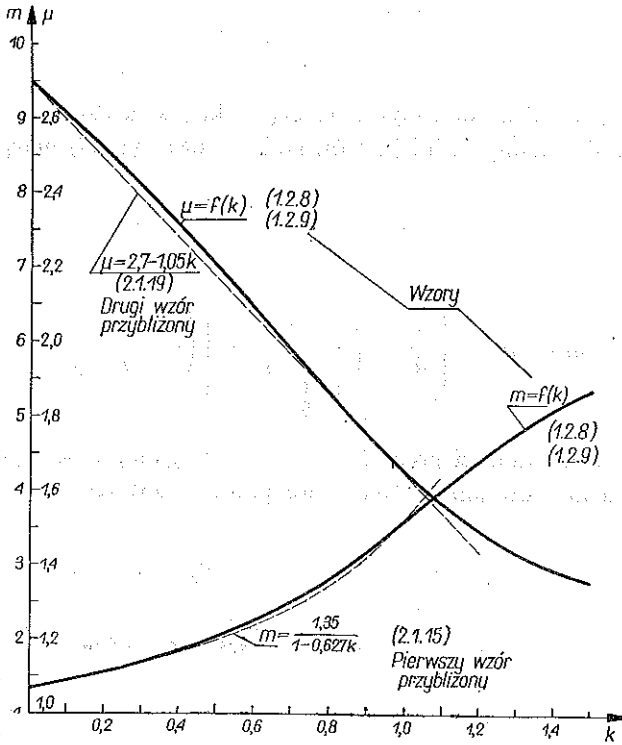
Otrzymamy

$$(1.2.8) \quad \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{k}{k-1} \frac{\ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{1 - \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} - \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}.$$

oraz

$$(1.2.9) \quad m = \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{\ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} \right)^2 \right] \left(1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \right)^2$$

Porządek obliczeń jest następujący: przy danych I_1 , I_2 i k za pomocą tablic $(\operatorname{tg} x)/x$ znajdujemy γ z (1.2.8) oraz m z równania (1.2.9) (rys. 4).



Rys. 4

Tablica do rys. 4

k	(1.2.8) (1.2.9)		(2.1.15)		(2.1.19)		
	m	μ	m	$\Delta m\%$	μ	m	$\Delta m\%$
0,0	1,35	2,70	1,35	0	2,70	1,35	0,00
0,1	1,45	2,61	1,44	0,69	2,60	1,46	-0,69
0,2	1,57	2,51	1,55	1,3	2,49	1,59	-1,27
0,3	1,70	2,41	1,66	2,4	2,39	1,73	-1,76
0,4	1,85	2,31	1,80	2,7	2,28	1,90	-2,70
0,5	2,04	2,20	1,97	3,5	2,18	2,08	-1,96
0,6	2,27	2,08	2,17	4,4	2,07	2,30	-1,32
0,7	2,52	1,98	2,40	4,8	1,97	2,54	-0,8
0,8	2,84	1,87	2,81	1,0	1,86	2,85	-0,35
0,9	3,19	1,76	3,10	2,9	1,76	3,19	0
1,0	3,62	1,65	3,62	0	1,65	3,62	0

Tutaj również wyróżnimy dwa charakterystyczne przypadki:

1) gdy $k = 0$, to pręt jest utwierdzony w stopie i swobodny na drugim końcu; równanie (1.2.8) przyjmuje postać

$$(1.2.10) \quad \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = -\frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}};$$

współczynnik $m = m_0$ obliczamy wg równania (1.2.9), a $\mu = \mu_0$ wg wzoru

$$(1.2.11) \quad \mu = \frac{\pi}{\sqrt{m_0}};$$

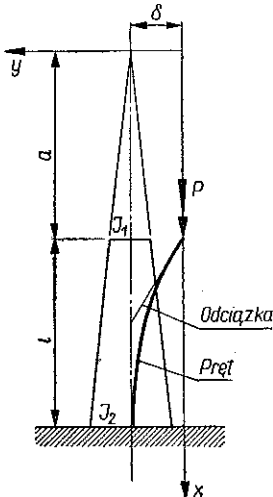
2) gdy $k = 1$, to odciążka wpływa na pręt tak, jak gdyby pręt był na dwóch podporach (dowód podamy później). Równania (1.4.8) i (1.4.9) mają postać

$$\frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = \infty, \quad \text{przy czym } \gamma = \pi,$$

więc

$$(1.2.12) \quad m = m_1 = \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{\ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} \right)^2 \right] \left(1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \right)^2.$$

1.3. Moment bezwładności pręta $I = I_1 (x/a)^4$. Przyjmując początek układu jak na rys. 5 znajdziemy równanie różniczkowe pręta w postaci



Rys. 5

$$(1.3.1) \quad EI_1 \left(\frac{x}{a} \right)^4 y'' + Py - k \frac{P}{l} \delta(x-a) = 0.$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(1.3.2) \quad y = x \left[A \cos \frac{a}{x} + B \sin \frac{a}{x} \right] + \frac{k}{l} \delta(x-a),$$

gdzie

$$(1.3.3) \quad a = \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1}}.$$

Warunki brzegowe: $y(a) = 0$, $y'(a+l) = 0$, $y(a+l) = \delta$ wyznaczają równanie określające siłę krytyczną:

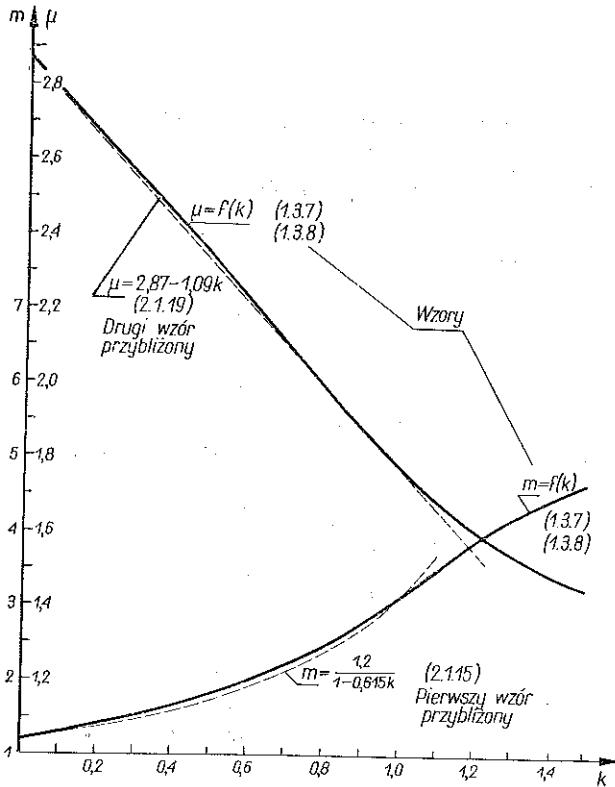
$$(1.3.4) \quad \frac{[a/(a+l)](l/a)}{\operatorname{tg} [(a/(a+l))(l/a)]} = \frac{l+a}{a} \frac{k}{k-1} - \frac{l}{a}.$$

Gdy $k = 0$, otrzymamy równanie dla określenia siły krytycznej pręta bez odciążki ([2] s. 128, wzór [2-54]):

$$(1.3.5) \quad \frac{[a/(a+l)](l/a)}{\operatorname{tg} [(a/(a+l))(l/a)]} = -\frac{l}{a}.$$

Przekształcimy równanie (1.3.4) do postaci wygodnej do obliczeń podstawiając

$$(1.3.6) \quad m = \frac{Pl^2}{EI_2}, \quad \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{l+a}{a}\right)^4, \quad \gamma = \frac{a}{a+l} \frac{l}{a};$$



Rys. 6

Tablica do rys. 6

k	(1.3.7) (1.3.8)		(2.1.15)		(2.1.19)		
	m	μ	m	$\Delta m\%$	μ	m	$\Delta m\%$
0,0	1,20	2,87	1,20	0	2,87	1,20	0
0,1	1,29	2,77	1,28	0,84	2,76	1,30	-0,78
0,2	1,40	2,66	1,37	2,14	2,65	1,41	-0,71
0,3	1,52	2,55	1,47	3,3	2,54	1,53	-0,66
0,4	1,65	2,45	1,59	3,64	2,43	1,68	-1,82
0,5	1,81	2,34	1,73	4,4	2,32	1,84	-1,66
0,6	2,00	2,22	1,90	5,0	2,22	2,00	0
0,7	2,22	2,11	2,11	4,95	2,11	2,22	0
0,8	2,48	2,00	2,36	3,22	2,00	2,48	0
0,9	2,79	1,88	2,69	3,58	1,89	2,76	-1,07
1,0	3,12	1,78	3,12	0	1,78	3,12	0

otrzymamy

$$(1.3.7) \quad \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = \sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} \frac{k}{k-1} - \sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}} + 1$$

oraz

$$(1.3.8) \quad m = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}$$

Porządek obliczeń jest w tym przypadku następujący: przy danych I_1 , I_2 i k za pomocą tablic $(\operatorname{tg} x)/x$ znajdujemy γ z (1.3.7) a m z równania (1.3.8) (rys. 6).

Również tu zauważamy dwa charakterystyczne przypadki:

1) gdy $k = 0$, pręt jest utwierdzony w stopie i swobodny na drugim końcu i równanie (1.3.7) przyjmuje postać

$$(1.3.9) \quad \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = 1 - \sqrt[4]{\frac{I_2}{I_1}},$$

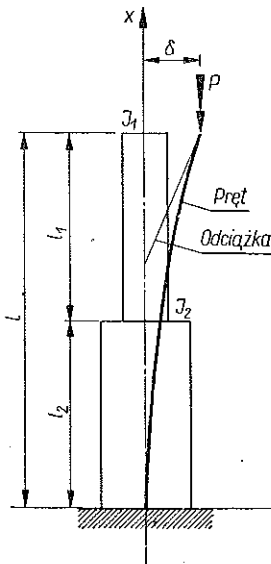
a współczynnik $m = m_0$ obliczamy wg (1.3.8) oraz $\mu = \mu_0 = \pi / \sqrt{m_0}$;

2) gdy $k = 1$, odciążka wpływa na zachowanie się pręta tak, jak gdyby był on na dwóch podporach i równania (1.3.7) i (1.3.8) mają postać:

$$(1.3.10) \quad \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = \infty, \quad \gamma = \pi,$$

$$m = m_1 = \pi^2 \sqrt{I_1/I_2},$$

1.4. Moment bezwładności pręta zmienia się skokowo. Pręt składa się z dwóch części o długości l_1 i l_2 o momentach bezwładności odpowiednio I_1 i I_2 (rys. 7). Równania różniczkowe tych części są następujące:



Rys. 7

$$(1.4.1) \quad EI_1 y_1'' + P(\delta - y_1) - k \frac{P}{l} \delta (l - x) = 0,$$

$$EI_2 y_2'' + P(\delta - y_2) - k \frac{P}{l} \delta (l - x) = 0.$$

Ogólne rozwiązania tych równań są funkcje

$$(1.4.2) \quad y_1 = \delta - k \frac{\delta}{l} (l - x) + C \cos k_1 x + D \sin k_1 x,$$

$$y_2 = \delta - k \frac{\delta}{l} (l - x) + A \sin k_2 x + B \cos k_2 x,$$

gdzie

$$(1.4.3) \quad k_1 = \sqrt{P/EI_1}, \quad k_2 = \sqrt{P/EI_2}.$$

Warunki brzegowe i ciągłości dla wyznaczenia siły krytycznej są następujące:

$$(1.4.4) \quad y_1(l) = \delta, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0,$$

$$y_1(l_2) = y_2(l_2), \quad y_1'(l_2) = y_2'(l_2).$$

Stąd znajdziemy

$$(1.4.5) \quad \frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} k_1 l_1 \operatorname{tg} k_2 l_2 - \frac{k}{1-k} \left(\frac{\operatorname{tg} k_1 l_1}{k_1 l} + \frac{\operatorname{tg} k_2 l_2}{k_2 l} \right) - 1 = 0.$$

Jeśli $k = 0$, otrzymamy równanie dla określenia siły krytycznej pręta bez odciążki ([2], s. 115, wzór [b])

$$(1.4.6) \quad \operatorname{tg} k_1 l_1 \operatorname{tg} k_2 l_2 = \frac{k_1}{k_2}.$$

Przekształcimy równanie (1.4.5) do postaci wygodnej do obliczeń podstawiając:

$$(1.4.7) \quad m = x^2 = \frac{Pl^2}{EI_2}, \quad l_1 = l - l_2.$$

Uzyskamy równanie

$$(1.4.8) \quad \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \operatorname{tg} \left[x \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) \right] \operatorname{tg} \left(x \frac{l_2}{l} \right) - \frac{k}{1-k} \left\{ \frac{\operatorname{tg} \left[x \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) \right]}{x \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} + \frac{\operatorname{tg} \left(x \frac{l_2}{l} \right)}{x} \right\} - 1 = 0.$$

Również tu mamy dwa charakterystyczne przypadki:

1) gdy $k = 0$, pręt jest utwierdzony w stopie i swobodny na drugim końcu; równanie (1.4.8) przyjmuje postać

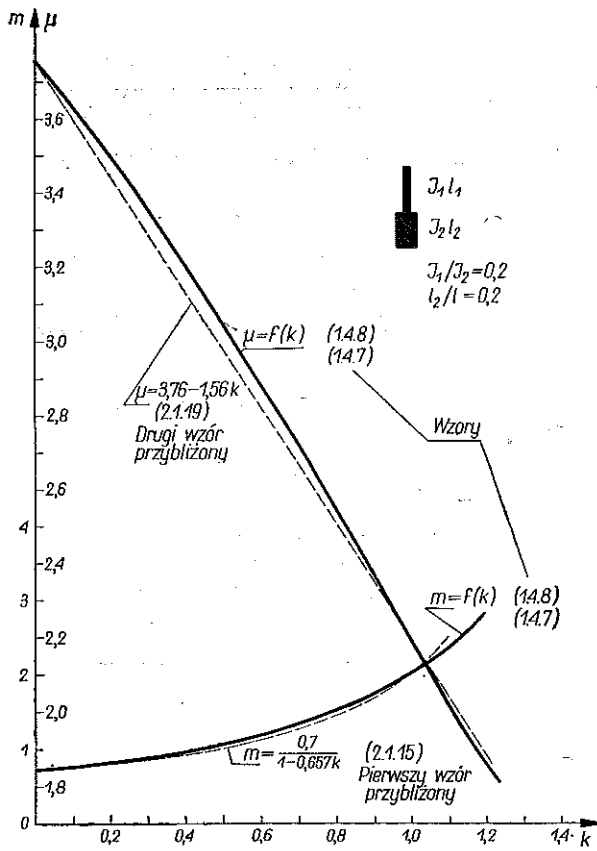
$$(1.4.9) \quad \operatorname{tg} \left[x \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) \right] \operatorname{tg} \left(x \frac{l_2}{l} \right) = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}, \quad m = m_0 = x^2.$$

2) gdy $k = 1$, odciążka wpływa na zachowanie pręta tak, jak gdyby był on na dwóch podporach i równanie (1.4.8) ma postać

$$(1.4.10) \quad \frac{\operatorname{tg} \left[x \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \left(1 - \frac{l_2}{l} \right) \right]}{\operatorname{tg} \left(x \frac{l_2}{l} \right)} = - \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}, \quad m = m_1 = x^2.$$

1.5. Pręt składa się z dwóch części: moment bezwładności pierwszej części zmienia się wg równania $I = I_1 (x/a)^2$, a w drugiej jest stały $I_2 = \text{const}$ (rys. 9). Równanie różniczkowe pręta ma postać

$$(1.5.1) \quad \begin{aligned} EI_1 \left(\frac{x}{a} \right)^2 y_1'' + P y_1 - k \frac{P}{l} \delta(x-a) &= 0, \\ EI_2 y_2'' + P y_2 - k \frac{P}{l} \delta(x-a) &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 8

Tablica do rys. 8

k	(1.4.8) (1.4.7)		(2.1.15)		(2.1.19)		
	m	μ	m	$\Delta m\%$	μ	m	$\Delta m\%$
0,0	0,700	3,76	0,700	0	3,76	0,70	0
0,1	0,751	3,63	0,750	0,13	3,60	0,76	-1,2
0,2	0,810	3,50	0,806	0,5	3,45	0,83	-2,47
0,3	0,885	3,34	0,872	1,47	3,29	0,91	-2,82
0,4	0,970	3,19	0,950	2,06	3,14	1,00	-3,09
0,5	1,07	3,04	1,042	2,6	2,98	1,11	-3,36
0,6	1,19	2,88	1,153	3,1	2,82	1,24	-4,2
0,7	1,33	2,73	1,297	2,26	2,67	1,39	-4,5
0,8	1,52	2,55	1,476	2,64	2,51	1,57	-3,29
0,9	1,75	2,37	1,71	2,29	2,36	1,77	-1,14
1,0	2,04	2,20	2,04	0	2,20	2,04	0

Ogólne rozwiązania tych równań są następujące:

$$(1.5.2) \quad \begin{aligned} y_1 &= A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left(\beta \ln \frac{x}{a} \right) + \\ &+ B \sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left(\beta \ln \frac{x}{a} \right) + k \frac{\delta}{l} (x - a), \\ y_2 &= C \sin k_2 (l + a - x) + \\ &+ D \cos k_2 (l + a - x) + \frac{k}{l} \delta (x - a), \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.5.3) \quad \beta = \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1} - \frac{1}{4}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}.$$

Warunki brzegowe i warunki ciągłości są następujące:

$$(1.5.4) \quad \begin{aligned} y_1(a) &= 0, & y_2(a+l) &= \delta, & y_2'(a+l) &= 0, \\ y_1(a+l_1) &= y_2(a+l_1), & y_1'(a+l_1) &= y_2'(a+l_1). \end{aligned}$$

Równanie określające siłę krytyczną ma postać:

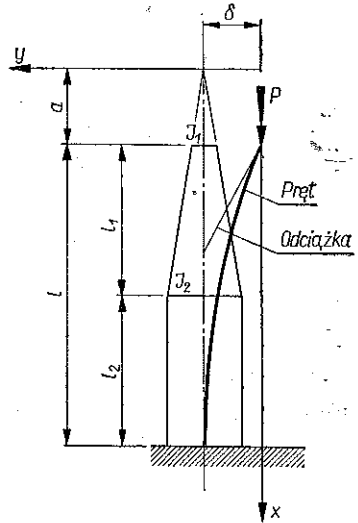
$$(1.5.5) \quad \frac{1}{2} \ln \frac{a+l_1}{a} + \frac{\beta \ln \frac{a+l_1}{a}}{\operatorname{tg} \left(\beta \ln \frac{a+l_1}{a} \right)} = \ln \frac{a+l_1}{a} \frac{\frac{a+l_1}{l_2} k_2 l_2 \operatorname{tg} k_2 l_2 - \frac{a+l_1}{l} \frac{k}{1-k}}{\frac{k}{1-k} \frac{l_2}{l} \operatorname{tg} k_2 l_2 + 1}.$$

Przekształcimy równanie (1.5.5) do postaci wygodniejszej do obliczeń podstawiając

$$(1.5.6) \quad \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{a+l_1}{a} \right)^2, \quad m = x^2 = \frac{Pl^2}{EI_2}.$$

Otrzymamy

$$(1.5.7) \quad \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} + \frac{\sqrt{\left(\frac{x \frac{l_1}{l}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{\operatorname{tg} \left[\sqrt{\left(\frac{x \frac{l_1}{l}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \right)^2 - \frac{1}{4}} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \right]} =$$



Rys. 9

$$= \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \frac{\frac{\frac{l_1}{l_2}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \left(x \frac{l_2}{l}\right) \operatorname{tg} \left(x \frac{l_2}{l}\right) - \frac{\frac{l_1}{l}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \frac{k}{1 - k}}{\frac{k}{1 - k} \frac{l_2}{l} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{l_2}{l} x\right)}{\frac{l_2}{l} x} + 1}}$$

Porządek obliczeń jest następujący: przy danych I_1, l_1, I_2, l_2 i k obliczamy x metodą prób z (1.5.7), a m z (1.5.6) (rys. 10).

1) Gdy $k = 0$, pręt jest utwierdzony w stopie i swobodny na drugim końcu. Równanie (1.5.7) przyjmuje postać

$$(1.5.8) \quad \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} + \frac{\sqrt{\left(\frac{x \frac{l_1}{l}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}\right)^2} - \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{\operatorname{tg} \left[\sqrt{\left(\frac{x \frac{l_1}{l}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}\right)^2} - \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \right]} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \frac{\frac{l_1}{l_2}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \left(x \frac{l_2}{l}\right) \operatorname{tg} \left(x \frac{l_2}{l}\right),$$

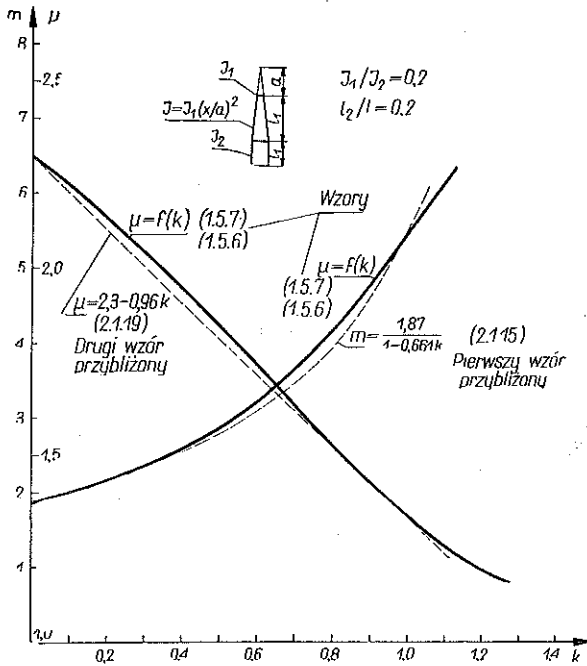
$$m = m_0 = x^2.$$

2) Gdy $k = 1$, odciążka wpływa tak, jak gdyby pręt był na dwóch podporach i równanie (1.5.7) ma postać

$$(1.5.9) \quad \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} + \frac{\sqrt{\left(\frac{x \frac{l_2}{l}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}\right)^2} - \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{\operatorname{tg} \left[\sqrt{\left(\frac{x \frac{l_2}{l}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}\right)^2} - \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \right]} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \frac{\frac{l_1}{l_2}}{1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}} \frac{\frac{l_2}{l} x}{\operatorname{tg} \left(\frac{l_2}{l} x\right)},$$

$$m = m_1 = x^2.$$



Rys. 10

Tablica do rys. 10

k	(1.5.7) (1.5.6)		(2.1.15)		(2.1.19)		
	m	μ	m	$\Delta m\%$	μ	m	$\Delta m\%$
0,0	1,87	2,30	1,87	0	2,3	1,87	0
0,1	2,00	2,22	2,00	0	2,2	2,04	-2
0,2	2,15	2,14	2,15	0	2,11	2,22	-3,26
0,3	2,35	2,05	2,34	0,43	2,01	2,45	-4,26
0,4	2,60	1,95	2,54	2,3	1,92	2,68	-3,08
0,5	2,90	1,85	2,80	3,45	1,82	2,98	-2,76
0,6	3,25	1,74	3,11	4,3	1,72	3,34	-2,76
0,7	3,70	1,63	3,48	5,95	1,63	3,72	-0,54
0,8	4,20	1,53	3,97	5,5	1,53	4,22	-0,476
0,9	4,80	1,43	4,62	3,75	1,44	4,76	-0,84
1,0	5,52	1,34	5,52	0	1,34	5,52	0

1.6. Udowodnimy, że siła krytyczna w pręcie z odciażką przy współczynniku odciażki $k = 1$ równa się sile krytycznej w pręcie na dwóch podporach.

Równanie różniczkowe pręta z odciażką jest następujące:

$$(1.6.1) \quad EI(x) y_1'' + P y_1 = P \frac{\delta}{l} k x.$$

Warunki brzegowe mają postać (rys. 11)

$$(1.6.2) \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(l) = 0, \quad y_1(l) = \delta.$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(1.6.3) \quad y_I = Ay_1(x) + By_2(x) + k \frac{\delta}{l} x.$$

Korzystając z warunków brzegowych (1.6.2) otrzymamy

$$(1.6.4) \quad Ay_1(0) + By_2(0) = 0$$

oraz

$$(1.6.5) \quad Ay_1(l) + By_2(l) + k\delta = \delta.$$

Dla $k = 1$ (1.6.5) ma postać

$$(1.6.6) \quad Ay_1(l) + By_2(l) = 0.$$

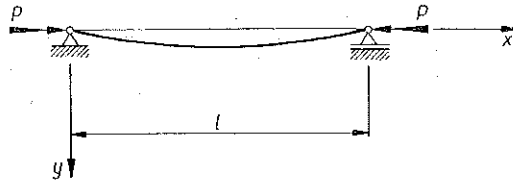
A więc siłę krytyczną znajdziemy przyrównując główny wyznacznik równań (1.6.4) i (1.6.6) do zera:

$$(1.6.7) \quad \Delta = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix} = 0.$$

Dla pręta na dwóch podporach przegubowych równanie różniczkowe ma postać:

$$(1.6.8) \quad EI(x) y''_{II} + Py_{II} = 0.$$

Warunki brzegowe są następujące (rys. 12)



Rys. 12

$$(1.6.9) \quad y_{II}(0) = 0, \quad y_{II}(l) = 0.$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(1.6.10) \quad y_{II} = Cy_1(x) + Dy_2(x).$$

Wykorzystując warunki brzegowe otrzymamy:

$$(1.6.11) \quad Cy_1(0) + Dy_2(0) = 0$$

oraz

$$(1.6.12) \quad Cy_1(l) + Dy_2(l) = 0.$$

Siłę krytyczną znajdziemy przyrównując główny wyznacznik równań (1.6.11) i (1.6.12) do zera:

$$(1.6.13) \quad \Delta = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix} = 0.$$

Obydwa wyznaczniki są identyczne, a więc i siła krytyczna jest również identyczna.

1.7. Określenie współczynnika oddziaływania odciażki przy pomocy wymiarów i liczby gałęzi wielokrążka [5 i 4]. Niechaj a, b, c, d, f, g, l, L_1 i L_2 oznaczają wymiary wg rys. 13 oraz ilość gałęzi wielokrążka. Wówczas

$$(1.7.1) \quad S_2 = \frac{Q}{n}$$

Rzut sił na oś $x \Sigma X = 0$ daje równanie

$$(1.7.2) \quad \Sigma X = P \frac{a}{l} - \frac{Q}{n} \frac{b}{L_2} - S_1 \frac{c}{L_1} = 0,$$

a rzut sił na oś $y \Sigma Y = 0$

$$(1.7.3) \quad \Sigma Y = P \frac{g}{l} - Q - \frac{Q}{n} \frac{f}{L_2} - S_1 \frac{d}{L_1} = 0.$$

Z równań (1.7.2) i (1.7.3) wyznaczamy P i S_1 i podstawiamy do wzoru (1.1.2):

$$(1.7.4) \quad k = \frac{(nL_2 + f)a - bg + cg - ad}{(nL_2 + f)c - bd}$$

Gdy $a = b = c$, to $k = 1$ i nie zależy od innych wymiarów; gdy $b = c$, to $k = a/b$. Wynika z tego, że dla dźwigów współczynnik oddziaływania odciażki leży w granicach $0 < k \leq 1$.

2. Wzory przybliżone

2.1. Pierwszy wzór przybliżony. Rozpatrzmy na razie pręt z momentem bezwładności $I = \text{const}$. Zastąpimy siłę zwrotną spowodowaną odciażką siłą zwrotną sprężyny (rys. 15). Wiemy, że siła zwrotna odciażki i linki do podnoszenia jest równa

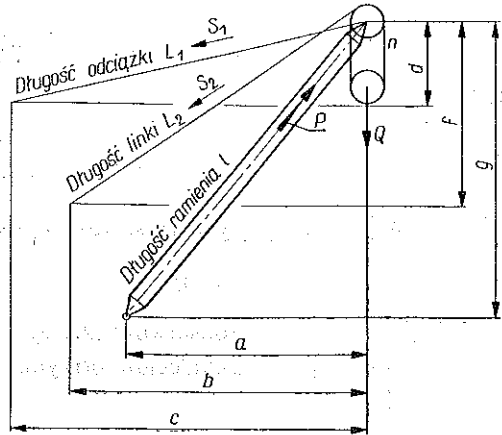
$$(2.1.1) \quad P_1 = \frac{S_1}{L_1} \delta + \frac{S_2}{L_2} \delta = k \frac{P}{l} \delta.$$

Dla sprężyny $P_1 = a\delta$, więc

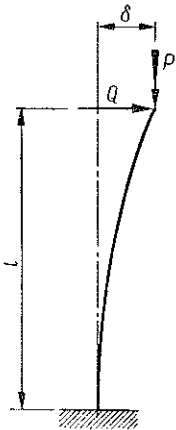
$$(2.1.2) \quad a = k \frac{P}{l}.$$

Dla przypadku z rys. 14 znany jest przybliżony wzór Timoszenki na ugięcie:

$$(2.1.3) \quad \delta = \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_0}}$$



Rys. 13



Rys. 14

W naszym przypadku

$$(2.1.4) \quad \delta_0 = \frac{Ql^3}{3EI}$$

oraz

$$(2.1.5) \quad P_0 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Gdy działa jeszcze sprężyna (rys. 15), to siła wypadkowa

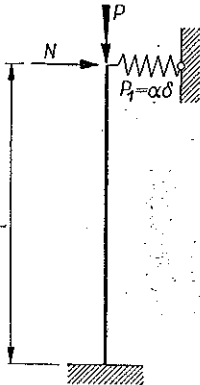
$$(2.1.6) \quad Q = N - \alpha\delta.$$

Podstawmy (2.1.6) do (2.1.4) i (2.1.4) do (2.1.3) po przekształceniu otrzymamy

$$(2.1.7) \quad \delta = \frac{N \frac{l^3}{3EI}}{1 - \frac{P}{P_0} + \alpha \frac{l^3}{3EI}}.$$

Aby otrzymać siłę krytyczną przyrównujemy mianownik do zera:

$$(2.1.8) \quad \frac{P}{P_0} = 1 + \alpha \frac{l^3}{3EI},$$



Rys. 15

a podstawiając (2.1.5) otrzymamy

$$(2.1.9) \quad P = P_0 + \alpha l \frac{\pi^2}{12}.$$

Dla pręta z odcieżką $\alpha = k \frac{P}{l}$; wtedy

$$(2.1.10) \quad P = \frac{P_0}{1 - \frac{\pi^2}{12} k}.$$

Wzór ten daje dobre przybliżenia dla $0 \leq k < 0,8$; dla $k > 0,8$ błąd gwałtownie rośnie i przy $k = 1$ wynosi około 40%. Ażeby dla $k = 1, P = 4P_0$ trzeba zastąpić $\pi^2/12$ przez $3/4$, wtedy uzyskamy wzór

$$(2.1.11) \quad P = \frac{P_0}{1 - \frac{3}{4} k},$$

który daje dobre przybliżenia dla $0 \leq k \leq 1$.

Ze wzoru (2.1.11) widzimy, że

$$\text{gdy } k = 0, \text{ to } P = P_0 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}; \quad \text{gdy } k = 1, \text{ to } P = P_1 = 4P_0 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Widzieliśmy w poprzednim punkcie, że dla każdego pręta, gdy $k = 0$, to $P = P_0$ oraz gdy $k = 1$, to $P = P_1$. Poszukamy teraz wzoru przybliżonego dla każdego pręta w postaci

$$(2.1.12) \quad P = \frac{A}{1 - Bk}.$$

Gdy $k = 0$, to $P = P_0 = A$, a gdy $k = 1$ to

$$(2.1.13) \quad P = P_1 = \frac{A}{1 - B}.$$

Stąd mamy $A = P_0$ oraz $B = 1 - P_0/P_1$. Podstawimy te wielkości do (2.1.12)

$$(2.1.14) \quad P = \frac{P_0}{1 - \left(1 - \frac{P_0}{P_1}\right)k}.$$

Biorąc pod uwagę, że $P_0 = m_0 \frac{EI}{l^2}$ oraz że $P_1 = m_1 \frac{EI}{l^2}$, $P = m \frac{EI}{l^2}$ otrzymamy:

$$(2.1.15) \quad m = \frac{m_0}{1 - \left(1 - \frac{m_0}{m_1}\right)k} \quad \text{dla } 0 \leq k \leq 1$$

(rys. 2, 4, 6, 8 i 10).

2.2. Drugi wzór przybliżony. W brytyjskiej normie B.S. 2573 podany jest przybliżony wzór dla pręta, gdy $I = \text{const}$:

$$(2.1.16) \quad \mu = 2 - k \quad \text{dla } 0 \leq k \leq 1,1,$$

gdzie μ jest wzięte ze wzoru $P = \pi^2 EI/(\mu l)^2$. Dla $k = 0$, $\mu = \mu_0 = 2$ oraz dla $k = 1$, $\mu = \mu_1 = 1$.

Poszukamy teraz wzoru przybliżonego dla każdego pręta w postaci:

$$(2.1.17) \quad \mu = C - Dk.$$

Wiemy, że gdy $k = 0$, to $\mu = \mu_0 = C$, a gdy $k = 1$, to $\mu = C - D$. Stąd

$$(2.1.18) \quad C = \mu_0, \quad D = \mu_0 - \mu_1.$$

Podstawiliśmy te wielkości do (2.1.17):

$$(2.1.19) \quad \mu = \mu_0 - (\mu_0 - \mu_1)k \quad \text{dla } 0 \leq k \leq 1,1.$$

Aby używać wzorów (2.1.15) i (2.1.19), musimy mieć μ_0 albo m_0 i μ_1 albo m_1 . Wartości te można znaleźć w kalendarzach technicznych (rys. 2, 4, 6, 8 i 10).

Literatura cytowana w tekście

1. Коган, *Строительные башенные краны*, Москва 1964.
2. S. TIMOSHENKO, GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Warszawa 1963.

3. Гохберг, *Металлические конструкции подъемно-транспортных машин*, Москва 1964.
4. EDEN WOOD, *Stiffness of a Crane Jib*, The Engineer, July 29, 1960.
5. B.S. 2573, Part 1 (Brytyjska Norma).
6. В. И. Феодосьев, *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*, Москва 1950, зад. 91 и 92.
7. ROSMAN, *Österr. Ing-Zeitschr.*, 3, 1960, 173-174.
8. Коробов, *К расчету на устойчивость стрел, подвешенных на гибкой нити*, Механизация строительства, 2, 1952.
9. Коган, *Устойчивость сжатых стрел переменного сечения*, Строительное и дорожное машиностроение, 9, 1956.

Резюме

КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА СРЕЛЫ ПОДЪЕМНОГО КРАНА ПРИ ВЫПУЧИВАНИИ ИЗ ПЛОСКОСТИ ПОДВЕСКИ

Критическая сила стрелы крана с оттяжкой при выпучивании из плоскости подвески, еще не так давно определялась так, как и для стержня заземленного в одном конце и свободного в верхнем конце. При этом, не учитывалась, что при отклонении стрелы, отклоняется также и оттяжка создавая добавочную силу, которая увеличивает критическую силу. Случай нагрузки стрелы с посредством каната (т.е. силой, которая после потери устойчивости действует по направлению к некоторой фиксированной точке) обсуждают для постоянного момента инерции В. И. Феодосьев [6], для переменного момента инерции второй степени x — Р. Росман [7]. Случай для стрелы с оттяжкой с постоянным моментом инерции рассматривает Коробов [8], для переменного момента с второй степенью x Коган [9,1].

В этой работе рассматривается, также, случай такой стрелы с переменным моментом инерции с четвертой степенью x , со скачкообразно переменным моментом и частично переменным с второй степенью x .

Также, если коэффициент воздействия оттяжки $k = 0$, то стрела заземлена в бапмаке и свободна в верхнем конце и, когда $k = 1$ тогда оттяжка так влияет на поведение стержня, как будто бы она опиралась на двух опорах.

На этом основании получаем две приближенные формулы, которые могут найти практическое применение для вычислений критической нагрузки действующей на стрелу.

Вторая приближенная формула является обобщением формулы, приведенной английским стандартом B. S. 2573, Part I для подъемного крана со стрелой с постоянным моментом инерции.

Summary

CRITICAL FORCE OF LUFFING CRANE ARM (JIB) FOR BUCKLING OUT OF THE PLANE OF SUSPENSION

The usual method for computing the critical force of a bar with luffing rope for buckling out of the plane of suspension was, until recently, the same as for a bar fixed at its lower end the upper end remaining free. The fact that the luffing rope is deflected if the arm (jib) is deflected was not considered thus producing a restoring force, which increases the critical force. The case in which the bar is loaded by means of a cable (rope) (that is by a force turned, after buckling, towards a fixed point) was discussed for a constant moment of inertia by W. J. FEODOSYEV [6] and for

a moment of inertia variable with the square of x — by R. ROSMAN [7]. The case of a bar with luffing rope and with a constant moment of inertia was considered by KOROBV [8] and with a moment variable with the square of x — by KOGAN [9] and [1].

The problems considered in the present paper are those of the same bar having a moment of inertia variable with the fourth power of x , a moment variable in a jump-like manner and a moment partially constant, partially variable with the square of x .

It will be seen that if the coefficient of influence of the luffing rope is $k=0$ the bar is clamped at the lower and free at the upper end and if $k = 1$ the luffing rope influences the behaviour of the bar in such a manner that it behaves as if it were resting on two supports.

On this basis two approximate equations are obtained. These equations can be used in practice for the determination of the critical force in the crane arm (jib).

The second of these equations is a generalization of the equation recommended by the British Standard B.S. 2573, Part 1 for a crane with constant moment of inertia.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1965 r.
