

O RUCHU CZĘŚCIOWO BEZINERCYJNEGO ZACHOWAWCZEGO UKŁADU
MECHANICZNEGO

ANDRZEJ SZADKOWSKI (WARSZAWA)

Możliwość sprowadzenia rzeczywistego ustroju konstrukcyjnego do układu dyskretnego o skończonej liczbie stopni swobody pozwala badać ruch takiego ustroju przez badanie dynamiki modelu układu pomyślanego, jako skończony zbiór punktów materialnych, powiązanych wzajemnie i z nieruchomym układem odniesienia tłumikami i sprężynami, które odpowiednio modelują wewnętrzne i zewnętrzne siły dysypacyjne i zachowawcze [1]. Dotychczasowe prace z dynamiki układów mechanicznych dotyczyły niemal wyłącznie modelu mechanicznego, powstałego z elementów w formie nieliniowego modelu reologicznego Voigta.

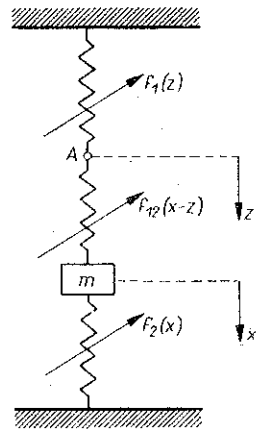
Pewne przypadki wymagają łączenia szeregowego elementów reprezentujących siły i prowadzą do uogólnienia poprzedniego modelu mechanicznego dopuszczając zerowanie się pewnych mas w modelu. Przypadki te mają miejsce, kiedy 1) cechy wewnątrzmaterialowe opisane są lepiej nieliniowym modelem reologicznym Maxwella lub mieszanym Voigta-Maxwella i 2) istnieją specjalne względy konstrukcyjne, np. przy bezpośrednim szeregowym oddziaływaniu na siebie elementów sprężystych i tłumiących (jeśli uzasadnione jest pominięcie mas tych elementów).

1. W pracy rozpatrzmy silnie nieliniowy model mechaniczny M o jednym stopniu swobody bez tłumienia z charakterystykami sprężystymi łączonymi szeregowo (rys. 1). Celem pracy jest badanie własności ruchu tego układu przez zbadanie przebiegu trajektorii fazowych na płaszczyźnie x, \dot{x} ruchu masy m oraz na płaszczyźnie z, \dot{z} ruchu punktu A . Zachowanie się punktu złączenia sprężyn A może być interesujące z technicznego punktu widzenia, a jednocześnie badanie ruchu na dwóch rzutniach przestrzeni fazowej $E^4 = \{(x, \dot{x}, z, \dot{z})\}$ pozwala wyjaśnić pewne osobliwości ruchu tego układu.

O charakterystykach sprężystych będziemy zakładali: a) f_1, f_2, f_{12} są funkcjami klasy C^1 ; b) spełnione są warunki $f(0) = 0, f(-\xi) = -f(\xi)$.

Dynamikę modelu M (rys. 1) opisuje równanie różniczkowe

$$(1) \quad m\ddot{x} = -f_{12}(x - z) - f_2(x)$$



Rys. 1

wraz z następującym warunkiem przedstawiającym równowagę sił w punkcie A :

$$f_{12}(x-z) = f_1(z).$$

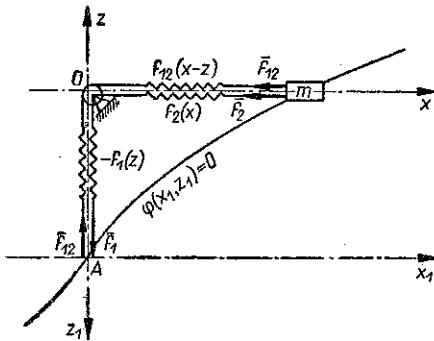
Warunek ten w dalszym ciągu będziemy oznaczać

$$(2) \quad \varphi(x, z) = f_1(z) - f_{12}(x-z) = 0.$$

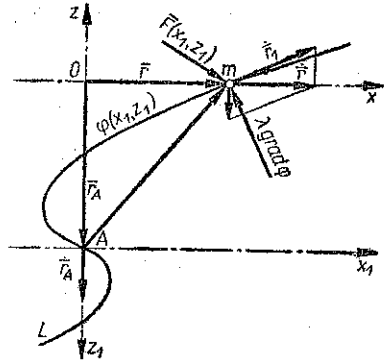
O warunkach początkowych dla (1) będziemy zakładali, że w chwili początkowej spełnione jest (2), tzn. że $\varphi(x_0, z_0) = 0$ dla $t_0 = 0$, co fizycznie oznacza, że w chwili początkowej w punkcie A nie działa żadna siła zewnętrzna (założenie C).

O ile rozwikłanie równania (2) względem z jest możliwe, wyznacza ono w ogólnym przypadku niejednoznacznie $z = z(x)$, a zatem równanie (1) może mieć niejednoznaczną prawą stronę.

2. Rozpatrzmy badany model mechaniczny w innym ujęciu (rys. 2), które pozwoli na obrazową interpretację warunku (2). Konstrukcja przedstawiona na rys. 2 ma trzy sprężyny. Sprężyna o charakterystyce f_{12} przewinięta jest przez błączek i połączona jest w punkcie A ze sprężyną $-f_1$ (charakterystyka przeciwnego znaku niż w modelu M). Masa m może poruszać się wzdłuż osi x , która stanowi jej prowadnicę, analogicznie punkt złączenia sprężyn A może poruszać się wzdłuż osi z . Jak łatwo sprawdzić, w ten sposób pomyślana konstrukcja jest oczywiście z punktu widzenia dynamiki identyczna z modelem mechanicznym M .



Rys. 2



Rys. 3

Wprowadźmy układ współrzędnych $x_1 z_1$ poruszający się wraz z punktem A ,

$$(3) \quad \vec{i} = \vec{i}_1, \quad \vec{j} = -\vec{j}_1,$$

i nanieśmy na rys. 2 krzywą (1) wyznaczoną przez warunek (2) w ruchomym układzie współrzędnych w postaci

$$(4) \quad \varphi(x_1, z_1) = f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1) = 0.$$

Zauważmy, że warunek zobrazowany krzywą (4) jest torem ruchu masy w ruchomej płaszczyźnie x_1, z_1 , tzn. ruchu masy m względem punktu A . Wykorzystamy tę

(1) Dla prostoty rysunek 2 został opracowany przy założeniu, że funkcja φ jest jednojednoznaczna.

interpretację do ustalenia pewnej analogii mechanicznej, która przydatna będzie do wyznaczenia ruchu układu M .

Niech w układzie mechanicznym \mathfrak{M} (rys. 3) masa m porusza się po krzywej geometrycznych więzów skleronomicznych dwustronnych L wyznaczonej przez (4) w płaszczyźnie x_1, z_1 pod działaniem sił wyznaczonych przez funkcję sił

$$(5) \quad U(x_1, z_1) = - \left[\int_0^{x_1-z_1} f_{12}(\xi - \zeta) d(\xi - \zeta) + \int_0^{z_1} f_1(\zeta) d\zeta + \int_0^{x_1} f_2(\xi) d\xi \right]$$

i niech ruch unoszenia ruchomego układu współrzędnych x_1, z_1 będzie tak dobrany, aby ruch masy m w bezwzględnym układzie współrzędnych x, z był prostoliniowy wzdłuż osi x , tzn. aby

$$(6) \quad \bar{r} = \bar{i}x, \quad \bar{r}_1 = \bar{i}_1x_1 + \bar{j}_1z_1, \quad \bar{r}_A = \bar{j}z_A,$$

co wobec równości (3) prowadzi do równań

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_A + \bar{r}_1 & \text{lub} & & x &= x_1, & z_A &= z_1, \\ \dot{\bar{r}} &= \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_1 & \text{lub} & & \dot{x} &= \dot{x}_1, & \dot{z}_A &= \dot{z}_1, \\ \ddot{\bar{r}} &= \ddot{\bar{r}}_A + \ddot{\bar{r}}_1 & \text{lub} & & \ddot{x} &= \ddot{x}_1, & \ddot{z}_A &= \ddot{z}_1. \end{aligned}$$

I. Wykażemy, że ruch układu \mathfrak{M} jest równoważny ruchowi układu M , ponieważ zjawiska dynamiczne w obu tych układach opisane są takimi samymi równaniami.

II. Wyrazimy całkę energii w układzie \mathfrak{M} , a przez I i w układzie M .

Na wstępie określimy pole wektorowe sił wyznaczone przez (5). Na podstawie założenia a) funkcja

$$U(x_1, z_1) = - [F_{12}(x_1 - z_1) + F_1(z_1) + F_2(x_1)]$$

jest sumą funkcji ciągłych (jako funkcji granic górnych całek funkcji ciągłych), a więc pochodne tych funkcji określone są przez funkcje pierwotne. Tak więc

$$\frac{\partial U(x_1, z_1)}{\partial x_1} = - [f_{12}(x_1 - z_1) + f_2(x_1)],$$

$$\frac{\partial U(x_1, z_1)}{\partial z_1} = - [f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1)].$$

Funkcja skalarna $U(x_1, z_1)$ wyznacza pole wektorowe sił

$$(8) \quad \bar{F}(x_1, z_1) = \text{grad } U(x_1, z_1)$$

lub skalarnie

$$(8') \quad \begin{aligned} F_{x_1} &= - [f_{12}(x_1 - z_1) + f_2(x_1)], \\ F_{z_1} &= - [f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1)], \end{aligned}$$

które spełnia warunek bezwirowości

$$\frac{\partial^2 U(x_1, z_1)}{\partial x_1 \partial z_1} - \frac{\partial^2 U(x_1, z_1)}{\partial z_1 \partial x_1} = 0,$$

a więc pole wektorowe (8) jest potencjalne. Stacjonarna funkcja sił $U(x_1, z_1)$ wyznacza energię potencjalną na płaszczyźnie x_1, z_1 :

$$(9) \quad V(x_1, z_1) = -U(x_1, z_1).$$

Możemy napisać równania ruchu masy m w ruchu względnym (rys. 3) w postaci

$$(10) \quad m\ddot{r}_1(x_1, z_1) = \bar{F}(x_1, z_1) + \lambda \text{grad } \varphi(x_1, z_1) + [-\ddot{m}_A^{\ddot{r}}(x, z)],$$

gdzie warunek więzów określony jest przez (4). Na mocy (6) równanie różniczkowe (10) ma następującą postać skalarną:

$$(10') \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{x_1}(x_1, z_1) + \lambda \frac{\partial \varphi(x_1, z_1)}{\partial x_1}, \\ m\ddot{z}_1 &= F_{z_1}(x_1, z_1) + \lambda \frac{\partial \varphi(x_1, z_1)}{\partial z_1} + m\ddot{z}_A. \end{aligned}$$

Założenie a) zapewnia istnienie składowych $\text{grad } \varphi(x_1, z_1)$, mamy więc

$$(11) \quad \frac{d\varphi(x_1, z_1)}{dt} = \frac{\partial \varphi(x_1, z_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \varphi(x_1, z_1)}{\partial z_1} \dot{z}_1 = 0.$$

Układ równań (10') po wykorzystaniu (7) i (8') prowadzi do równań

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -[f_{12}(x_1 - z_1) + f_2(x_1)] + \lambda \frac{\partial \varphi(x_1, z_1)}{\partial x_1}, \\ 0 &= -[f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1)] + \lambda \frac{\partial \varphi(x_1, z_1)}{\partial z_1} \end{aligned}$$

i pozwala wyrugować mnożnik więzów λ . Przy warunku (4) z ostatniego równania tego układu wynika, że $\lambda \equiv 0$ i ostatecznie (10') przyjmuje postać w układzie inercyjnym

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -[f_{12}(x - z_A) + f_2(x)], \\ f_{12}(x - z_A) &= f_1(z_A). \end{aligned}$$

Równania te są identyczne z równaniami (1) i (2), a więc teza I jest dowiedziona.

Wniosek 1. $\lambda \equiv 0$ fizycznie oznacza, że nie ma reakcji więzów, a więc krzywa L przyjętych «wieszów» istotnie jest torem swobodnego ruchu masy m w układzie \mathfrak{M} .

Wniosek 2. Z (11) wynika równanie

$$\dot{z}_1 = -\frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial \varphi / \partial z_1} \dot{x}_1,$$

które przy założeniu c) jest równoważne (4) i ze względu na (7) może zastępować warunek (2) dla $\partial \varphi / \partial z_1 \neq 0$. Istotnie (11) jako pochodna zupełna po scałkowaniu prowadzi do związku

$$\varphi(x_1, z_1) = C,$$

przy czym stałą $C = 0$ wyznacza się z założenia c).

Pokażemy, że dla układu \mathfrak{M} opisanego równaniami (10) i (4) istnieje tzw. uogólniona całka energii [2]. W tym celu rozpatrzmy poszczególne wyrazy równania (10) pomnożone skalarinnie przez $\dot{\bar{r}}_1$ uwzględniając, że $\lambda \equiv 0$, czyli że

$$(12) \quad m\ddot{\bar{r}}_1 \dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{F}}\dot{\bar{r}}_1 - m\ddot{r}_A \dot{\bar{r}}_1.$$

Ponieważ ruchomy układ współrzędnych nie obraca się w stosunku do układu inercjalnego, dla dowolnego wektora \bar{a} prawdziwa jest zależność $d\bar{a}/dt = d'\bar{a}/dt$, gdzie symbol d'/dt oznacza różniczkowanie w układzie ruchomym. Stosując zasady różniczkowania w ruchu względnym otrzymamy

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{r}}_1 \dot{\bar{r}}_1 &= \frac{d'}{dt} \left(\frac{m\dot{\bar{r}}_1^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}_1^2}{2} \right), \\ \dot{\bar{F}}\dot{\bar{r}}_1 &= \frac{\text{grad } U d' \bar{r}_1}{dt} = \frac{d' U}{dt} = \frac{dU}{dt}, \\ m\ddot{r}_A \dot{\bar{r}}_1 &= m\ddot{r}r_1 - m\ddot{\bar{r}}_1 \dot{\bar{r}}_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}^2}{2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\bar{r}}_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

W rezultacie tych przekształceń (12) ma postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}^2}{2} \right) = \frac{dU}{dt},$$

która prowadzi do całki energii

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = U + \text{const.}$$

Po wykorzystaniu (6), (7) i (9) znajdziemy

$$(13) \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x, z_A) = h,$$

gdzie h jest stałą dowolną i wyraża całkowitą energię mechaniczną układu \mathfrak{M} , a więc i M (co dowodzi II).

Wniosek 3. Ponieważ dopuszczamy niejednoznaczność rozwikłania warunku (2) ze względu na x i z , należy podawać warunki początkowe w postaci

$$(14) \quad x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0, \quad \dot{x}(0) = x_0,$$

mimo że (jak wynika z założenia c)) tylko dwa z nich są niezależne. Sprecyzowanie warunków początkowych (14) pozwoli na jednoznaczne określenie ruchu układu.

Wniosek 4. Unieruchamiając układ współrzędnych poruszający się wraz z punktem A możemy interpretować ruch układu M (rys. 4) jako ruch punktu P po krzywej określonej przez (2).

Każdemu położeniu na krzywej odpowiada energia potencjalna określona przez (9) z uwzględnieniem (7), a więc $V(x, z)$. Przyjmijmy, że tylko rzut P_x punktu P na oś x skupia całą masę m , a więc i całkowitą energię kinetyczną układu $m\dot{x}^2/2$; wtedy całka energii ma postać (13). Odpowiednio bezmasowy rzut P_z punktu P na oś z będzie reprezentował punkt A modelu.

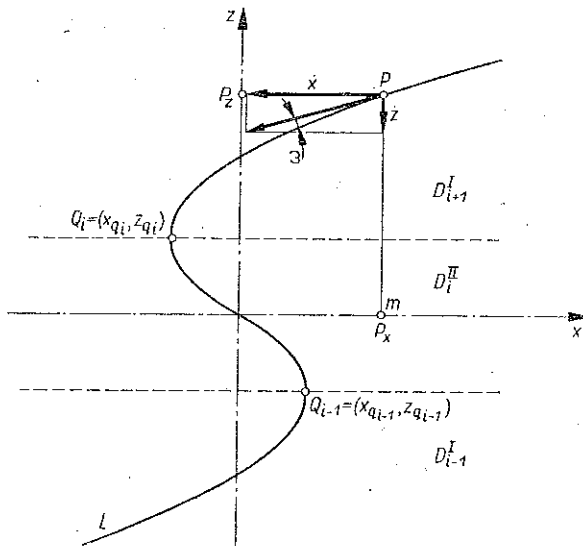
3. Przy dalszych rozważaniach wygodniej będzie równania (1) i (2) przedstawić w postaci normalnej:

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{m} [f_{12}(x-z) + f_2(x)], \end{aligned}$$

$$\varphi(x, z) = 0$$

lub ze względu na wniosek 2 w postaci równoważnej

$$(15') \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{m} [f_{12}(x-z) + f_2(x)], \\ \dot{z} &= -\frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial z} y. \end{aligned}$$



Rys. 4

Założymy dodatkowo, że d) — funkcja φ jest jednoznaczna względem z (2).

Zgodnie z interpretacją podaną we wniosku 4 będziemy badali ruch punktu P na płaszczyźnie x, y .

Układ równań (15) wyznacza w przestrzeni fazowej E^4 trajektorie ruchu punktu P , które leżą na dwuwymiarowej hiperpowierzchni wyznaczonej przez ostatnie

(2) Założenie to nie wyklucza możliwości badania przypadków niejednoznaczności względem x lub niejednoznaczności względem x i z , które wymagają innej nieco procedury badania.

równanie układu (15). Śladem tej hiperpowierzchni na płaszczyźnie x, z jest krzywa L . Dla określenia trajektorii będziemy wyznaczali ich rzuty na płaszczyzny fazowe x, y i z, \dot{z} stanowiące odpowiednio obrazy ruchu masy m i punktu A .

Kąt pochylenia stycznej do krzywej L w punkcie P (rys. 4) wynosi

$$\operatorname{tg} \omega = - \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial z}.$$

Wprowadźmy podział płaszczyzny x, y na kolejne obszary D_i ($i = 1, 2, \dots, n$; $n \geq 1$) rozdzielone normalnymi do krzywej L równoległymi do osi x . Oczywiście w tych obszarach krzywa L jest ściśle monotoniczna (założenie d), $\operatorname{tg} \omega$ jest stałego znaku. W zależności od znaku $\operatorname{tg} \omega$ mamy dwa typy obszarów D_i :

$$D^I \quad \text{dla} \quad \operatorname{tg} \omega > 0, \quad \text{tzn.} \quad \operatorname{sign} \dot{x} = \operatorname{sign} \dot{z},$$

$$D^{II} \quad \text{dla} \quad \operatorname{tg} \omega < 0, \quad \text{tzn.} \quad \operatorname{sign} \dot{x} = - \operatorname{sign} \dot{z}.$$

Zgodnie z podziałem na obszary D_i w przypadku przegięcia krzywej L ze styczną pionową mamy do czynienia z graniczeniem obszarów tego samego typu.

Wzory (7) i (9) określają energię potencjalną $V(x, z)$ wzdłuż krzywej L ; jest ona funkcją ciągłą. Dla dowolnych warunków początkowych (14) mamy wyznaczony odpowiedni obszar D_p oraz całkowitą energię mechaniczną

$$h = \frac{m y_0^2}{2} + V(x_0, z_0).$$

Odpowiednią krzywą całkową zbudujemy korzystając z (13) i (2), tzn. biorąc jedynie pod uwagę punkty na krzywej L .

Niech będzie dane rozwikłanie (3) warunku (2) dla poszczególnych obszarów D_i w postaci

$$(16) \quad z = z_i(x) \quad \text{dla} \quad z_{a_{i-1}} \leq z \leq z_{a_i}.$$

Energie potencjalne dla łuków krzywej L zawartych w odpowiednich obszarach D_i określić można w zależności od jednej zmiennej x :

$$(17) \quad V_i(x) = V(x, z_i(x)).$$

Na podstawie (13) równania

$$(18) \quad y_i = \sqrt{\frac{2}{m} [h - V_i(x)]}$$

wyznaczają trajektorie na rzutni x, y odpowiadające obszarowi D_i . Trajektorie $y_k(x)$, $y_l(x)$, zrzucone z obszarów D_k i D_l ($k \neq l$), oczywiście mogą przecinać się, o ile odpowiednie rzuty łuków krzywej L na oś x zachodzą na siebie. Przez wykorzystanie ostatniego równania układu (15) i funkcji (16) mamy natychmiast krzywe całkowite na rzutni z, \dot{z} .

(3) Jeśli rozwikłanie warunku (2) jest niemożliwe, możemy wykreślić przeprowadzić badanie przybliżone. Należy w tym celu: 1) zbudować krzywą L na płaszczyźnie x, z , 2) wykreślić rzut $V(x)$ trójwymiarowej krzywej energii potencjalnej $V(x, z)$ obliczonej dla punktów krzywej L i 3) korzystając z (13) wykreślić rzut trajektorii $y(x)$ [3].

Zbadajmy przypadek, gdy punkt P poruszając się po krzywej L zbliży się do punktu $Q_i = (x_{a_i}, z_{a_i})$ rozdzielającego obszary D_i i D_{i+1} (rys. 4). Przyjmijmy, że energia mechaniczna układu jest na tyle duża ($h > V_{a_i}(x_{a_i}, z_{a_i})$), że układ posiada w chwili zbliżenia i osiągnięcia punktu Q_i energię kinetyczną, tzn. $|\dot{x}| > 0$. Rozpatrzymy dwa przypadki:

1. Niech D_i i D_{i+1} będą obszarami różnych typów. Ponieważ punkt P nie może opuścić krzywej L (wniosek 1), a prawo zachowania energii musi być zawsze spełnione (II), więc przy zachowanym warunku $|\dot{x}| > 0$ prędkość \dot{x} musi zmienić znak. Istnieją dwie równoprawne alternatywy przebiegu zjawiska:

A przejście punktu P do obszaru następnego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = -\text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = \text{sign } \dot{z}^{**};$$

B powrót punktu P do obszaru poprzedniego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = -\text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = -\text{sign } \dot{z}^{**},$$

gdzie $*$ oznacza stan przed dojsciem P do Q_i , $**$ – stan po odejściu P od Q_i .

2. Niech D_i i D_{i+1} będą obszarami jednego typu. Z tych samych względów co poprzednio też są dwie alternatywy przebiegu zjawiska:

A przejście punktu P do obszaru następnego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = \text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = \text{sign } \dot{z}^{**};$$

B powrót punktu P do obszaru poprzedniego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = -\text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = -\text{sign } \dot{z}^{**}.$$

W obu przypadkach mamy $|\text{tg } \omega| \xrightarrow{P \rightarrow Q_i} \infty$, co oznacza, że $|\dot{z}| \xrightarrow{P \rightarrow Q_i} \infty$ [prawa strona ostatniego z równań (15') w punktach Q_i posiada nieciągłość].

Zmiana znaku prędkości masy przy zasadzie zachowania energii w przypadku 1. oraz 2. B oznacza, że zjawisko przejścia punktu P przez Q_i nosi charakter idealnie sprężystego odbicia masy m w położeniu x_{a_i} .

Wyznamy położenia równowagi układu mechanicznego M opisanego równaniami (15), w których współrzędne układu zachowują w czasie stałą wartość, a prędkości są równe zero. W przestrzeni fazowej E^4 odpowiadają im pewne położenia $R = (x_r, 0, z_r, 0)$ punktu reprezentującego, tzw. punkty spoczynku.

Zerowanie się prawych stron równań różniczkowych (15), tzn.

$$(19) \quad y = 0, \quad f_{12}(x - z) + f_2(x) = 0,$$

nie jest warunkiem dostatecznym, aby współrzędne przestrzeni E^4 , wyznaczone przez (19) i ostatnie równanie układu (13), były współrzędnymi punktów spoczynku. Warunek dostateczny jest wyznaczony przez układ równań

$$(19') \quad y = 0, \quad f_{12}(x - z) + f_2(x) = 0, \quad \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial z} y = 0$$

powstały z przyrównania do zera prawych stron układu równań (15').

Niech układ (19) ma j -te rozwiązanie

$$(20) \quad x_j = x_{r_j}, \quad y_j = 0, \quad z_j = z_{r_j}$$

leżące wewnątrz obszaru D_i . Ponieważ w obszarze D_i

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial z} = B, \quad |B| < \infty,$$

więc wszystkie równania układu (19) są spełnione i istotnie R_j jest punktem spoczynku.

Niech j -te rozwiązanie układu (19') leży na granicy obszarów D_i i D_{i+1} , tzn.

$$(21) \quad x_{r_j} = x_{q_i}, \quad y_j = 0, \quad z_{r_j} = z_{q_i}.$$

Współrzędne (21) mogą nie wyznaczać punktu spoczynku. Istotnie, w punktach rozgraniczających obszary

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \omega} = - \frac{\partial \varphi / \partial z}{\partial \varphi / \partial x} = 0,$$

a więc trzecie równanie układu (15') wyznacza współrzędną \dot{z}_j jako symbol nieoznaczony. Punkty $Q_i = (x_{q_i}, y, z_{q_i}, \dot{z})$ przestrzeni E^4 są punktami nieciągłości trajektorii ze względu na nieoznaczoność \dot{z} .

Możliwe są jakościowo różne przypadki nieciągłości trajektorii w zbiorze punktów określonych przez (21) w zależności od tego, czy

$$\lim_{P \rightarrow Q_i} \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial z} y$$

dla $h = V_{q_i}$ jest zerem, czy wartością skończoną, różną od zera (4).

4. Pokażemy zastosowanie przedstawionej metody określania krzywych całkowych rozpatrując układ mechaniczny (rys. 5), w którym połączono szeregowo sprężystość liniową k z nieliniową $f_1(z) = az + \beta z^3$, gdzie k , a i β są to współczynniki stałe. Badanie przeprowadzimy w zależności od współczynników charakterystyk.

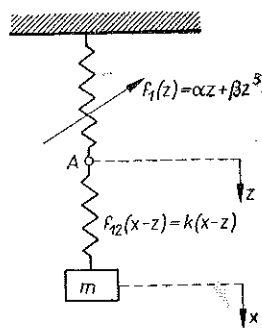
Założenia a) i b) są spełnione; będziemy zakładali: 1) $k > 0$, 2) zachodzi c).

Rozpatrzmy równania różniczkowe ruchu w postaci (15')

$$(22) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = - \frac{k}{m} (x - z), \quad \dot{z} = \frac{k}{3\beta z^2 + a + k} y,$$

gdzie ostatnie równanie układu równoważne jest warunkowi algebraicznemu

$$(23) \quad k(x - z) = az + \beta z^3$$



Rys. 5

(4) Szczegółowe badanie punktów osobliwych wykracza poza ramy tej pracy.

wyznaczającemu krzywą L . Warunek ten napiszemy inaczej:

$$(23') \quad \varphi(x, z) = z^3 + pz + qx = 0,$$

gdzie

$$(24) \quad p = \frac{\alpha + k}{\beta}, \quad q = -\frac{k}{\beta}.$$

Energia potencjalna układu wynosi

$$V(x, z) = \frac{k}{2}(x - z)^2 + \frac{\alpha}{2}z^2 + \frac{\beta}{4}z^4,$$

a za pomocą (23) można przedstawić ją w postaci

$$(25) \quad V(z) = \frac{\beta}{2k} \left[\beta z^6 + \frac{4\alpha + k}{2} z^4 + \frac{\alpha(\alpha + k)}{\beta} z^2 \right].$$

Wyznamy współrzędne punktów Q_i rozgraniczających obszary ścisłej monotoniczności krzywej L z warunku $\partial\varphi/\partial z = 0$:

$$(26) \quad \begin{aligned} x_{q_{1,2}} &= \pm x_q = \pm \frac{2p}{3q} \sqrt{-\frac{p}{3}} = \mp \frac{2(\alpha + k)}{3k} \sqrt{-\frac{\alpha + k}{3\beta}}, \\ z_{q_{1,2}} &= \mp z_q = \mp \sqrt{-\frac{p}{3}} = \mp \sqrt{-\frac{\alpha + k}{3\beta}}. \end{aligned}$$

Oczywiście współrzędne te istnieją w dziedzinie liczb rzeczywistych, a więc dla $p \leq 0$. Dla $p > 0$ cała płaszczyzna x, z jest obszarem typu DI , krzywa L odwzorowuje jednojednoznacznie x w z .

Określmy położenia równowagi układu mechanicznego (x_r, z_r) , którym odpowiadają punkty spoczynku R_f w przestrzeni fazowej E^4 . Warunek konieczny [zerowania dwu pierwszych równań (22) przy spełnionym warunku (23')] wyznacza na płaszczyźnie x, z współrzędne jako pierwiastki rzeczywiste równań

$$z_r(z_r^2 + p + q) = 0, \quad x_r = z_r$$

w postaci

$$(27) \quad x_{r_1} = z_{r_1} = 0,$$

$$(28) \quad x_{r_{2,3}} = z_{r_{2,3}} = \mp \sqrt{-(p+q)} = \mp \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

dla $\alpha/\beta \leq 0$. Współrzędne (27) wyznaczają położenia równowagi przy $\alpha \neq -k$, a współrzędne (28) przy $\alpha \neq k/2$ [wykluczone przypadki odpowiadają nieoznaczności prawej strony ostatniego równania (22)].

Rozpatrzmy wszystkie możliwe przypadki obrazów fazowych rozpatrywanego układu z wyjątkiem przypadku banalnego $\beta = 0$ i fizycznie nieinteresującego przypadku całkowicie ujemnej charakterystyki: $\alpha \leq 0, \beta < 0$.

Przypadek $\alpha < -k, \beta > 0$. Trzy pierwiastki rzeczywiste (27) i (28) wyznaczają trzy położenia równowagi; istnieją dwa punkty rozgraniczenia obszarów (26) na krzywej L , przy czym $x_q > 0, z_q > 0$ (rys. 6a).

Korzystając ze znanych wzorów otrzymamy rozwikłanie warunku (23') ze względu na zmienną z . W poszczególnych obszarach D_i ($i = 1, 2, 3$) mamy odpowiednio

$$(29) \quad z_1(x) = \begin{cases} \frac{-2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin \delta(x)} & \text{dla } x \leq -x_q, \\ 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3}\pi \right] & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q; \\ z_2(x) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3}\pi \right]; \\ z_3(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \varepsilon(x) & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q, \\ -\frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin \delta(x)} & \text{dla } x \geq x_q, \end{cases} \end{cases}$$

gdzie

$$\delta(x) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \left(-\frac{x_q}{x} \right)}, \quad \varepsilon(x) = \frac{\operatorname{arc} \cos \frac{x}{x_q}}{3}.$$

Oczywiście będziemy przyjmowali tylko wartości główne funkcji odwrotnych.

Podstawiając (29) do (25) otrzymamy poszczególne gałęzie energii potencjalnej odpowiadające obszarom D_i ($i = 1, 2, 3$) w postaci

$$(30) \quad V_1(x) = \begin{cases} d_1 \left[\frac{d_2}{\sin^6 \delta(x)} - \frac{d_3}{\sin^4 \delta(x)} + \frac{d_4}{\sin^2 \delta(x)} \right] & \text{dla } x \leq -x_q, \\ d_1 \left\{ d_2 \cos^6 \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3}\pi \right] - d_3 \cos^4 \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3}\pi \right] + \right. \\ \quad \left. + d_4 \cos^2 \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3}\pi \right] \right\} & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q; \\ V_2(x) = d_1 \left\{ d_2 \cos^6 \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3}\pi \right] - d_3 \cos^4 \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3}\pi \right] + \right. \\ \quad \left. + d_4 \cos^2 \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3}\pi \right] \right\}; \\ V_3(x) = \begin{cases} d_1 [d_2 \cos^6 \varepsilon(x) - d_3 \cos^4 \varepsilon(x) + d_4 \cos^2 \varepsilon(x)] & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q, \\ d_1 \left[\frac{d_2}{\sin^6 \delta(x)} - \frac{d_3}{\sin^4 \delta(x)} + \frac{d_4}{\sin^2 \delta(x)} \right] & \text{dla } x \geq x_q, \end{cases} \end{cases}$$

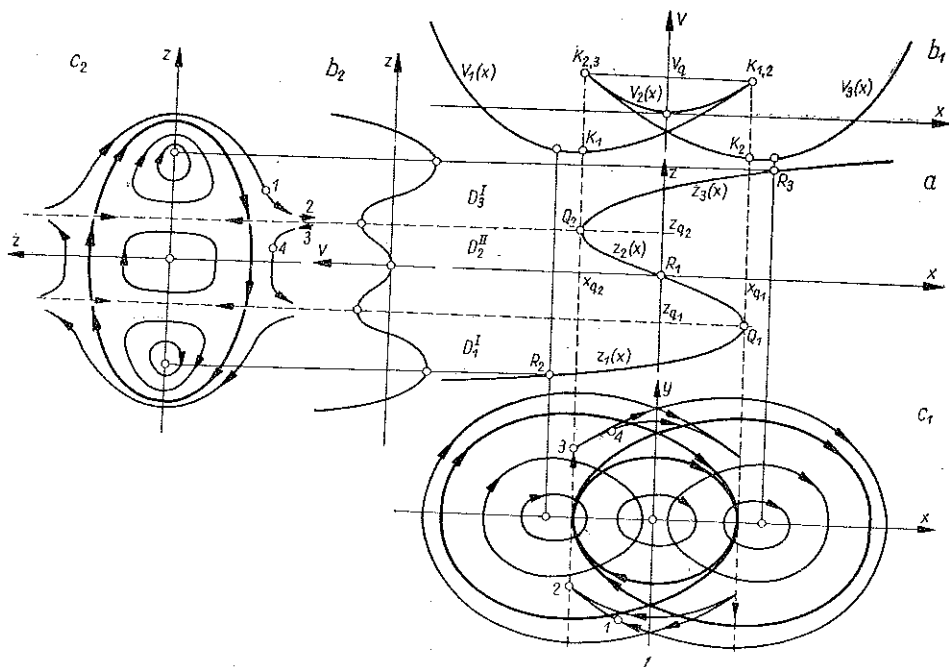
gdzie

$$d_1 = \frac{2}{3} \frac{(a+k)^2}{k} > 0, \quad d_2 = -\frac{16}{9} (a+k) > 0,$$

$$d_3 = -\frac{2}{3} (4a+k) > 0, \quad d_4 = -a > 0.$$

Przebieg zmienności energii wzdłuż krzywej L ilustrują rys. 6b₁ i rys. 6b₂.

Zbadamy szczegółowo krzywą energii potencjalnej $V(x)$ w postaci analitycznej (30). Krzywa ta składa się z trzech gałęzi $V_i(x)$ i posiada oś symetrii $x=0$. Wszystkie gałęzie krzywej są wypukłe i mają po jednym minimum określonym przez współrzędną x_r , odpowiedniego położenia równowagi.



Rys. 6

Łatwo wykazać, że w punktach K_1 i K_2 , po obu stronach których odpowiednie gałęzie mają różny zapis analityczny, są one gładkie i np. dla punktu K_2 wyznaczają energię

$$V_3(x_q) = -\frac{10k+a}{9}$$

i kąt nachylenia stycznej

$$\lim_{x \rightarrow x_q} \frac{dV_3}{dx} = -\frac{2}{3} \sqrt{-\frac{a+k}{3\beta}} (a+4k).$$

Minima funkcji dla gałęzi $V_1(x)$ i $V_3(x)$ mogą być dowolnie położone względem punktów K_1 i K_2 .

Można wykazać, że punkty $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$ są punktami osobliwymi krzywej $V(x)$: w punktach tych spotykają się, nie biegnąc dalej, po dwie gałęzie krzywej, przy czym obie w punkcie spotkania mają wspólną styczną i są w pobliżu punktu osobliwego po tej samej stronie stycznej. A więc punkty $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$ są punktami zwrotu drugiego rodzaju. Np. $K_{2,3}$ wyznacza dodatnią energię

$$(31) \quad V_q = V_2(-x_q) = V_3(-x_q) = \frac{1}{108} \frac{(a+k)^2(k-8a)}{k\beta} > 0$$

i styczną o nachyleniu

$$\lim_{x \rightarrow -x_q} \frac{dV_2}{dx} = \lim_{x \rightarrow -x_q} \frac{dV_3}{dx} = \frac{1}{3} \sqrt{-\frac{a+k}{3\beta}} (2a-k) < 0.$$

Punkty K_1 i K_2 leżą poniżej $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$, więc gałęzie odpowiadające sąsiednim obszarom nie przecinają się.

Zauważmy ponadto, że

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \infty.$$

Zgodnie z rozważaniami z p. 3 korzystając z zależności (18) otrzymamy rzuty $y(x)$ trajektorii, jako rzuty krzywych stałej energii mechanicznej na płaszczyznę fazową x, y (rys. 6c₁). Z trzeciego równania układu (22), wyrażając y przez (25), otrzymamy rzut trajektorii na płaszczyznę z, \dot{z} (rys. 6c₂) w postaci

$$(32) \quad \dot{z} = \sqrt{e_1 \left[-e_2 z^2 + e_3 + \frac{h - V_q}{(e_4 z^2 + e_5)^2} \right]},$$

gdzie

$$e_1 = 2 \frac{k^2}{m} > 0, \quad e_2 = \frac{1}{18k} > 0, \quad e_3 = \frac{k-8a}{108\beta k} > 0,$$

$$e_4 = 3\beta > 0, \quad e_5 = a+k > 0.$$

W zależności od poziomu energii h mamy różne rodzaje trajektorii. Dla $h < V_q$ wszystkie krzywe na obu rzutniach fazowych, niezależnie od obszaru D_i , są krzywymi zamkniętymi, leżącymi w odpowiednim obszarze D_i , które przebiegają dookoła centrów znajdujących się w punktach spoczynku R_j ($j = 1, 2, 3$) (5).

Dla $h > V_q$ trajektorie są krzywymi nieciągłymi. Współrzędne punktów Q_1 i Q_2 wyznaczają na rzutniach linie nieciągłości: proste $x = x_{q_1}$, $x = x_{q_2}$ na rzutni x, y są liniami odbicia sprężystego (por. p. 3), odpowiadające im proste $z = z_{q_1}$ i $z = z_{q_2}$ na z, \dot{z} są asymptotami trajektorii. Rozpatrzmy (np. zgodnie z alternatywą A) przejście punktu reprezentującego np. z obszaru D_3 do D_2 . W obszarze D_3 punkt-obraz porusza się po odpowiedniej trajektorii (położenie 1), dochodząc do linii nieciągłości (położenie 2). Następuje przeskok do położenia 3 na rzutni x, y ,

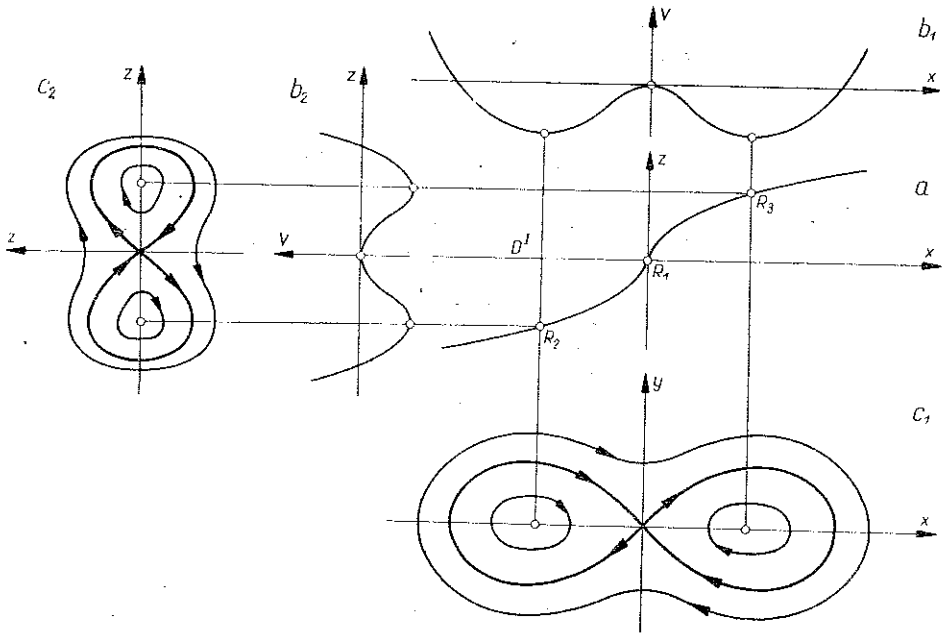
(5) Łatwo sprawdzić, rozwijając prawe strony układu (22), przy znanym rozwikłaniu (27), wg szeregu Maclaurina w punktach spoczynku i stosując kryterium Peincarego dla jednego stopnia swobody [3], że rzuty punktów spoczynku na obie rzutnie są punktami osobliwymi typu centrum.

któremu odpowiada granica $\dot{z} = -\infty$ na rzutni z, \dot{z} . Dalszy ruch odbywa się po trajektorii obszaru D_2 (położenie 4) aż do następnej linii nieciągłości itd.

Dla $h = V_q$ trajektoria, przedstawiona na rys. 6 linią grubą, oddziela od siebie różne jakościowo rozwiązania. Jak widać z (32) trajektoria

$$(32') \quad \frac{\dot{z}^2}{k(k-8\alpha)} + \frac{z^2}{9(k-8\alpha)} = 1, \quad z \neq \pm z_q$$

na rzutni z, \dot{z} jest odcinkowo ciągłą elipsą posiadającą punkty nieciągłości w punktach przecięcia z liniami nieciągłości. Na rzutni x, y odpowiadają jej krzywe zamknięte, po jednej dla każdego obszaru, przy czym krzywe sąsiednich obszarów są styczne do siebie i do linii nieciągłości.

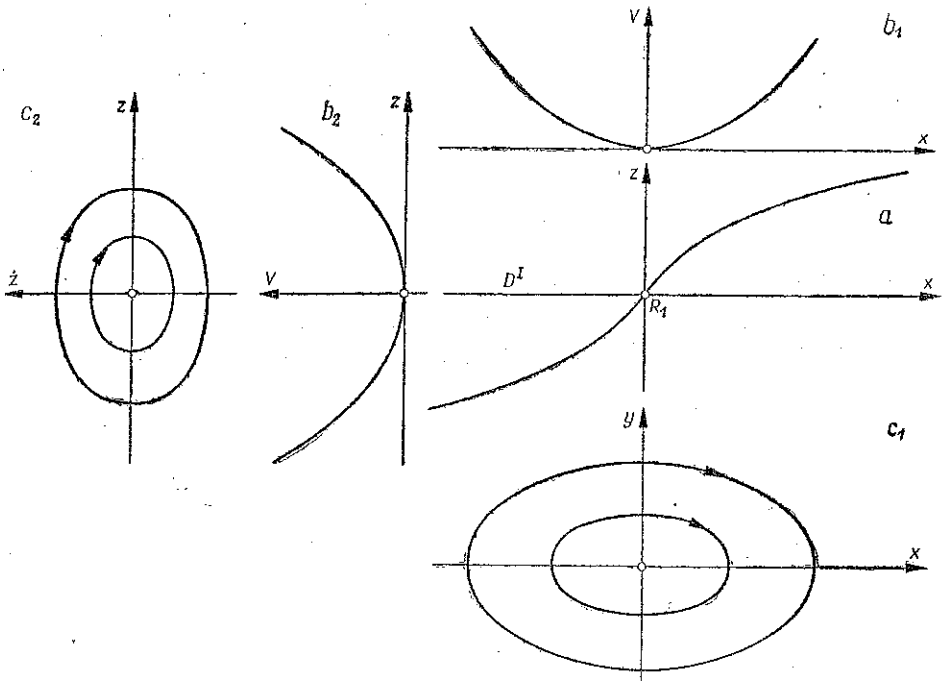


Rys. 7

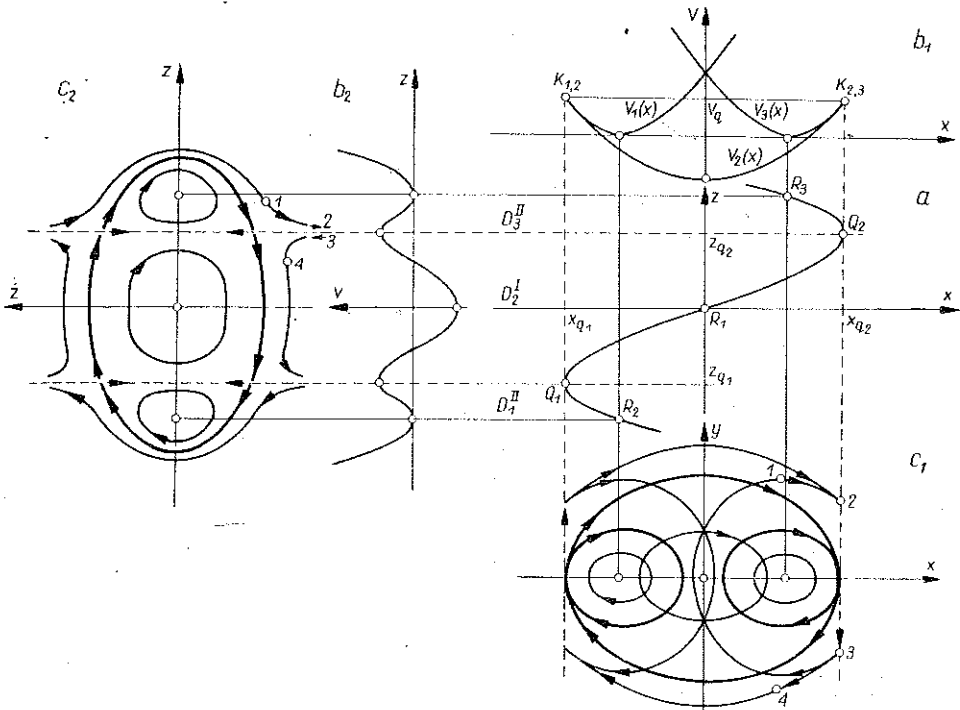
Przypadek $-k < a < 0$, $\beta > 0$. Wszystkie trzy pierwiastki (27) i (28) są rzeczywiste i wyznaczają położenia równowagi. Krzywa L jest monotoniczna (rys. 7a) i z (23) znajdziemy

$$(33) \quad z = -2 \sqrt{\frac{a+k}{3\beta}} \operatorname{ctg} 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-\frac{2}{3} \frac{a+k}{k} \sqrt{\frac{a+k}{3}}}{x}}$$

Współrzędne położen równowagi określają maksimum energii (27) i dwa minima (28), które odpowiadają na obu rzutniach fazowych punktowi siodłowemu i punktom centrów (rys. 7). Wszystkie trajektorie są ciągłe.



Rys. 8

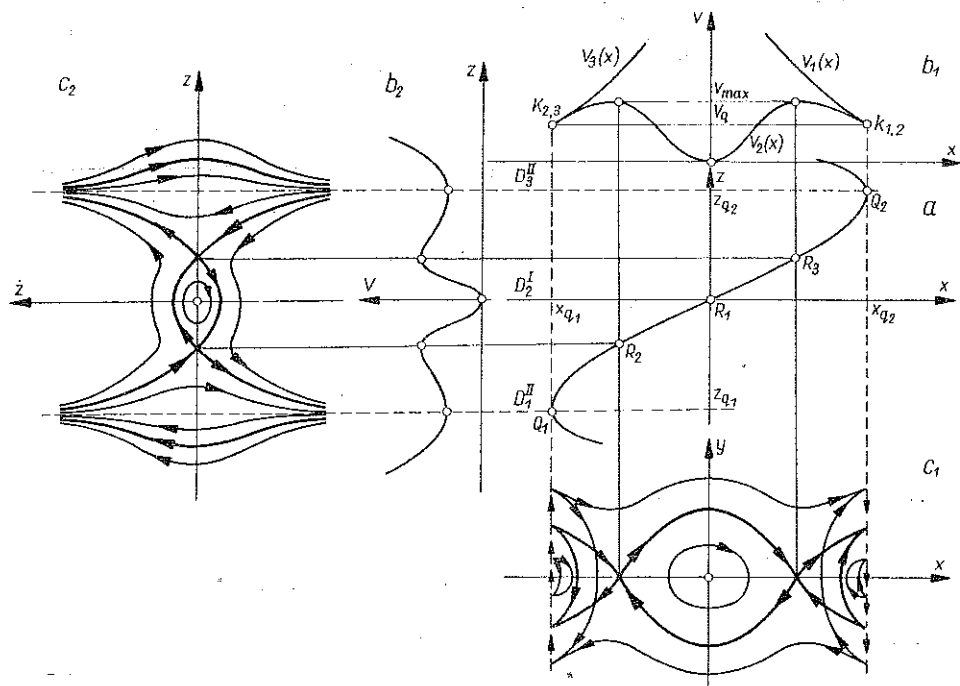


Rys. 9

Przypadek $a \geq 0, \beta > 0$. W tym przypadku istnieje tylko jeden pierwiastek rzeczywisty (27), który wyznacza położenie równowagi. Mamy tutaj jednoznaczne rozwikłanie (33). Na rys. 8 przedstawiono wykres funkcji energii i obrazy fazowe ruchu.

Przypadek $a > k/2, \beta < 0$. Przypadek ten jakościowo jest identyczny z poprzednio omówionym przypadkiem $a < -k, \beta > 0$; wszystkie poprzednie rozważania i wzory mają zastosowanie i tutaj. Wyniki przedstawiono na rys. 9.

Przypadek $0 < a < k/2, \beta < 0$. W przypadku tym wszystkie pierwiastki (27) i (28) są rzeczywiste i wyznaczają położenia równowagi układu. Dwa punkty Q_1 i Q_2 określone przez (26) wyznaczają linie nieciągłości (rys. 10).



Rys. 10

Energia potencjalna (rys. 10b₁ i 10b₂) o postaci analitycznej (30), podobnie jak w przypadku poprzednim, w położeniu równowagi (27) posiada minimum, a w położeniach (28) maksima, wszystkie w obszarze D_2 . Punkty $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$ są punktami zwrotu pierwszego rodzaju.

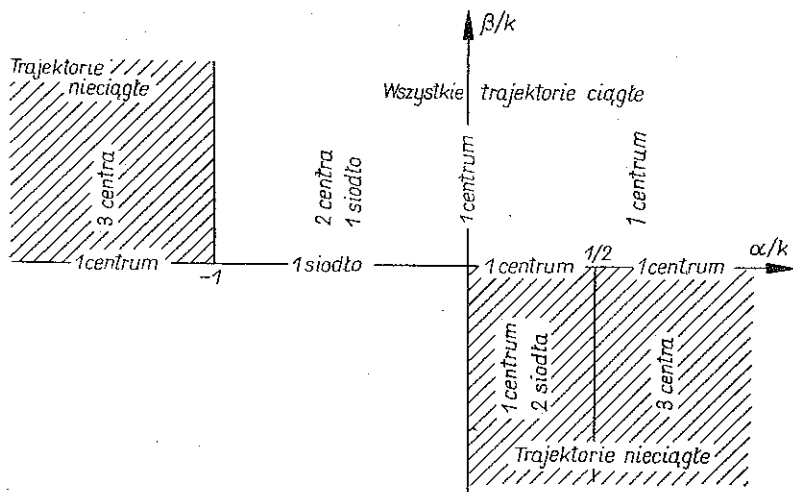
Rysunki 10c₁ i 10c₂ przedstawiają następujące obrazy fazowe:

Dla $h < V_{max}(x_{r_{2,3}}, z_{r_{2,3}})$ mamy w otoczeniu punktu spoczynku R_1 , który jest typu centrum, krzywe zamknięte; w otoczeniu linii nieciągłości trajektorie są nieciągłe (zjawisko odbicia sprężystego). Punkty $(x_{a_i}, 0, z_{a_i}, 0)$ ($i = 1, 2$) nie są punktami spoczynku.

Dla $h = V_{max}$ trajektoria przechodzi przez dwa punkty spoczynku R_j ($j = 2, 3$) będące siodłami. Trajektoria ta jest również nieciągła.

Dla $h > V_{\max}$ wszystkie trajektorie są nieciągłe.

Wyniki dotyczące obrazów fazowych omówionych przypadków przedstawiono na rys. 11 z zaznaczeniem ilości i rodzaju punktów spoczynku i charakteru trajektorii w zależności od współczynników α , β i k . W obszarach zakreskowanych występują trajektorie nieciągłe.



Rys. 11

Konstrukcję krzywych całkowitych dla układu przedstawionego na rys. 5 oparliśmy na całce energii w postaci (18), dla której potrzebna jest znajomość energii w postaci $V = V(x)$. Przy badaniu pełnego modelu przedstawionego na rys. 1 energia dodatkowej sprężyny $\int_0^x f_2(\xi) d\xi$ dodaje się do rzędnych poszczególnych gałęzi krzywej $V(x)$. Jeśli dodatkowa sprężyna jest liniowa, charakter ruchu nie ulega zmianie.

Literatura cytowana w tekście

1. J. M. SKOWROŃSKI, *The character of motion of nonlinear mechanical systems*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 4 (1962).
2. G. K. SUSLOW, *Mechanika Teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960.
3. Д. Стокер, *Нелинейные колебания в механических и электрических системах*, И. Л., Москва 1953.

Резюме

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЧНО БЕЗИНЕРЦИОННОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

В работе рассматривается сильно нелинейная механическая модель с одной степенью свободы без демпфирования, с упругими характеристиками, соединенными последовательно. Исследовались свойства движения этой системы, путем исследования кривой фазовых траекторий движения массы и движения точки соединения пружин. Обсуждался пример, иллюстрирующий разные случаи разрыва фазовых траекторий, основывая их конструкцию на интеграле энергии.

Summary

ON MOTION OF A PARTLY INERTIALESS CONSERVATIVE SYSTEM

The paper deals with a strongly nonlinear mechanical single degree of freedom dampless system with spring elements connected in series. The motion of this system has been investigated by considering the phase trajectories of mass and of connecting points between the springs. The given example illustrates various cases of the discontinuities of the phase trajectories constructed on the basis of the energy integral.

ZAKŁAD TEORII KONSTRUKCJI MASZYN
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1968 r.
