

ZNISZCZENIE KRUCHE PRĘTÓW MIMOŚRODOWO ROZCIĄGANYCH PRZY UWZGLĘDNIENIU PEŁZANIA USTALONEGO

MARCIN CHRZANOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Wprowadzenie czasu rzeczywistego do rozważań nad zachowaniem się konstrukcji obciążonej siłami zewnętrznymi zamienia statyczne warunki poprawnego jej zaprojektowania na warunki quasi-statyczne. Warunek nieprzekroczenia określonych przemieszczeń zastępuje się warunkiem nieprzekroczenia danych prędkości przemieszczeń, a warunek, aby naprężenia (lub wybrany niezmiennik stanu naprężenia) były mniejsze od danych, przechodzi w warunek, aby miały one w chwili $t = 0$ taką wartość, dla której czas zniszczenia konstrukcji będzie większy od projektowanego czasu jej pracy. O ile wyznaczenie prędkości przemieszczeń może być wykonane stosunkowo prosto przez wprowadzenie prędkości odkształceń do związków fizycznych i przez zróżniczkowanie względem czasu równań Cauchy'ego, o tyle określenie czasu zniszczenia wymaga wprowadzenia dodatkowego związku opisującego proces niszczenia.

Brak teorii fizycznej, opartej np. na znajomości molekularnej struktury materii, a przy tym przydatnej z punktu widzenia techniki, spowodował, że dotychczasowe prace w tym kierunku opierają się na teoriach fenomenologicznych. Teorie te, z natury swojej mało ogólne, odnoszą się nie tylko do konkretnych materiałów, ale i do określonych warunków pracy konstrukcji (np. temperatury, wyężenia). W pracy niniejszej oparto się na znajdującej dobre potwierdzenie doświadczalne dla metali teorii zaproponowanej w roku 1952 przez E. L. ROBINSONA [11], a następnie niezależnie sformułowanej w roku 1958 przez Ł. M. KACZANOWA [4] i rozwiniętej w jego dalszych pracach (np. [5 i 6]). Dla jednoosiowego stanu naprężenia stopień zniszczenia w dowolnej chwili t jest określony przez wielkość skalarną ψ tak zdefiniowaną, że w chwili $t = 0$ $\psi = 1$, a w chwili zniszczenia $t = t_z$ $\psi = 0$. Wielkość ψ wiąże się z maksymalnym naprężeniem rozciągającym σ_x :

$$(1.1) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\max \sigma_x}{\psi} \right)^m,$$

gdzie A i m są stałymi materiałowymi.

Dla jednoosiowego ale niejednorodnego stanu naprężenia (jak to ma miejsce w przypadku mimośrodowego rozciągania) można w procesie niszczenia wyróżnić dwa etapy:

$0 \leq t < t_1$, gdy pracuje cały przekrój poprzeczny pręta (t_1 oznacza czas pęknięcia pierwszych włókien).

$t_1 < t \leq t_z$, gdy na skutek zniszczenia części przekroju następuje redystrybucja naprężeń (jeśli obciążenie zewnętrzne jest stałe), prowadząca szybko w stosunku do czasu trwania pierwszego etapu do całkowitego zniszczenia w chwili t_z . Czas ten można określić znając ruch frontu zniszczenia, tj. krzywej, na której $\psi = 0$.

Dla $0 \leq t < t_1$ $\sigma_x = \text{const}$ i całka równania (1.1) przy warunku początkowym $\psi = 1$ dla $t = 0$ ma postać

$$(1.2) \quad 1 - \psi^{m+1} = A(m+1)(\max \sigma_x)^m t.$$

Wykorzystanie warunku $\psi = 0$ dla $t = t_1$ pozwala określić czas powstania pierwszych spękań:

$$(1.3) \quad t_1 = \frac{1}{A(m+1)(\max \sigma_x)^m}.$$

Tak więc na tym etapie zadanie sprowadza się do znalezienia rozkładu naprężeń normalnych σ_x .

W prezentowanej pracy jako kryterium zniszczenia przyjęto właśnie czas t_1 powstania pierwszych spękań. Takie przyjęcie jest z jednej strony wygodne ze względu na duże trudności matematyczne, jakie wynikają przy rozważaniu procesu niszczenia w etapie drugim $t_1 < t \leq t_z$ (por. [8], str. 133 – 137), a z drugiej — wyniki otrzymane na jej podstawie dają niewielki błąd (z niedomiarem) w ocenie rzeczywistego czasu pracy konstrukcji. Szczegółową analizę stosunku t_z/t_1 przeprowadzono w pracy [2] dla pręta o przekroju prostokątnym, wykazując, że jest on bliski jedności.

Przyjmujemy następujące założenia: 1) przemieszczenia są małe, 2) zachowana jest zasada płaskich przekrojów, 3) materiał jest nieściśliwy i izotropowy, 4) nie uwzględnia się odkształceń sprężystych oraz 5) proces pełzania jest ustalony w całym przedziale czasu $0 \leq t < t_1$ i spełniony jest związek fizyczny Odqvista [7]:

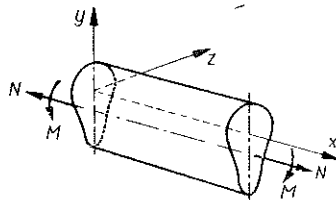
$$(1.4) \quad \sigma_x = \sigma_0 |\varepsilon_x|^{\frac{1-n}{n}} \varepsilon_x.$$

Przy tych założeniach problem wyznaczenia rozkładu naprężeń w przypadku mimośrodowego rozciągania był już rozważany ([9 i 10]), ale tylko dla pręta, którego przekrój poprzeczny ma dwie osie symetrii. W niniejszych rozważaniach przyjęto, że pręt ma tylko jedną oś symetrii, a moment zginający działa w płaszczyźnie przez nią przechodzącej. W takim przypadku wyznaczenie położenia osi obojętnej napotyka, jak wykazywano to w pracy [3], na poważne trudności, które tu udało się pokonać.

2. Podstawowe zależności

Dla pręta poddanego równoczesnemu działaniu momentu zginającego i siły osiowej (rys. 1) można, wykorzystując analogię sprężysto-lepkosprężystą, przyjąć następujący rozkład prędkości przemieszczeń:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u &= \kappa xy + \mu x, \\ v &= -\frac{1}{4}\kappa(2x^2 + y^2 - z^2) - \frac{1}{2}\mu y, \\ w &= -\frac{1}{2}\kappa yz - \frac{1}{2}\mu z. \end{aligned}$$



Rys. 1

Układ współrzędnych jest tak przyjęty, że oś z pokrywa się z osią obojętną przy czystym zginaniu, κ oznacza prędkość zmiany krzywizny osi obojętnej czystego zginania oraz μ prędkość zmiany wydłużenia osi pręta.

Wykorzystując równania Cauchy'ego i związek fizyczny, otrzymamy

$$(2.2) \quad \sigma_x = \sigma_c |1 + q\eta|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn}(1 + q\eta),$$

gdzie $\sigma_c = \sigma_0 \mu^{1/n}$, $q = \kappa h_2 / \mu$, $\eta = y/h_2$, $-1 \leq \eta \leq h_1/h_2 = \varphi$, a h_2 ; y określono na rys. 2.

W zależności od stosunku momentu zginającego do siły osiowej naprężenia normalne σ_x mogą być: 1) jednego znaku (dodatnie); przypadek ten nazwiemy przypadkiem małego mimośrod; 2) różnych znaków: przypadek dużego mimośrod. Oba te przypadki są określone przez odpowiednie, graniczne wartości parametru q , których analizę przeprowadzono w pracy [1]. Ostatecznie rozkład naprężeń w obu przypadkach można zapisać za pomocą następującego układu równości:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \text{dla } q \leq 1 \quad \sigma_x &= \sigma_c (1 + q\eta)^{1/n}, \\ \text{dla } q > 1 \quad \sigma_x &= \begin{cases} \sigma_c (1 + q\eta)^{1/n}, & \text{jeśli } \eta > \eta^*; \\ -\sigma_c (-1 - q\eta)^{1/n}, & \text{jeśli } \eta < \eta^*, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \eta^* = -\frac{1}{q}$$

określa położenie osi obojętnej.

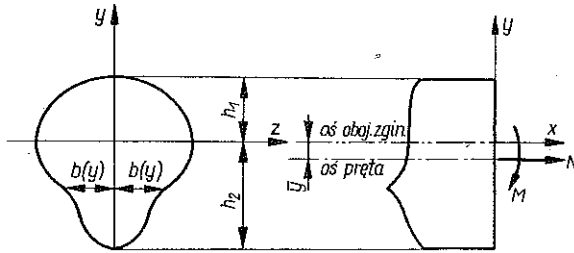
W równaniach (2.3) nieznanne są σ_c i q . Dla ich wyznaczenia mamy do dyspozycji dwa całkowite równania równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych:

$$(2.5) \quad \iint_F \sigma_x dF = N, \quad \iint_F \sigma_x y dF = \bar{M},$$

gdzie

$$\bar{M} = M + N\bar{y},$$

a \bar{y} oznacza różnicę odległości pomiędzy osią pręta a osią obojętną przy czystym zginaniu. W przypadku pokazanym na rys. 2, gdy oś pręta leży poniżej osi obojętnej czystego zginania, \bar{y} ma wartość ujemną.



Rys. 2

Do rozwiązania układu (2.5) zastosowano metodę szeregów potęgowych, co wobec alternatywnego zapisu naprężeń (2.3) wymaga osobnego rozważenia przypadków małego i dużego mimośrod.

3. Przypadek małego mimośrodu $q < 1$

Przypadek ten był już szczegółowo omówiony przez autora w pracy [1]. Rozwijając funkcję $(1+q\eta)^{1/n}$ w szereg potęgowy, co było możliwe przy dodatkowym założeniu

$$(3.1) \quad \varphi < 1,$$

oraz opisując kontur przekroju poprzecznego pręta szeregiem

$$(3.2) \quad b(y) = \sum_{j=0}^s b_j y^j,$$

gdzie s jest naturalne (może być $s = \infty$), wyrażono parametr geometryczny q przez obciążenie zewnętrzne:

$$(3.3) \quad q = \sum_{i=1}^{\infty} E_i (\Delta - 10\bar{\eta})^i,$$

gdzie

$$(3.4) \quad \Delta = \frac{10\bar{M}}{h_2 N}$$

oraz

$$(3.5) \quad \bar{\eta} = \frac{\bar{y}}{h_2},$$

a E_i są stałymi współczynnikami. Pozwoliło to na określenie rozkładu naprężeń normalnych:

$$(3.6) \quad \sigma_x = \frac{N}{2 \sum_{i=0}^{\infty} B_i q^i} (1+q\eta)^{1/n}$$

lub

$$\sigma_x = \frac{\bar{M}}{2h_2 \sum_{i=0}^{\infty} A_i q^i} (1+q\eta)^{1/n}.$$

Maksymalne naprężenie rozciągające jest dla $\eta = \varphi$. Wykorzystując (1.3) otrzymamy

$$(3.7) \quad t_1 = \frac{\left(2 \sum_{i=0}^{\infty} B_i q^i\right)^m}{A(m+1) N^m (1+q\varphi)^{m/n}},$$

lub

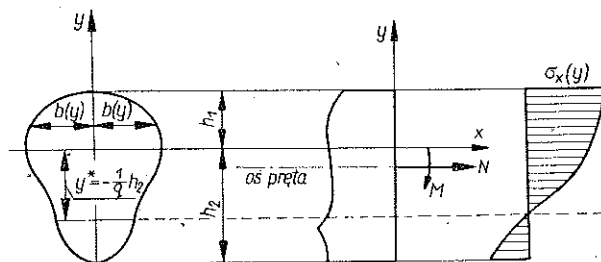
$$t_1 = \frac{\left(2h_2 \sum_{i=0}^{\infty} A_i q^i\right)^m}{A(m+1) \bar{M}^m (1+q\varphi)^{m/n}}.$$

4. Przypadek dużego mimośrodowego $q > 1$

Dla dużego mimośrodowego naprężenia w przekroju są różnych znaków (rys. 3), co prowadzi do rozbicia całek po powierzchni przekroju w równaniach (2.5) na dwie całki:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} N &= \iint_{F_2} -\sigma_c (-1 - q\eta)^{1/n} dF + \iint_{F_1} \sigma_c (1+q\eta)^{1/n} dF = \\ &= 2\sigma_c h_2 \left[\int_{-1}^{-\frac{1}{q}} -(-1 - q\eta)^{1/n} b(\eta) d\eta + \int_{-\frac{1}{q}}^{\varphi} (1+q\eta)^{1/n} b(\eta) d\eta \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \iint_{F_2} -\sigma_c (-1 - q\eta)^{1/n} h_2 \eta dF + \iint_{F_1} \sigma_c (1+q\eta)^{1/n} h_2 \eta dF = \\ &= 2\sigma_c h_2^2 \left[\int_{-1}^{-\frac{1}{q}} -(-1 - q\eta)^{1/n} b(\eta) d\eta + \int_{-\frac{1}{q}}^{\varphi} (1+q\eta)^{1/n} b(\eta) d\eta \right]. \end{aligned}$$



Rys. 3

Opisując jak poprzednio kontur przekroju szeregiem (3.2) i wykonując całkowanie przez części, otrzymamy po prostych przekształceniach

$$\frac{1}{2\sigma_c} q^{-\frac{1}{n}} N = \sum_{j=0}^s b_j \left\{ \sum_{i=0}^j \left(\prod_{k=1}^{i+1} \frac{n}{kn+1} \right) i! \binom{j}{i} (-1)^{j-i} h_2^{\frac{(j+1)n+1}{n}} \times \right. \\ \left. \times \left[\varphi^{\frac{(j+1)n+1}{n}} (-1)^{2i-j} \left(1 + \frac{1}{q\varphi} \right)^{\frac{(i+1)n+1}{n}} - \left(1 - \frac{1}{q} \right)^{\frac{(i+1)n+1}{n}} \right] \right\}, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2\sigma_c} q^{-\frac{1}{n}} M = \sum_{j=0}^s b_j \left\{ \sum_{i=0}^{j+1} \left(\prod_{k=1}^{i+1} \frac{n}{kn+1} \right) i! \binom{j}{i} (-1)^{j+1-i} h_2^{\frac{(j+2)n+1}{n}} \times \right. \\ \left. \times \left[\varphi^{\frac{(j+2)n+1}{n}} (-1)^{2i-j-1} \left(1 + \frac{1}{q\varphi} \right)^{\frac{(i+1)n+1}{n}} - \left(1 - \frac{1}{q} \right)^{\frac{(i+1)n+1}{n}} \right] \right\}.$$

Rozwinięcie w szeregi potęgowe występujących tu wyrażeń typu $\left(1 + \frac{1}{q\varphi} \right)^\alpha$ jest możliwe, gdy $q\varphi > 1$, co wobec warunku (3.1) prowadzi do silniejszego ograniczenia wielkości granicznej parametru q :

$$(4.3) \quad q > \frac{1}{\varphi}.$$

Oznaczając

$$(4.4) \quad p = \frac{1}{q}$$

i rozwijając wyrażenia typu $\left(1 + \frac{p}{\varphi} \right)^\alpha$ i $(1-p)^\alpha$ otrzymamy

$$(4.5) \quad \frac{1}{2\sigma_c} q^{-\frac{1}{n}} N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k p^k,$$

gdzie

$$N_k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s b_j h_2^{\frac{(j+1)n+1}{n}} \left\{ \sum_{i=0}^{j+1} \left(\prod_{\alpha=1}^{i+1} \frac{n}{\alpha n+1} \right) \left(\prod_{\beta=i+1}^{i-k+2} \frac{\beta n+1}{n} \right) i! \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \times \right. \\ \left. \times \left[\varphi^{\frac{(j+1-k)n+1}{n}} (-1)^{2i-j+(-1)^{k+1}} \right] \right\}$$

oraz

$$(4.6) \quad \frac{1}{2\sigma_c h_2} q^{-\frac{1}{n}} M = \sum_{k=0}^{\infty} M_k p^k,$$

gdzie

$$M_0 = \sum_{j=0}^s b_j h_2^{\frac{(j+1)n+1}{n}} \left\{ \sum_{i=0}^{j+1} \left(\prod_{\alpha=1}^{i+1} \frac{n}{\alpha n+1} \right) i! \binom{j+1}{i} (-1)^{j+1-i} \times \right. \\ \left. \times \left[\varphi^{\frac{(j+2)n+1}{n}} (-1)^{2i-j-1} - 1 \right] \right\},$$

$$M_k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s b_j h_2^{\frac{(j+1)n+1}{n}} \left\{ \sum_{i=0}^{j+1} \left(\prod_{\alpha=1}^{i+1} \frac{n}{\alpha n+1} \right) \left(\prod_{\beta=i+1}^{i-k+2} \frac{\beta n+1}{n} \right) i! \binom{j+1}{i} (-1)^{j+1-i} \times \right. \\ \left. \times \left[\varphi^{\frac{(j+2-k)n+1}{n}} (-1)^{2i-j-1+(-1)^{k+1}} \right] \right\} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

We wzorach (4.5) i (4.6) nieznane są wielkości σ_c i p . Aby je wyznaczyć, utwórzmy iloraz

$$(4.7) \quad \delta = \frac{h_2 N}{10 \bar{M}} = \frac{1}{\Delta} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} N_k p^k}{10 \sum_{k=0}^{\infty} M_k p^k}.$$

Wykonując dzielenie szeregów otrzymamy

$$(4.8) \quad \delta = \sum_{k=1}^{\infty} L_k p^k,$$

gdzie

$$L_k = \frac{1}{M_0} \left(\frac{N_k}{10} - \sum_{j=1}^k M_j L_{k-j} \right).$$

Funkcję $p = p(\delta)$ znajdziemy odwracając szereg (4.8)

$$(4.9) \quad p = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \delta^i,$$

gdzie

$$P_1 = \frac{1}{L_1}, \quad P_2 = -\frac{L_2}{L_1} P_1^2, \quad P_3 = -\frac{1}{L_1} [2L_2 P_1 P_2 + L_3 P_1^3], \dots$$

Znając p możemy wyznaczyć σ_c z (4.2)₁ lub (4.2)₂, a następnie określić rozkład naprężeń normalnych:

$$(4.10) \quad \sigma_x = \begin{cases} \frac{q^{-\frac{1}{n}} N}{2 \sum_{k=1}^{\infty} N_k p^k} (1+q\eta)^{1/n} & \text{dla } -\frac{1}{q} < \eta \leq \varphi, \\ -\frac{q^{-\frac{1}{n}} N}{2 \sum_{k=1}^{\infty} N_k p^k} (-1-q\eta)^{1/n} & \text{dla } -1 \leq \eta \leq -\frac{1}{q} \end{cases}$$

lub

$$(4.11) \quad \sigma_x = \begin{cases} \frac{q^{-\frac{1}{n}} \bar{M}}{2h_2 \sum_{k=0}^{\infty} M_k p^k} (1+q\eta)^{1/n} & \text{dla } -\frac{1}{q} < \eta \leq \varphi, \\ -\frac{q^{-\frac{1}{n}} \bar{M}}{2h_2 \sum_{k=0}^{\infty} M_k p^k} (-1-q\eta)^{1/n} & \text{dla } -1 \leq \eta < -\frac{1}{q}. \end{cases}$$

Przyjmując tu $\eta = \varphi$, aby wyznaczyć maksymalne naprężenie rozciągające i wykorzystując (1.3), otrzymamy czas powstania pierwszych spękań:

$$(4.12) \quad t_1 = \frac{\left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} N_k p^k \right\}^m}{A(m+1) N^m \left(1 + \frac{p}{\varphi} \right)^{m/n} h_1^{m/n}},$$

lub wykorzystując (4.11)

$$(4.13) \quad t_1 = \frac{\left\{ 2h_2 \sum_{k=0}^{\infty} M_k p^k \right\}^m}{A(m+1) \bar{M}^m h_1^{m/n} \left(1 + \frac{p}{\varphi} \right)^{m/n}}.$$

Przejście graniczne $N \rightarrow 0$ pozwala określić czas powstania pierwszych spękań dla pręta o jednej osi symetrii przy czystym zginaniu. Gdy $N \rightarrow 0$, to

$$p = \frac{\mu}{\alpha h_2} \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \bar{M} = M + N\bar{y} \rightarrow M.$$

Wówczas

$$(4.14) \quad t_1 \rightarrow t_{1M} = \frac{\{2h_2 M_0\}^m}{A(m+1) M^m h^{m/n}}.$$

5. Interpolacja rozwiązania

Otrzymane powyżej rozwiązanie w postaci wzorów (3.7), (4.12) i (4.13) nie jest pełne. Potrafimy bowiem wyznaczyć funkcję $t_1 = t_1(q)$ tylko dla dwóch przedziałów zmiennej q : $0 \leq q < 1$ i $1/\varphi < q < \infty$, nie znamy zaś rozwiązania w przedziale $1 < q < 1/\varphi$.

Jest to konsekwencją faktu, że nie potrafimy określić funkcji $q = q(\Delta)$ w całym przedziale zmienności argumentu Δ : $10\bar{\eta} \leq \Delta < \infty$, a jedynie w przedziałach $(10\bar{\eta}, \Delta_{\max})$ i (Δ_{\min}, ∞) , gdzie Δ_{\max} i Δ_{\min} oznaczają odpowiednio największy i najmniejszy mimośród, przy którym będą zbieżne szeregi (3.3) i (4.9).

Ponadto wykorzystanie otrzymanych wzorów jest bardzo kłopotliwe, gdy wartości argumentów funkcji rozwiązań są bliskie wartościom granicznym, tzn. Δ jest bliskie Δ_{\max} dla małego lub Δ_{\min} dla dużego mimośrod, a q jest bliskie odpowiednio 1 lub $1/\varphi$. Szeregi występujące we wzorach (3.3) i (4.9) oraz (3.7), (4.12) i (4.13) są wówczas bardzo wolno zbieżne, co zwiększa pracochłonność obliczeń. Potrafimy natomiast wyznaczyć wartości funkcji rozwiązań i ich pochodnych na brzegach przedziałów ich określoności. Nasuwa to myśl, aby funkcje rozwiązań przybliżyć wielomianami skonstruowanymi jak przy interpolacji Hermite'a. Nie wystarczy tu przybliżyć jedynie funkcję $q = q(\Delta)$ wielomianem, a następnie znając q skorzystać ze wzorów (3.3) i (4.9) dla wyznaczenia czasu t_1 . Słaba zbieżność szeregów występujących w tych wzorach również sugeruje zastosowanie przybliżenia wielomianami. Przy ich określaniu korzystano z wyników pracy [12], stosując wprowadzone tam wzory dotyczące interpolacji Hermite'a.

5.1. Przybliżenie funkcji $q = q(\Delta)$. Funkcja $q = q(\Delta)$ jest określona równaniami (3.3) i (4.9), które po uwzględnieniu (4.4) można przedstawić w postaci

$$(5.1) \quad q = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} E_i (\Delta - 10\bar{\eta})^i & \text{dla } \Delta < \Delta_{\max}, \\ \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} P_i \left(\frac{1}{\Delta}\right)^i} & \text{dla } \Delta > \Delta_{\min}. \end{cases}$$

Podstawmy

$$(5.2) \quad \Delta - 10\bar{\eta} = \frac{x}{1-x}, \quad q = \frac{y}{1-y}.$$

Wobec $10\bar{\eta} \leq \Delta < \infty$ mamy $0 \leq x < 1$ oraz wobec $0 \leq q < \infty$ $0 \leq y < 1$. Po podstawieniu znajdziemy

$$y = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} E_i \left(\frac{x}{1-x}\right)^i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i \left(\frac{x}{1-x}\right)^i} & \text{dla } 0 \leq x < x_{\max}, \\ \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i \left[\frac{1-x}{x+10\bar{\eta}(1-x)}\right]^i} & \text{dla } x_{\min} < x < 1. \end{cases}$$

Wykonując wskazane działania otrzymamy

$$(5.3) \quad y = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \left(\frac{x}{1-x}\right)^i & \text{dla } x < x_{\max}, \\ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \left[\frac{1-x}{x+10\bar{\eta}(1-x)}\right]^i & \text{dla } x > x_{\min}, \end{cases}$$

gdzie

$$\varepsilon_i = E_i - \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j E_{i-j},$$

$$\sigma_i = -P_i - \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j P_{i-j}.$$

Obliczenie wartości funkcji y i jej n pochodnych na brzegach przedziału, tzn. dla $x = 0$ i $x = 1$ daje

$$(5.4) \quad y(0) = 0,$$

$$y^{(n)}(0) = n! \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} \varepsilon_i \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

oraz

$$(5.5) \quad y(1) = 1$$

$$y^{(n)}(1) = n! \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} \sigma_i (1 - 10\eta)^{n-i} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Możemy teraz funkcję $y = f(x)$ przybliżyć wielomianem $w_1(x)$, żądając zgodności wartości funkcji i jej pochodnych na brzegach przedziału z wartością i pochodnymi wielomianu w tych punktach.

Wielomian ten będzie miał postać

$$(5.6) \quad w_1(x) = \sum_{j=0}^{w_0+w_1-1} k_j x^j$$

gdzie w_0 oznacza liczbę warunków zgodności dla $x = 0$ oraz w_1 liczbę warunków zgodności dla $x = 1$. Współczynniki k_j tego wielomianu są określone następująco: dla $j = 0, 1, \dots, w_0 - 1$

$$k_j = \frac{y^{(j)}(0)}{j!},$$

co wobec (5.4) daje

$$k_0 = 0,$$

$$k_j = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} \varepsilon_i \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, w_0 - 1;$$

dla $j = w_0, w_0 + 1, \dots, w_0 + w_1 - 1$ współczynniki k_j określa się z układu równań:

$$\sum_{j=w_0}^{w_0+w_1-1} k_j = p_0,$$

$$\sum_{j=w_0}^{w_0+w_1-1} j k_j = p_1,$$

.....

$$\sum_{j=w_0}^{w_0+w_1-1} j(j-1)(j-2) \dots (j-w_1+2) k_j = p_{w_1-1},$$

gdzie

$$p_0 = y(1) - \sum_{j=0}^{w_0-1} k_j, \quad p_1 = y^{(1)}(1) - \sum_{j=0}^{w_0-1} jk_j, \dots,$$

$$p_{w_1-1} = y^{(w_1-1)}(1) - \sum_{j=0}^{w_0-1} j(j-1)(j-2)\dots(j-w_1+2)k_j.$$

5.2. **Przybliżenie funkcji $t_1 = t_1(q)$.** Funkcja $t_1 = t_1(q)$ jest określona równaniami (3.7), (4.12) i (4.13):

(5.7)

$$t_1 = \begin{cases} \frac{\left\{2 \sum_{i=0}^{\infty} B_i q^i\right\}^m}{A(m+1) N^m (1+q\varphi)^{m/n}} & \text{lub} & \frac{\left\{2h_2 \sum_{i=0}^{\infty} A_i q^i\right\}^m}{A(m+1) \bar{M}^m (1+q\varphi)^{m/n}} & \text{dla } q < 1 \\ \frac{\left\{2 \sum_{i=1}^{\infty} N_i p^i\right\}^m}{A(m+1) N^m h_1^{m/n} \left(1 + \frac{p}{\varphi}\right)^{m/n}} & \text{lub} & \frac{\left\{2h_2 \sum_{i=0}^{\infty} M_i p^i\right\}^m}{A(m+1) \bar{M}^m h_1^{m/n} \left(1 + \frac{p}{\varphi}\right)^{m/n}} & \text{dla } q > \frac{1}{\varphi}. \end{cases}$$

Wzory te zawierają oprócz zmiennej q związane z nią zmienne N bądź \bar{M} , których nie da się wyrugować. Tak więc możemy skonstruować funkcję $t_1 = t_1(q)$ tylko przy ustaleniu N lub \bar{M} . Ustalenie \bar{M} jest przypadkiem trudnym do praktycznego zrealizowania, gdyż oznacza takie dobieranie M i N , aby było $M+N\bar{y} = \text{const}$. Ograniczymy się więc do przypadku ustalonego N . Oznaczmy

(5.8)
$$\bar{t}_1 = \frac{N}{2} [A(m+1) t_1]^{1/m}.$$

Wówczas

(5.9)
$$\bar{t}_1 = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B_i q^i}{(1+q\varphi)^{1/n}} & \text{dla } q < 1, \\ \frac{\sum_{i=1}^{\infty} N_i \left(\frac{1}{q}\right)^i}{h_1^{1/n} \left(1 + \frac{1}{q\varphi}\right)^{1/n}} & \text{dla } q > \frac{1}{\varphi}. \end{cases}$$

Funkcje występujące w mianownikach wzorów (5.8) można rozwinąć w szeregi potęgowe

(5.10)
$$(1+q\varphi)^{1/n} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} q^i,$$

gdzie

$$a_{10} = 1,$$

$$a_{1i} = \frac{1}{i!} \left(\frac{\varphi}{n}\right)^i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - jn)$$

oraz

$$(5.11) \quad \left(1 + \frac{1}{q\varphi}\right)^{1/n} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \left(\frac{1}{q}\right)^i,$$

gdzie

$$a_{20} = 1,$$

$$a_{2i} = \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{n\varphi}\right)^i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - jn).$$

Podstawiając (5.10) do (5.9) i wykonując dzielenie szeregów otrzymamy

$$(5.12) \quad \bar{t}_1 = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} t_i q^i, \\ \sum_{i=0}^{\infty} T_i \left(\frac{1}{q}\right)^i, \end{cases}$$

gdzie

$$t_i = B_i - \sum_{j=1}^i a_{1j} t_{i-j}, \quad T_i = h_2^{-1/n} \left(N_i - \sum_{j=1}^i a_{2j} T_{i-j}\right).$$

Wprowadźmy tu podstawienie (5.2)₂; wówczas

$$(5.13) \quad \bar{t}_1 = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} t_i \left(\frac{y}{1-y}\right)^i, \\ \sum_{i=0}^{\infty} T_i \left(\frac{1-y}{y}\right)^i. \end{cases}$$

Obliczenie wartości funkcji i jej pochodnych na brzegach daje

$$(5.14) \quad \bar{t}_1(0) = B_0,$$

$$\bar{t}_1^{(n)}(0) = n! \sum_{i=0}^n \binom{n-1}{i-1} t_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots$$

oraz

$$(5.15) \quad \bar{t}_1(1) = 0,$$

$$\bar{t}_1^{(n)}(1) = (-1)^n n! \sum_{i=0}^n \binom{n-1}{i-1} T_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots$$

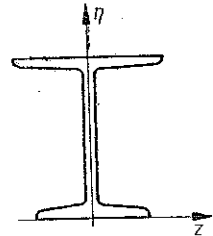
Funkcję $\bar{t}_1 = \bar{t}_1(y)$ dla ustalonego N możemy opisać wielomianem

$$(5.16) \quad w_2(y) = \sum_{j=0}^{w_0+w_1-1} \tau_j y^j.$$

Współczynniki τ_j określa się analogicznie jak współczynniki k_j .

6. Zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej

Przedstawione rozwiązanie analityczne posiada szereg braków, które rzutują na pracochłonność wykonywanych obliczeń. Przede wszystkim nie każdy kontur przekroju poprzecznego pręta da się łatwo przedstawić za pomocą szeregu potęgowego. Tak np., chcąc opisać kontur przekroju, pokazanego na rys. 4, trzeba by uwzględnić dużą liczbę współczynników b_j (duże s), a to komplikuje obliczenia współczynników wszystkich szeregów.



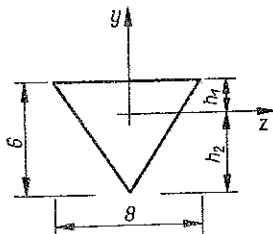
Rys. 4

Podane rozwiązanie jest poprawne dla $10\eta \leq \Delta < \Delta_{\max}$ $\Delta_{\min} < \Delta < \infty$. Powoduje to konieczność aproksymacji (i to dwukrotnie: dla funkcji $q = q(\Delta)$ i $t_1 = t_1(q)$), a więc dodatkowo zwiększa ilość obliczeń.

Trudności te spowodowały, że skorzystano z możliwości, jakie daje zastosowanie maszyn cyfrowych. Według wzorów wyprowadzonych w punktach 3 i 4 opracowano program na maszynę cyfrową Elliott 803-B (1). Pzwala on na numeryczne wyznaczanie wartości μ i κ , a następnie na określenie czasu powstania pierwszych spękań oraz rozkładu naprężeń normalnych.

7. Przykład liczbowy

Dany jest pręt o kształcie i wymiarach w (cm), pokazanych na rys. 5. Stałe materiałowe dla stali węglowej w temperaturze ok. 450°C [8] wynoszą:



Rys. 5

$$n = 5, \quad m = 3, \quad A = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^{2m} \text{ kG}^{-m} \text{ godz}^{-1}.$$

Skonstruowano wielomiany $w_1(x)$ i $w_2(y)$ korzystając zarówno z wyprowadzonych wzorów analitycznych, jak i z programu na maszynę cyfrową. Przy obliczeniach za pomocą szeregów uwzględniano do pięciu wyrazów każdego szeregu.

Wielkość h_2 wyliczano drogą kolejnych przybliżeń, a następnie wynik sprawdzono przy użyciu maszyny cyfrowej:

$$h_2 = 4,1833 \text{ cm}, \quad h_1 = 1,8167 \text{ cm}, \quad \varphi = 0,4343.$$

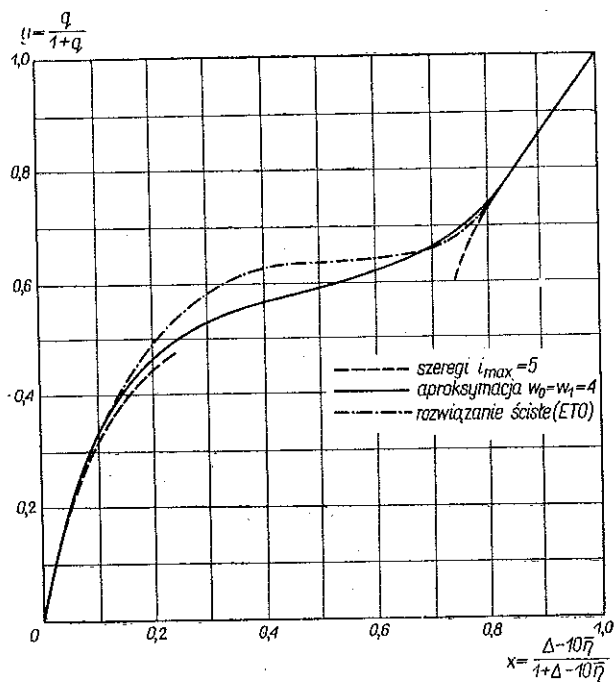
Wyrazy kolejnych szeregów zestawiono w tabelcy 1, a wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 6 i 7. Na rys. 6 pokazano wykresy funkcji $y = y(x)$ uzyskane przy użyciu szeregów w przedziałach ich zbieżności i aproksymacji wielomianem 7 stopnia ($w_0 = w_1 = 4$), który ma postać:

$$w_1(x) = 1 - 1,357(1-x) - 0,791(1-x)^2 + 2,309(1-x)^3 + 27,030(1-x)^4 - 78,494(1-x)^5 + 76,133(1-x)^6 - 25,830(1-x)^7$$

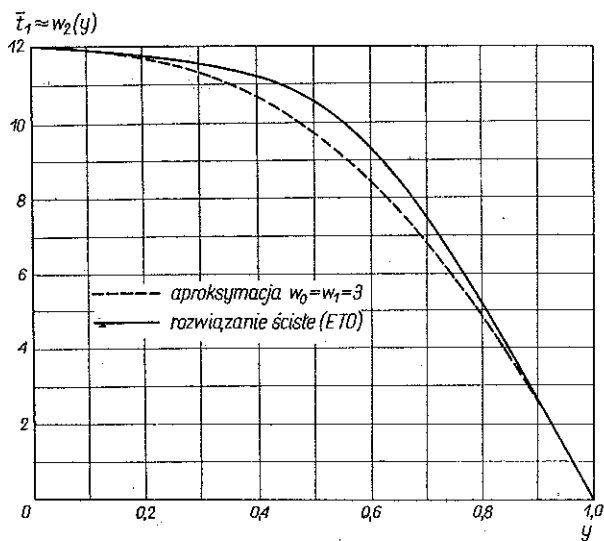
(1) Program w autokodzie Mark 3 został sporządzony przez mgra Zbigniewa CYLKOWSKIEGO z Katedry Metod Numerycznych Uniwersytetu Wrocławskiego.

Tablica I

i	Obliczenia pomocnicze				Mały mimosród						Duży mimosród					
	a_i	a_{1i}	a_{2i}		A_i	B_i	D_i	E_i	ε_i	M_i	N_i	L_i	P_i	σ_i		
0	1,000	1,000	1,000		-0,526	12,000	-0,438			3,670	0,000	0,000				
1	0,200	0,087	0,460		0,279	-0,105	0,228	4,375	4,375	0,000	27,043	0,737	1,357	-1,357		
2	-0,080	-0,015	-0,424		0,035	-0,111	0,027	-2,297	-21,438	-10,817	-9,998	-0,272	0,681	1,160		
3	0,048	0,004	0,585		0,021	-0,021	0,019	-9,430	94,412	5,999	-3,158	2,086	-6,391	5,741		
4	-0,034	-0,001	-0,995		0,009	-0,015	0,007	8,203	-412,836	2,210	3,332	-1,917	8,070	-9,172		
5	0,025	0,000	1,616		0,005	-0,007	0,005	16,797	1801,070	-2,532	-3,912	6,044	63,200	58,203		



Rys. 6



Rys. 7

oraz rozwiązanie ścisłe (przy dokładności względnej $E = 0,0005$), uzyskane na podstawie obliczeń na maszynie cyfrowej.

Rysunek 7 przedstawia aproksymację funkcji $\bar{t}_1 = \bar{t}_1(q)$ wielomianem $w_2(y)$ piątego stopnia ($w_0 = w_1 = 3$),

$$w_2(y) = 12,000 - 1,149y - 0,980y^2 - 8,886y^3 - 10,705y^4 + 9,720y^5,$$

oraz rozwiązanie ścisłe.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że stosujemy tu aproksymację dwu funkcji opisujących dwa różne jakościowo zjawiska (w przekroju występują bądź tylko naprężenia rozciągające, bądź zarówno rozciągające jak i ściskające) za pomocą jednego wielomianu. Na skutek tego jak również w związku ze skomplikowanym kształtem krzywej rozwiązania ścisłego, rząd wielomianu aproksymacyjnego musi być stosunkowo wysoki, aby przybliżenie było dostatecznie dobre. Ponadto dla innych kształtów przekroju poprzecznego (a w szczególności dla tych, dla których φ jest jeszcze mniejsze niż w niniejszym przykładzie) należy przeprowadzić szczegółową analizę funkcji $y = y(x)$ w otoczeniu punktów $x = 0$ i $x = 1$ w celu właściwego doboru ilości warunków w_0 i w_1 oraz ich wzajemnego stosunku (2).

Literatura cytowana w tekście

1. M. CHRZANOWSKI, *Czas zniszczenia pręta rozciąganego przy małym mimośrodzie*, Czasopismo Techn., z. 9-B (111), 1967.
2. M. CHRZANOWSKI, *Zniszczenie kruche w warunkach pełzania ustalonego przy jednoosiowym niejednorodnym stanie naprężenia*, Dysertacja doktorska, Politechnika Krakowska, 1967.
3. M. CHRZANOWSKI, *Pewne problemy zniszczenia kruchego prętów zginanych w warunkach pełzania ustalonego*, Czasopismo Techn., w druku.
4. Л. М. Качанов, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изв. АН СССР, ОТН 8, 1958.
5. Л. М. Качанов, *Время разрушения в условиях ползучести*, В сб. «Проблемы механики сплошной среды», К 70-летию Н. И. Мусхелишвили, Изд. АН СССР, 1961.
6. Л. М. Качанов, *Некоторые вопросы разрушения в условиях ползучести*, В сб. «Ползучесть и длительная прочность», Изд. Сиб. Отд. АН СССР, Новосибирск 1963.
7. F. K. G. ODQVIST, *Engineering Theories of Metallic Creep*, Symposium su la Plasticita nell Scienza delle Costruzioni, Varenna, Settembre 1956.
8. F. K. G. ODQVIST, *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*, Oxford 1966.
9. S. ПЕЧНИК, *Combined Tension Bending Creep for a Solid Bar*, Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, № 194, 1962.
10. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкций*, Изд. Наука, Москва 1966.
11. E. L. ROBINSON, *Effect of Temperature Variation on the Longtime Rupture Strength of Steels*, Trans. ASME, 74, Nr 5, 1952.
12. M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sił krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozprawy Inżynierskie, 3, 4, 1956.

(2) Autor pragnie tą drogą podziękować Profesorowi Michałowi ŻYCZKOWSKIEMU i Docentowi Stefanowi ПЕЧНИКОВИ za liczne cenne uwagi krytyczne i naświetlenie szeregu problemów jakie wynikły w trakcie rozwiązywania przedstawionego zagadnienia.

Резюме

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ РАСТЯГИВАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ,
ПРИ УЧЕТЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В работе, на основе гипотезы хрупкого разрыва, предложенной Л. М. Качановым, определяется время возникновения первых трещин в призматическом стержне, нагруженном растягивающей осевой силой и изгибающим моментом. Поперечное сечение стержня имеет только одну ось симметрии. В качестве физического закона, используется зависимость, предложенную Ф. К. Г. Одквистом, описывающую установившуюся ползучесть.

Для решения основной системы интегральных уравнений статики, применяются степенные ряды, описывая ними, как распределение напряжений, так и контур поперечного сечения стержня.

Полученное, таким образом, решение, требовало проведения добавочной интерполяции, которую выполнено, на основе формул, приведенных в работе [12].

Кроме того, задача решается при помощи счетной машины, что позволило на некоторую оценку аналитических погрешностей приближенных решений.

Приводится числовой пример для эксцентрического растяжения стержня с треугольным поперечным сечением. Расчеты приводились, на основании выведенных формул и на счетной машине.

Summary

BRITTLE FAILURE OF RODS STRETCHED ECCENTRICALLY WITH TAKING
ACCOUNT STEADY CREEP

The time of arising initial fractures in a prismatic rod has been determined on the basis of the brittle failure hypothesis proposed by L. M. Kachanov. The rod is loaded with axial force and bending moment. The rod cross-section has only one axis of symmetry. The relation given by F. K. G. Odquist which described a steady creep has been applied as a physical law.

Power series has been used to solve the fundamental set of integral equations of statics. These series describe both the stress distribution and the contour of the rod cross-section.

The solution thus obtained required an additional interpolation which has been performed on the basis of the formulae given in [12]. The problem has been also solved on a digital computer and these computations allowed to compare the analytical approximate solutions.

A numerical example is given for the stretched rod of triangular cross-section. The calculations has been performed both on the basis of derived formulae and using digital computer.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI
I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji 22 maja 1968 r.