

ZAKŁAD BADAWCZY DOBROWIĄCTWA		
POZNAŃ		
L. dz. 300/35/3/68		
Wpl. 4 XI 68		
S.	Prof.	I. W.

my
c

CHARAKTERYSTYKA LAMINARNEGO PŁYNIĘCIA CIECZY NIENEWTONOWSKICH
ZA POMOCĄ MODELU REOLOGICZNEGO O TRZECH PARAMETRACH

WŁODZIMIERZ PARZONKA (WROCŁAW)

1. Wprowadzenie

Opis zachowania się cieczy nienewtonowskich metodami reologicznymi oparty jest z reguły na krzywych płynięcia, wyznaczanych doświadczalnie za pomocą wiskozymetrów rotacyjnych lub kapilarnych. Krzywe te mają jednak charakter mniej lub bardziej złożony; największą trudnością jest znalezienie dogodnych równań umożliwiających właściwą ich aproksymację. Podkreślić należy, że tylko w przypadku cieczy newtonowskich krzywe wyznaczone eksperymentalnie dobrze opisują rzeczywisty przebieg zjawiska. Natomiast w przypadku ciał nienewtonowskich otrzymujemy z pomiarów tzw. pozorne krzywe płynięcia, różniące się tym bardziej od krzywych dokładnych, im większa jest szczelina wiskozymetru. Charakterystyka płynięcia cieczy nienewtonowskich wymaga więc odpowiedniej aproksymacji za pomocą modelu reologicznego oraz wprowadzenia odpowiednich korekcyj do pozornych krzywych płynięcia.

Trudności matematyczne oraz brak wygodnych modeli aproksymujących złożone krzywe płynięcia dla cieczy nienewtonowskich są powodem wprowadzenia uproszczonych modeli reologicznych. Zakłada się, że ciecz jest nieściśliwa i izotermiczna, a jej zachowanie jest niezależne od czasu.

W praktyce używa się głównie dwuparametrowych wzorów Bingham'a [3] i de Waele'a-Ostwald'a [19]; niektóre laboratoria przemysłowe opierają nawet jeszcze dzisiaj charakterystykę tych substancji na modelu Newtona [33] i tzw. pozornej lepkości.

W niniejszej pracy przeprowadzono przegląd złożonych modeli płynięcia. Po stwierdzeniu braku wygodnych w stosowaniu wzorów dokonano analizy nowego trzyparametrowego wzoru Vočadli [35] z r. 1967 oraz zastosowano go do wyznaczenia krzywych płynięcia na podstawie danych doświadczalnych uzyskanych za pomocą wiskozymetru typu Couette'a. Zaletą tego wzoru polegają na tym, że jest on uogólnionym wzorem w stosunku do wzorów Newtona, Bingham'a i de Waele'a-Ostwald'a. Przyjęcie, że jeden lub dwa parametry są równe zero, prowadzi odpowiednio do tych wzorów. Dla ułatwienia interpretacji wzoru opracowano graficzną metodę analizy krzywych płynięcia, która umożliwia m.in. ustalenie współczynników reologicznych.

Metodę tę zastosowano do opisu krzywych płynięcia jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych. Stwierdzono, że model Vočadli lepiej opisuje ruch tych mieszanin niż stosowane poprzednio modele de Waele'a-Ostwalda i Bingham.

Posługując się będziemy następującymi oznaczeniami:

- T tensor naprężeń,
- $D/2$ tensor prędkości deformacji,
- \dot{G} prędkość deformacji,
- τ naprężenie ścinające,
- τ_0 próg płynięcia,
- η lepkość dynamiczna,
- η_p lepkość plastyczna,
- K, n, k współczynniki reologiczne,
- V prędkość średnia w rurze o średnicy D ,
- Re_{gen} uogólniona liczba Reynoldsa,
- M moment,
- r promień,
- l wysokość zanurzonej części cylindra wewnętrznego,
- τ_r wartość τ w szczeliny wiskozymetru Couette'a,
- τ_{R_1}, τ_{R_2} wartości τ_r dla $r = R_1$ i $r = R_2$,
- R_1, R_2 promienie odpowiednie cylindra wewnętrznego, zewnętrznego (wiskozymetru typu Couette'a),
- r_0 wartość graniczna r , występująca przy $\tau = \tau_0$,
- α^* charakterystyka wiskozymetru Couette'a, obliczona ze wzoru (3.3),
- $\dot{\phi}$ prędkość kątowna w odległości r od osi,
- Ω_1, Ω_2 prędkości kątowe cylindra wewnętrznego ($r = R_1, \dot{\phi} = \Omega_1$) i zewnętrznego ($r = R_2, \dot{\phi} = \Omega_2$),
- \dot{G}_p pseudoprędkość deformacji, obliczona ze wzoru (3.13),
- \dot{G} fikcyjna prędkość deformacji, określona zgodnie ze wzorem (3.16),
- \dot{G}_p^* $\dot{G} - \dot{G}_p$,
- $\dot{\Omega}$ $|\Omega_2 - \Omega_1|$ względna prędkość kątowa,
- \dot{G}_1 rzeczywista prędkość deformacji dla $r = R_1$.

2. Postawienie problemu

Zachowanie się ciał plastyczno-lepkich pod względem reologicznym może być opisane przez związek tensora naprężeń i tensora prędkości deformacji [28 i 34]. Dla przypadku ruchu laminarnego w wiskozymetrach rotacyjnych o cylindrach współosiowych oraz w wiskozymetrach kapilarnych i rurowych związek ten upraszcza się do równania wiążącego naprężenie styczne τ i prędkość deformacji \dot{G} (rys. 1).

W najprostszym przypadku, tj. cieczy Newtona, równanie to ma postać następującą:

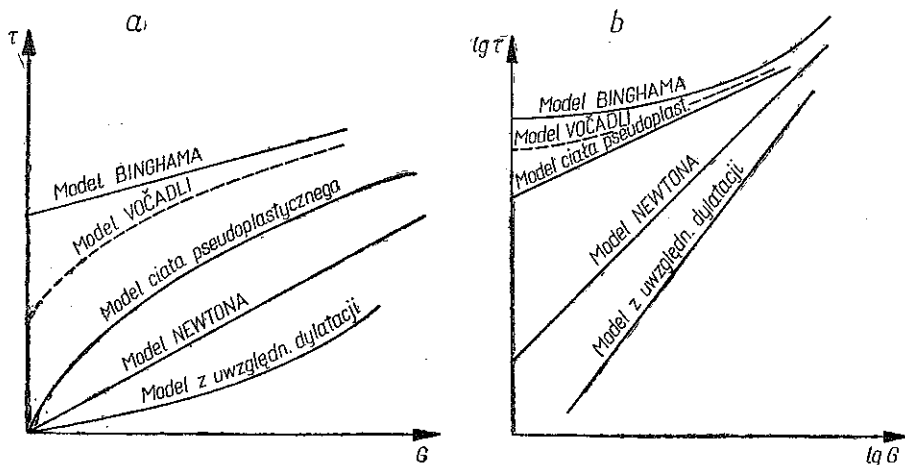
$$(2.1) \quad \tau = \eta \dot{G}.$$

Dla ciał idealnie plastycznych mamy wzór Bingham [3]

$$(2.2) \quad \tau = \tau_0 + \eta_p \dot{G}.$$

Dla cieczy mających zmienną lepkość stosuje się często wzór de Waele'a-Ostwalda

$$(2.3) \quad \tau = k \dot{G}^n.$$



Rys. 1

We wzorach (2.1) – (2.3) η jest lepkością dynamiczną, τ_0 granicą plastyczności, η_p lepkością plastyczną, k współczynnikiem sztywności, n liczbą strukturalną. Dla substancji pseudoplastycznych $0 < n < 1$, a dla ciał wykazujących dyatację $n > 1$.

Wzorów de Waele'a-Ostwalda (2.3) lub Bingham'a (2.2) stosując linearyzację używa się powszechnie nawet do aproksymacji krzywych złożonych. Np. ANNEN [1] proponuje określenie skorygowanych współczynników reologicznych k i n we wzorze (2.3) za pomocą stycznych przyłożonych w różnych punktach pozornej krzywej płynięcia. Metoda ta pozwala jednak tylko na określenie przybliżonych wartości współczynników reologicznych; w niektórych przypadkach może ona prowadzić do poważnych błędów.

Część badaczy, np. EPPRECHT [11] oraz szkoła radziecka (JUFIN [14], ŁASKOW [13] i inni), zaleca aproksymację krzywych płynięcia ciał plastycznych za pomocą wzoru Bingham'a (2.2), jeżeli są one chociaż w przybliżeniu liniowe. Również WELTMAN [36] uważa za celowe używanie tego wzoru dla wszystkich krzywych płynięcia mających odcinki proste.

Szczegółową krytykę stosowania wzoru (2.3) do opisu krzywych płynięcia o zmiennych współczynnikach k i n przeprowadził REINER [28]. Wykazał on, że wzór (2.3) odnosi się wyłącznie do przypadków, gdy k i n są stałe. Mimo tych zastrzeżeń wzór de Waele'a-Ostwalda jest jednak powszechnie stosowany do opisu krzywych płynięcia ciał plastyczno-lepkich przede wszystkim przez szkołę amerykańską (METZNER, DODGE i REED, por. [17, 18, 9, 38]) oraz szereg innych badaczy. METZNER twierdzi, że współczynniki reologiczne do wzoru (2.3) są w zasadzie stałe w szerokim zakresie prędkości deformacji, zwłaszcza przy przepływie cieczy nienewtonowskich w rurach. Z tym twierdzeniem nie zgadzają się jednak wyniki szeregu badań (por. [1, 6, 15, 34, 35 i 37]). Autor niniejszej pracy zbadał kilka mieszanin gruntowo-wodnych [21 i 23]. Stwierdził, że współczynniki k i n zależne są od prędkości de-

formacji i zmieniają się w dużych granicach dla tej samej krzywej płynięcia. Znacznie lepsze aproksymacje dał natomiast model Bingham'a.

W najnowszych pracach amerykańskich (np. RIPKENA i PILCHA [30], str. 10–11) używa się w dalszym ciągu wzoru (2.3) przy zastrzeżeniu, że «do czasu ustalenia ogólniejszej formuły, która wg wszelkiego prawdopodobieństwa będzie trzyparametrową, wzór potęgowy (2.3) będzie zależnością najczęściej stosowaną mimo pewnych zastrzeżeń».

Reasumując stwierdzić można, że model Bingham'a (2.2) nadaje się do opisu ciał, mających wyraźną granicę plastyczności τ_0 i prostą (w przybliżeniu) krzywą płynięcia $\tau = f(\dot{G})$ w obszarze $\tau > \tau_0$, natomiast wzór potęgowy de Waele'a-Ostwalda — dla substancji bez granicy plastyczności τ_0 , lecz o zmiennej lepkości, opisanej przez dwie stałe reologiczne k i n .

Istnieją jednak ciała nienuetonowskie mające wyraźną granicę płynięcia oraz zmienną lepkość [1, 15, 28, 36, 37 i 38]. Stosowanie wzorów (2.1), (2.2) i (2.3) dla tych ciał jest często zbyt dużym uproszczeniem; trzeba wtedy wprowadzić bardziej skomplikowane wzory i odpowiadające im modele reologiczne. Ze względu na wymogi wiskozymetrii i zastosowań praktycznych odpowiedni wzór dla takiego złożonego ciała powinien mieć następujące cechy:

- a) powinien nie zależeć od czasu,
- b) parametry powinny być stałe, tj. nie powinny zależeć od prędkości deformacji \dot{G} ,
- c) wzór uogólniony powinien w szczególnych przypadkach prowadzić do wzorów prostszych.

Dokonyamy z kolei przeglądu wzorów dla ciał złożonych. Jak wiadomo, do opisu płynięcia ciał złożonych zaproponowano szereg wzorów [15, 31, 35 i 38]. Najważniejsze z nich są następujące:

wzór Prandtla

$$(2.4) \quad \tau = A \sin^{-1}(\dot{G}/C),$$

wzór Eyringa

$$(2.5) \quad \tau = \dot{G}/B + C \sin(\tau/A),$$

wzór Powella-Eyringa

$$(2.6) \quad \tau = A/\dot{G} + B \sin h^{-1}(\dot{G}C).$$

wzór Williamsona

$$(2.7) \quad \tau = A/\dot{G}(B + \dot{G}) + \eta_{\infty} \dot{G},$$

wzór Steigera-Oryego

$$(2.8) \quad \dot{G} = A\tau^3 + C\tau,$$

wzór Brianta

$$(2.9) \quad \tau = \eta_{\infty} \dot{G} \left(1 + \frac{\tau_{\infty}}{A\eta_{\infty} \dot{G}} \right)^4,$$

wzór Van Wazera

$$(2.10) \quad \tau = k |\dot{G}|^{n-1} \dot{G} + \tau_0,$$

oraz wzór Ellisa

$$(2.11) \quad \dot{G} = \tau [\Phi_0 + \Phi_1 |\tau|^{(1/n)-1}].$$

We wzorach tych A , B i C lub τ_0 , η_∞ i τ_∞ są stałymi charakterystycznymi dla danej substancji, Φ_0 i Φ_1 — funkcjami. Modele (2.4) — (2.7) były analizowane przez WILKINSONA [38]. Stwierdził on, że zastosowanie ich jest znacznie trudniejsze niż wzorów (2.2) i (2.3) i nie przynosi istotnych korzyści. Nie są one również wzorami uogólnionymi. Dotyczy to również wzoru Steigera i Ory (2.8). Szersze zastosowanie do opisu ruchu cieczy nienewtonowskich mogą mieć natomiast modele (2.9) do (2.11).

Model Brianta zastosowany został przez MARTINA i le FURA [15] do aproksymacji krzywych płynięcia płuczek wiertniczych. Przy dużych prędkościach deformacji \dot{G} krzywa Brianta zbliża się do krzywej Bingham, a przy małych wartościach \dot{G} — do krzywej płynięcia ciała de Waele'a-Ostwalda.

Wzór (4.7) dyskutowany przez VAN WAZERA [34] jest rozszerzonym modelem potęgowym (2.3) z granicą płynięcia. Zaletą jego jest możliwość sprowadzenia go do wzorów dla ciał prostszych (2.1) — (2.3). Próg płynięcia τ_0 trzeba tu wyznaczyć bezpośrednio, a nie odczytać z pozornej krzywej płynięcia $\tau_{R_1} = f(\dot{G}_p)$; stałą n określa się z nachylenia krzywej $\log \Omega = f[\log(\tau_{R_1} - \tau_0)]$. Obliczenie stałej k jest jednak kłopotliwe i wymaga numerycznego całkowania funkcji określającej prędkość kątową Ω . Wzór Ellisa (4.8) jest wzorem zawierającym wzory Newtona i de Waele'a-Ostwalda jako przypadki szczególne [34]. Dla ciał mających granicę plastyczności VAN WAZER [34] podał uogólnione równanie (2.8) i odpowiedni wzór na Ω , którego rozwiązanie wymaga jednak jak poprzednio całkowania numerycznego.

Jak z powyższego wynika, żaden ze wzorów złożonych wymienionych w tym punkcie nie nadaje się w pełni do charakterystyki płynięcia cieczy nienewtonowskich. Nadają się one do opisu ciał badanych przez danych autorów [wzory (2.1) — (2.5)] lub też nie są wygodne w stosowaniu [wzory (2.6) — (2.8)].

3. Analiza wzoru Vočadli

VOČADLO zaproponował w pracy [35] wzór trzyparametrowy dla opisu złożonych krzywych płynięcia. Jego postać tensorowa jest następująca:

$$(3.1) \quad \mathbf{T} = \left\{ K \left(\left| \sqrt{\frac{1}{2} D_2} \right| \right)^{\frac{n-1}{n}} + \tau_0^{1/n} \left(\left| \sqrt{\frac{1}{2} D_2} \right| \right)^{-\frac{1}{n}} \right\}^n \mathbf{D}$$

dla $\frac{1}{2} (\mathbf{T} : \mathbf{T}) > \tau_0^2,$

$$\mathbf{D} = 0 \quad \text{dla} \quad \frac{1}{2} (\mathbf{T} : \mathbf{T}) \leq \tau_0^2,$$

gdzie D_2 jest drugim niezmiennikiem:

$$D_2 = \mathbf{D} : \mathbf{D} = D_{ij} D_{ji}$$

oraz gdzie symbol \mathbf{T} oznacza tensor naprężenia złożony z dziewięciu składowych, a symbol \mathbf{D} symetryczny tensor deformacji. Dla przypadku ruchu w wiskozymetrach rotacyjnych i kapilarnych (3.1) upraszcza się:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tau &= (\tau_0^{1/n} + K\dot{G})^n & \text{dla} \quad \tau > \tau_0, \\ \dot{G} &= 0 & \text{dla} \quad \tau \leq \tau_0. \end{aligned}$$

Wzór Vočadli jest jednym z kilku wzorów znanych w postaci tensorowej. Według VAN WAZERA [34] wzory w tym zapisie znane są wyłącznie dla ciał Bingham'a, de Waele'a-Ostwalda i Reinera-Philippoffa.

Po podstawieniu $K = \eta_p$ i $n = 1$ otrzymuje się ze wzoru (3.2) formułę Bingham'a (2.2); dla $\tau_0 = 0$ i $K^n = k$ wzór (3.2) przechodzi we wzór de Waele'a-Ostwalda (2.3) dla ciał pseudoplastycznych i wykazujących dylatację, wreszcie przy $\tau_0 = 0$, $K = \eta_p$ i $n = 1$ otrzymujemy wzór modelu Newtona (2.1). Krzywa płynięcia $\tau = f(\dot{G})$ dla ciała Vočadli nie jest linią prostą zarówno w układzie kartezjańskim jak i logarytmicznym w odróżnieniu od krzywych dla cieczy Bingham'a (prosta wyłącznie w układzie kartezjańskim) i de Waele'a-Ostwalda (prosta wyłącznie w układzie logarytmicznym, rys. 1).

Badanie modelu odnoszącego się do wzoru (3.2) dla przepływu laminarnego w wiskozymetrze kapilarnym przeprowadził Vočadlo [35]. Podał on metodę określania stałych reologicznych na podstawie danych doświadczalnych oraz wykresu $\tau_{\max} = f(8V/D)$. Vočadlo podał także równanie, które spełniają parametry bezwymiarowe, $\Phi(n, c_f, \text{Re}_{\text{gen}}, X) = 0$, dla określenia współczynnika oporu rur c_f , jak również poprawki dla energii kinetycznej i dla ilości ruchu. Dla tych parametrów i wartości poprawkowych podał on w pracy [35] rozwiązanie równań ogólnych za pomocą maszyn cyfrowych Elliott 503 i Mińsk 2/22 otrzymując rodziny krzywych i tablice numeryczne.

W wiskozymetrach rotacyjnych typu Couette'a mierzy się naprężenia styczne na ścianie cylindra wewnętrznego τ_{R_1} w zależności od prędkości kątowej $\Omega = |\Omega_2 - \Omega_1|$. Następnie opracowuje się z reguły wykresy

$$\tau_{R_1} = f\left(\frac{2\Omega}{1 - 1/\alpha^*}\right),$$

przy czym α^* zdefiniowane jest następująco:

$$(3.3) \quad \alpha^* = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{\tau_{R_1}}{\tau_R},$$

gdzie $R = r_0 = R_1 \sqrt{\frac{\tau_{R_1}}{\tau_0}}$ dla niepełnego ścinania oraz $R = R_2$ dla pełnego ścinania. W przypadku cieczy nienewtonowskich podstawowym problemem jest określenie metody obliczania stałych reologicznych na podstawie wykresu $\tau_{R_1} = f(\dot{G}_p)$, tzw. pseudoreogramu. W niektórych przypadkach konieczne jest również opracowanie wykresu dla ciała rzeczywistego (tzw. «basic shear diagram») dla umożliwienia pełnej charakterystyki płynięcia ciała niezależnie od przyrządu.

Pierwsze z tych zagadnień dla modelu (3.2) zostało rozwiązane przez autora i VOČADLA [25]. Podaje poniżej podstawowe wyniki tej pracy.

Dla ruchu ciał plastyczno-lepkich w viskozymetrze Couette'a mamy następujące wzory dla naprężenia stycznego τ i dla prędkości deformacji G [28 i 24]:

$$(3.4) \quad \tau = \frac{M}{2\pi lr^2}, \quad \dot{G} = r \frac{d\dot{\Phi}}{dr} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right).$$

Ogólnie można napisać

$$(3.5) \quad r \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) = f(\tau).$$

Dla wzoru (3.2) mamy

$$(3.6) \quad f(\tau) = (\tau^{1/n} - \tau_0^{1/n}).$$

Po scałkowaniu (3.5) i przyjęciu kinematycznego warunku granicznego, jakim jest brak poślizgu na ścianie cylindrów, otrzymuje się następujący wzór na rozkład prędkości:

$$(3.7) \quad u = \frac{n}{2K} \left(\frac{M}{2\pi l} \right)^{\frac{1}{n}} \left(rR_1^{-\frac{2}{n}} - r^{-\frac{2}{n}+1} \right) - \frac{r\tau_0^{-\frac{1}{n}}}{K} \ln \frac{r}{R_1}.$$

Z punktu widzenia warunków ścinania i rozkładu prędkości, można wyróżnić trzy możliwe przypadki:

brak ruchu

$$(3.8) \quad \tau_{R_1} = \frac{M}{2\pi lR_1^2} \leq \tau_0,$$

ściananie częściowe

$$(3.9) \quad \tau_{R_1} > \tau_0 > \tau_{R_2} = \frac{M}{2\pi lR_2^2},$$

ściananie całkowite (pełne)

$$(3.10) \quad \tau_{R_2} \geq \tau_0.$$

Dla prędkości kątowej względnej Ω otrzymujemy następującą formułę:

$$(3.11) \quad \Omega = |\Omega_2 - \Omega_1| = \frac{n}{2K} \left(\frac{M}{2\pi l} \right)^{\frac{1}{n}} \left(R_1^{-\frac{2}{n}} - R_2^{-\frac{2}{n}} \right) - \frac{\tau_0^{1/n}}{K} \ln \frac{R}{R_1}.$$

Przy pomiarze krzywych płynięcia należy wypełnić warunek (3.9) lub (3.10). Wprowadzając zależność (3.3), otrzymujemy następujący wzór na τ_{R_1} :

$$(3.12) \quad \tau_{R_1} = \left(\frac{2\Omega}{1 - \frac{1}{\alpha^*}} \frac{K}{n} \frac{1 - \frac{1}{\alpha^*}}{1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}}} + \frac{\tau_0^{1/n}}{n} \frac{\ln \alpha^*}{1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}}} \right)^n.$$

W strefie częściowego ścinania α^* nie jest stałe i zmienia się w zależności od r_0 . Ustalenie krzywej płynięcia jest dla tego przypadku bardzo trudne, gdyż wymaga dodatkowego pomiaru granicy plastyczności τ_0 zgodnie ze wzorem (3.8); znając τ_0

możemy dopiero obliczyć promień zasięgu upłynnienia badanej substancji i skonstruować wykres. Zagadnienie to było przedmiotem badań autora i WOLSKIEGO [26]. W oparciu o pomiar przeprowadzony równoległe wiskozymetrem oraz wisko-
testerem stwierdzono, że dla mieszanin gruntowo-wodnych możliwy jest bezpośredni pomiar τ_0 przez stopniowe zmniejszanie prędkości kątowej Ω i zmierzenie naprężenia stycznego τ_{R_1} , odpowiadającego prędkości kątowej $\Omega \rightarrow 0$. Dla szeregu substancji pomiar taki jest jednak technicznie trudny i wymaga dużego doświadczenia pomiarowego. Konieczne jest wykonanie badań za pomocą dwóch lub więcej cylindrów, przy czym wynik dla τ_0 powinien być zbliżony. Wymienione trudności powodują, że z reguły dąży się podczas badań wiskozymetrycznych do pomiaru pozornej krzywej płynięcia w strefie pełnego ścinania substancji w szczelinie wiskozymetru, tj. realizacji warunku (3.10).

Należy podkreślić, że pseudoprędkość deformacji

$$(3.13) \quad \dot{G}_p = \frac{2\Omega}{1 - \frac{1}{\alpha^*}}$$

różni się od dokładnej wartości rzeczywistej prędkości deformacji dla ciał nie-newtonowskich \dot{G} . W przypadku ciała opisanego przez (3.2) prędkość tę określa wzór

$$(3.14) \quad \dot{G} = \frac{\tau_0^{1/n}}{K} \left[\frac{2K}{n} \frac{\left(\frac{\Omega}{\tau_0^{1/n}} + \ln \alpha^{*1/n} \right) \left(\frac{R_1}{r} \right)^{2/n}}{1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}}} - 1 \right].$$

Porównanie (3.13) i (3.14) wykazuje, że przyjęcie pozornej prędkości deformacji \dot{G}_p równej rzeczywistej prędkości deformacji \dot{G} prowadzi do poważnych rozbieżności i to nawet w przypadku wąskiej szczeliny wiskozymetrycznej. Dokładne rozwiązanie polega na określaniu stałych reologicznych na podstawie pomiarów τ_{R_1} i Ω z uwzględnieniem różnic pomiędzy \dot{G} a \dot{G}_p lub między wykresem $\tau = f(\dot{G})$ a wykresem $\tau_{R_1} = f(\dot{G}_p)$. Dla modeli prostszych (2.1), (2.2) i (2.3) istnieją metody określania tych stałych reologicznych bezpośrednio z wykresu $\tau_{R_1} = f(\dot{G}_p)$; jedną z metod podał autor niniejszej pracy [22 i 24]. Dla ciał opisanych przez wzór Vočadli (3.2) ta droga nie wydaje się możliwa. VOČADLO i autor podali w pracy [25] rozwiązanie prostsze, polegające na przekształceniu pozornej krzywej płynięcia w krzywą pomocniczą. Ma ono charakter ogólny, umożliwia bowiem równocześnie charakterystykę prostszych ciał (Binghama i de Waele'a-Ostwaldal) lub aproksymację krzywych płynięcia badanych substancji za pomocą tych modeli (rys. 2). Wzór (3.12) można napisać następująco:

$$(3.15) \quad \tau_{R_1}^{1/n} = \frac{K}{n} \frac{1 - \frac{1}{\alpha^*}}{1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}}} \left[\dot{G}_p + \frac{\tau_0^{1/n}}{K} \frac{\ln \alpha^*}{\left(1 - \frac{1}{\alpha^*} \right)} \right].$$

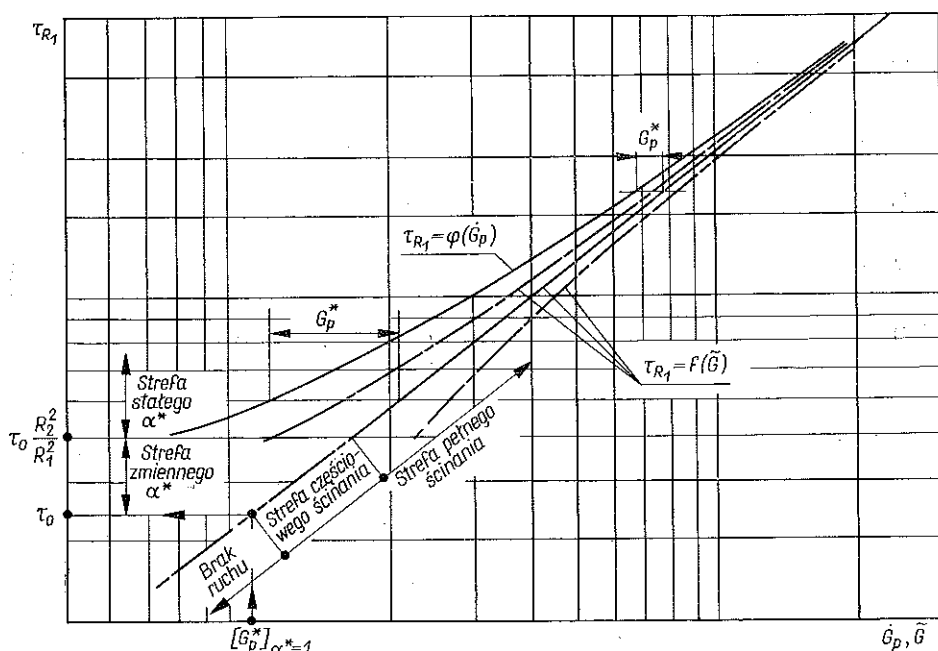
Wprowadźmy do (3.15) fikcyjną prędkość deformacji

$$(3.16) \quad \tilde{G} = \dot{G}_p + \frac{\tau_0^{1/n}}{K} \frac{\ln \alpha^*}{\left(1 - \frac{1}{\alpha^*}\right)} = \dot{G}_p + G_p^*$$

Możemy wtedy napisać

$$(3.17) \quad \log \tau_{R1} = n \log \tilde{G} + n \log \frac{K}{n} \frac{1 - \frac{1}{\alpha^*}}{1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}}}$$

Ze wzoru (3.17) widać, że ciało opisane przez (3.2) daje prostą $\log \tau_{R1} = f(\log \tilde{G})$.



Rys. 2

Ze wzoru (3.16) wynika, że G_p^* zmienia się w zależności od α^* ; jest ono stałe wyłącznie dla $\alpha^* = \text{const}$, tj. w strefie pełnego ścinania. Najmniejszą wartość G_p^* otrzymuje się dla $\alpha_{\min}^* = 1$, która występuje, gdy $R_2^2/R_1^2 \rightarrow 1$:

$$(3.18) \quad [G_p^*]_{\alpha^*=1} = [G_p^*]_{\alpha^*=\frac{R_2^2}{R_1^2}} \frac{1 - \frac{1}{\alpha^*}}{\ln \alpha^*} = \frac{\tau_0^{1/n}}{K}$$

Metoda proponowana przez VOČADLA i autora polega na określeniu tej wartości G_p^* w strefie pełnego ścinania, którą należy dodać do zmierzonej pseudoprędkości deformacji \dot{G}_p^* , aby otrzymać szukaną prostą $\log \tau_{R1} = f(\log \tilde{G})$ (rys. 2). Po znale-

zieniu prostej $\log \tau_{R_1} = f(\log \tilde{G})$ spełniającej wymienione wyżej warunki można na jej podstawie określić stałe reologiczne τ_0 , K i n w sposób następujący:

a) współczynnik n określa się z nachylenia prostej

$$(3.19) \quad n = \frac{\Delta \log \tau_{R_1}}{\Delta \log \tilde{G}};$$

b) gra nicaplastyczności τ_0 jest tą wartością τ_{R_1} , która odpowiada czynnikowi $[G_p^*]_{\alpha^*=1}$ (rys. 2). Wynika to z tego, że gdy $\alpha^* \rightarrow 1$, $\tau_{R_1} \rightarrow \tau_0$;

c) stałą K określa się ze wzoru (3.18), który można również napisać następująco:

$$(3.20) \quad K = \frac{\tau_0^{1/n}}{[G_p^*]_{\alpha^*=1}}.$$

Wzór (3.2) opisuje zachowanie się substancji bardziej złożonych. Dla modeli prostszych, do których odnoszą się wzory (2.1), (2.2) i (2.3) otrzymuje się następujące wzory na podstawie (3.12):

a) dla modelu Newtona, przyjmując $n = 1$, $K = \eta$ oraz $\tau_0 = 0$, mamy

$$(3.21) \quad \tau_{R_1} = \dot{G}_p \eta;$$

b) dla modelu Bingham'a po podstawieniu $n = 1$ oraz $K = \eta_p$ otrzymujemy

$$(3.22) \quad \tau_{R_1} = \dot{G}_p \eta_p + \tau_0 \frac{\ln \alpha^*}{1 - \frac{1}{\alpha^*}};$$

c) dla modelu de Waele'a-Ostwalda wprowadzając $\tau_0 = 0$, $K^n = k$ uzyskujemy

$$(3.23) \quad \tau_{R_1} = k \left(\frac{\dot{G}_p}{n} \frac{1 - \frac{1}{\alpha^*}}{1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}}} \right)^n.$$

Ze wzorów (3.21) - (3.23) widać, że dla wymienionych modeli prostszych można określić stałe reologiczne bezpośrednio z wykresu $\tau_{R_1} = f(\dot{G}_p)$. W przypadku ciała Newtona krzywa mierzona pokrywa się z rzeczywistą krzywą płynięcia i nie wymaga żadnych korekcji. Natomiast substancje binghamowskie oraz ciała pseudoplastyczne i zmieniające objętość mają pozorne krzywe płynięcia, różniące się od krzywych rzeczywistych (dokładnych). Niemniej dla obu modeli dwuparametrowych, do których odnoszą się wzory (2.2) i (2.3), możliwa jest łatwa korekcja krzywych pozornych płynięcia: w obu przypadkach w strefie pełnego ścinania są one prostymi równoległymi do krzywych rzeczywistych (ściśle rzecz biorąc krzywa płynięcia dla ciała Bingham'a jest prostą w układzie współrzędnych kartezjańskich, a krzywa płynięcia dla ciała de Waele'a-Ostwalda prostą w układzie współrzędnych logarytmicznych). Stałe reologiczne η_p (Bingham) i n (de Waele-Ostwald) otrzymuje się wprost z nachylenia pozornej krzywej płynięcia. Współczynniki τ_0 (Bingham) [lub k

(de Waele-Ostwald) określa się z korekcji pozornych wartości tych współczynników τ'_0 lub k_{ap} zgodnie ze wzorami (3.22) i (3.23) przyjmując $\dot{G}_p = 0$ i $\tau_{R_1} = \tau'_0$ w (3.22) oraz $\dot{G}_p = 1$ i $\tau_{R_1} = k_{ap}$ w (3.23). Dokładne wyprowadzenie tych wzorów oraz metodę korekcji podał autor w [24].

4. Wyznaczenie rzeczywistych prędkości deformacji

Rzeczywista prędkość deformacji na ścianie cylindra wewnętrznego jest określona zgodnie ze wzorem (3.4) przez

$$(4.1) \quad \dot{G}_1 = R_1 \left(\frac{d\dot{\Phi}}{dr} \right)_1.$$

Ze wzorów (4.1) i (3.2) otrzymujemy

$$(4.2) \quad \tau_{R_1} = \left[\tau_0^{1/n} + KR_1 \left(\frac{d\dot{\Phi}}{dr} \right)_1 \right]^n = (\tau_0^{1/n} + K\dot{G}_1)^n.$$

Eliminując τ_{R_1} ze wzorów (3.12) i (4.2) znajdziemy

$$(4.3) \quad \dot{G}_1 = \dot{G}_p \frac{1 - \frac{1}{a^*}}{n \left(1 - \frac{1}{a^{*1/n}} \right)} + \frac{\tau_0^{1/n}}{K} \left[\frac{\ln a^*}{n \left(1 - \frac{1}{a^{*1/2}} \right)} - 1 \right].$$

Na podstawie równania (4.3) otrzymujemy następujące wzory wiążące \dot{G}_1 i \dot{G}_p dla modeli prostszych:

a) dla ciała Newtona przyjmując jak poprzednio $n = 1$, $K = \eta$ oraz $\tau_0 = 0$

$$(4.4) \quad \dot{G}_1 = \dot{G}_p;$$

b) dla ciała Bingham'a po przyjęciu $n = 1$ i $K = \eta_p$

$$(4.5) \quad \dot{G}_1 = \dot{G}_p + \frac{\tau_0}{\eta_p} \left(\frac{\ln a^*}{1 - \frac{1}{a^*}} - 1 \right);$$

c) dla ciała de Waele'a-Ostwalda podstawiając $\tau_0 = 0$ i $K^n = k$

$$(4.6) \quad \dot{G}_1 = \dot{G}_p \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{1}{a^*}}{1 - \frac{1}{a^{*1/n}}}.$$

Wzory (4.5) i (4.6) wyprowadzone zostały przez autora również w pracy [24] na innej drodze.

Sposób otrzymywania krzywej dla ciała rzeczywistego krzywej pozornej płynięcia.

Uprościmy (4.3), wprowadzając oznaczenia

$$(4.7) \quad A = \frac{1 - \frac{1}{\alpha^*}}{n \left(1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}} \right)}, \quad B = \frac{\ln \alpha^*}{n \left(1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}} \right)}.$$

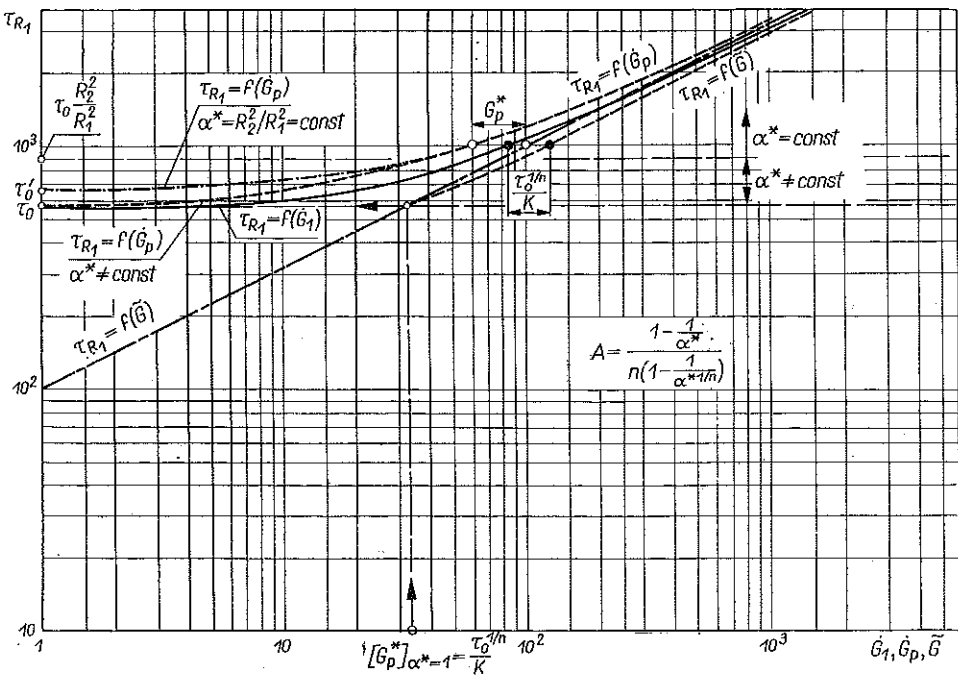
Otrzymamy przy tych oznaczeniach

$$(4.8) \quad \dot{G}_1 = \dot{G}_p A + \frac{\tau_0^{1/n}}{K} (B - 1).$$

W strefie pełnego ścinania substancji w szczelinie wiskozymetrycznej $\tau_{R_1} \geq \tau_0 \frac{R_2^2}{R_1^2}$, $\alpha^* = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \text{const}$; A i B są więc w tej strefie stałymi dla danego przyrządu i dla danego materiału, dla którego odnosi się wzór (3.2). W przypadku ścinania częściowego ($\tau_0 < \tau_{R_1} < \tau_0 \frac{R_2^2}{R_1^2}$) charakterystyka przyrządu α^* jest zmienna i osiąga swoją wartość minimalną $\alpha^* = 1$ dla $R = R_1$. Dla $\tau_{R_1} \rightarrow \tau_0$, $\alpha^* \rightarrow 1$, $A \rightarrow 1$ i $B \rightarrow 1$; otrzymujemy więc

$$(4.9) \quad [\dot{G}_1]_{\alpha^*=1} = \dot{G}_p = 0.$$

Wzory (4.7) do (4.9) pozwalają na określenie krzywej dla ciała rzeczywistego na podstawie krzywej pozornej płynięcia $\tau_{R_1} = f(\dot{G}_p)$. Tę krzywą dla ciała rzeczywistego



Rys. 3

$\tau_{R_1} = f(\dot{G}_1)$ można znaleźć również odmienną drogą z zależności rzeczywistej prędkości deformacji \dot{G}_1 od fikcyjnej prędkości \tilde{G} . Na podstawie wzorów (3.16), (3.21) i (4.3) dochodzimy do wzoru

$$(4.10) \quad \dot{G}_1 = \tilde{G} \frac{1 - \frac{1}{\alpha^*}}{n \left(1 - \frac{1}{\alpha^{*1/n}} \right)} - \frac{\tau_0^{1/n}}{K}$$

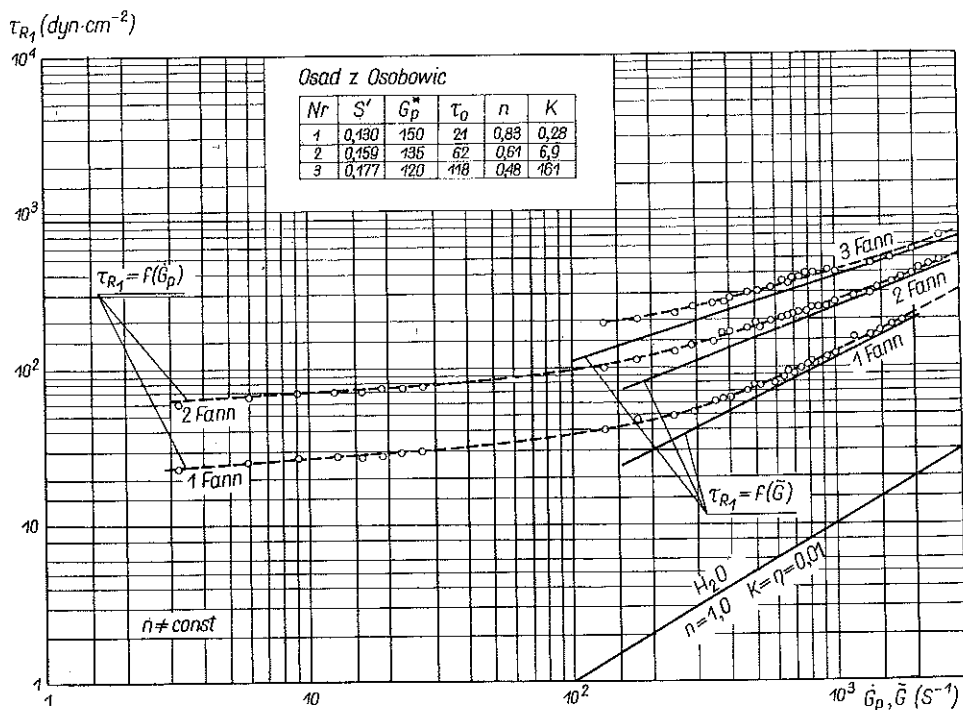
Wprowadzając A zgodnie z (4.7) otrzymujemy wzór uproszczony

$$(4.11) \quad \dot{G}_1 = \tilde{G} A - \frac{\tau_0^{1/n}}{K}$$

Określenie krzywej płynięcia dla rzeczywistego ciała, do którego odnosi się wzór (3.2), należy więc rozpocząć od opracowania wykresu $\tau_{R_1} = f(\dot{G}_p)$, znalezienia prostej $\log \tau_{R_1} = f(\log \tilde{G})$ i obliczenia stałych reologicznych τ_0 , K i n ; po wykonaniu tych czynności można już określić szukaną krzywą na podstawie krzywej pomocniczej [wzory (4.10) i (4.11)] bądź też w oparciu o krzywą pozorną płynięcia [wzory (4.7–4.9)]. Rysunek 3 ilustruje sposób określania krzywej dla ciała rzeczywistego.

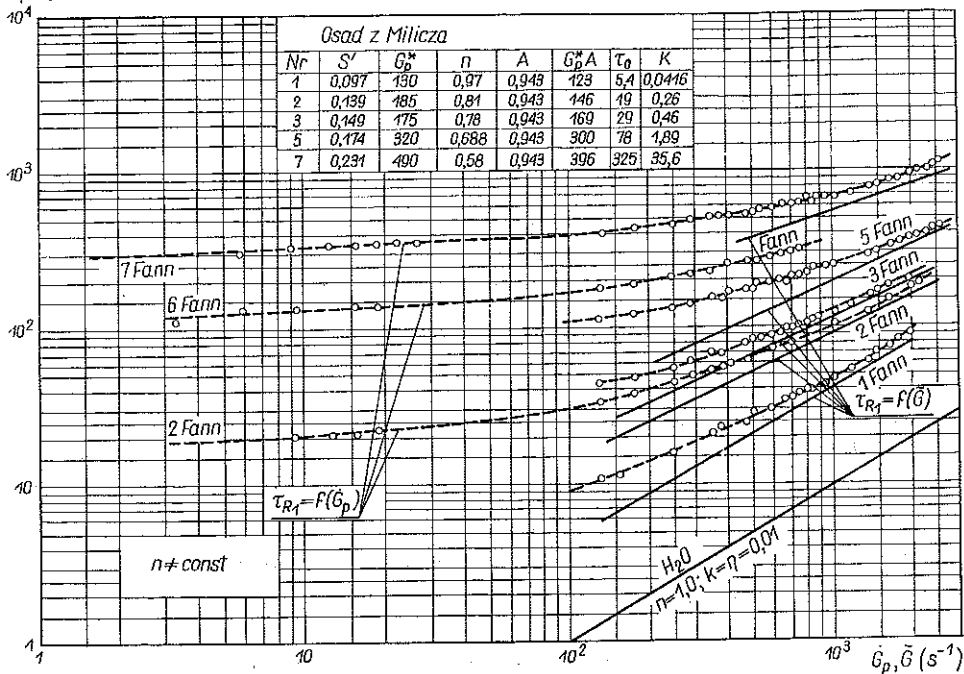
5. Zastosowanie wzoru o trzech parametrach do opisu ciał plastyczno-lępkich

Autor zastosował model (3.2) i metodę opisaną powyżej do aproksymacji krzywych płynięcia jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych przy użyciu wisko-



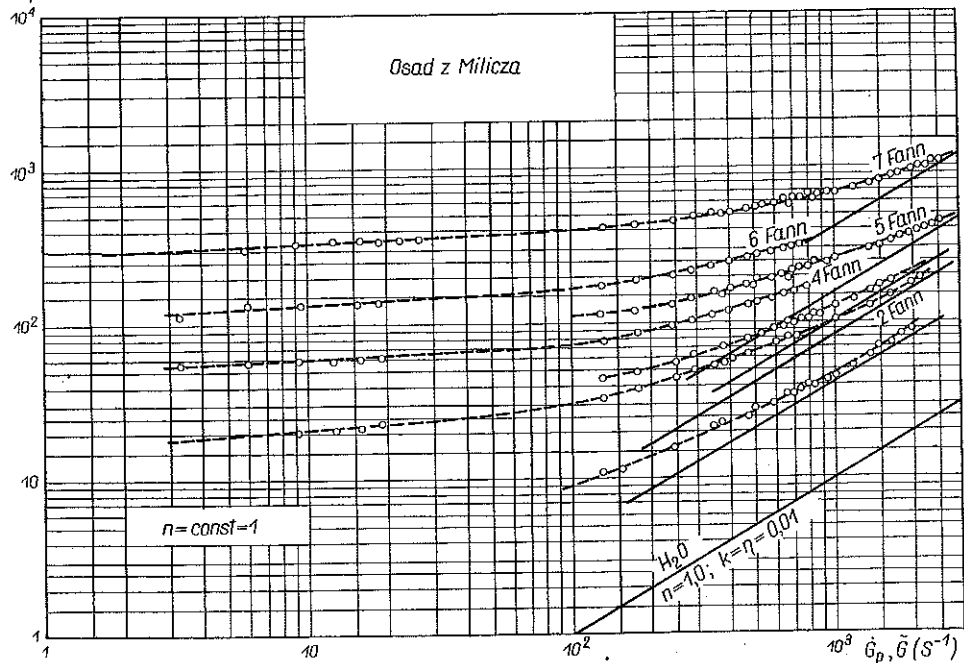
Rys. 4

$\tau_{R1}(\text{dyn}\cdot\text{cm}^{-2})$



Rys. 5

$\tau_{R1}(\text{dyn}\cdot\text{cm}^{-2})$



Rys. 6

zometru FANN. Ustalono stalereologiczne τ_0 , K i n dla kilku różnych koncentracji s' każdego z dwóch badanych gruntów zwięzłych. Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono wykresy dla modelu Vočadli wraz z tabelami zawierającymi wartości liczbowe stałych reologicznych jako funkcji s' . Z tablic tych widać, że współczynniki reologiczne τ_0 i K rosną wraz z koncentracją s' , natomiast stała n maleje jednocześnie z s' . Na rysunku 6 pokazano natomiast próbę przybliżenia krzywych płynięcia mieszanin jednego z badanych gruntów za pomocą modelu Bingham'a, tj. dla przypadku $n = 1$. Widać wyraźnie, że $G_p^* \neq \text{const}$ dla wszystkich krzywych pozornych płynięcia; dopiero wprowadzenie $n \neq 1$, tj. pełnego modelu Vočadli pozwala na właściwą aproksymację krzywych.

Wnioski

Z przedstawionej pracy wynikają następujące podstawowe wnioski.

1. Wzór trzyparametrowy Vočadli (3.2), będący uogólnionym wzorem Newtona, Bingham'a i de Waele'a-Ostwald'a, zasługuje na bliższą analizę pod kątem widzenia przydatności do opisu ruchu cieczy nienewtonowskich. Nadaje się on zwłaszcza do opisu ciał mających wyraźną granicę plastyczności τ_0 oraz zmienną lepkość.

2. Podane przez VOČADLA i autora rozwiązanie dla modelu (3.2) dla wiskozymetru Couette'a umożliwia aproksymację złożonych krzywych pozornych płynięcia, uzyskanych za pomocą tego wiskozymetru. W porównaniu z wiskozymetrem kapilarnym wiskozymetr Couette'a ma duże zalety. Wyniki pomiarów nie wymagają bowiem korekcji (w odróżnieniu od krzywych uzyskanych z badań rurowych) drogą skomplikowanych poprawek dla energii kinetycznej i dla ilości ruchu.

3. Podane w niniejszej pracy wzory na rzeczywistą prędkość deformacji umożliwiają bardziej ściśle porównanie wyników badań plastyczno-lepkiego płynięcia materiałów przy użyciu różnych przyrządów.

4. Wstępne próby zastosowania modelu Vočadli do opisu krzywych płynięcia mieszanin gruntowo-wodnych dały pozytywne wyniki. Stwierdzono, że model ten jest dokładniejszy od modelu Bingham'a i de Waele'a-Ostwald'a.

Literatura cytowana w tekście

1. G. ANNEN, *Zur Berechnung der Reibungsverluste von Klärschlamm, Das Gas- und Wasserfach, Wasser-Abwasser*, **12** (1963), 342-346.
2. H. E. BABBETT, D. H. CALDWELL, *The Flow of Muds, Sludges and Suspensions in Circular Pipe*. Trans. Amer. Inst. Chem. Engrs., **37** (1941), 237-266.
3. E. C. BINGHAM, *Fluidity and Plasticity*, New York 1922.
4. J. BRIANT, *Revue de l'Institut Franç. du Pétrole*, **11** (1956), 113-133, 247-287.
5. R. S. BRODKEY, *Translating terms for Non-Newtonian flow*, Ind. and Engineering Chemistry, **9**, **54** (1962), 44-48.
6. R. LE BARON BOWEN, JR., *Interpreting and converting data*, Chem. Engin., (1961), 131-136.
7. J. G. BRODNYAN, F. H. GASKINS, W. PHILIPPOFF, *Correlation between rheological parameters measured in instruments of different geometries*, Symp. on Non-Newtonian Viscometry, Washington, X/1960, 14-25.
8. B. P. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows, Theory and Experiment*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

9. D. W. DODGE, A. B. METZNER, *Turbulent flow of Non-Newtonian systems*, A. I. Ch. E. Journal, 2, 5 (1959), 189-204.
10. F. R. EIRICH, *Rheology, Theory and Applications*, 1, New York 1956.
11. A. G. ЕРРЕЧТ, *Le comportement rhéologique véritable des substances plastiques*, Revue Inter. de la Chocolaterie, 7, 1959.
12. Б. С. ФИЛАТОВ, *Определение реологических свойств суспензий глины в условиях установившегося движения*, Коллоидный Жур., 2, 16 (1954), 141-149.
13. С. В. ЯКОВЛЕВ, И. М. ЛАСКОВ, *Перекачка ила и осадков сточных вод*, Москва 1959.
14. А. П. ЮФИН, *Движение глинистых гидросмесей по трубам*, Издат. АН СССР, Гидравлика сооружений и динамика речных русел, Москва 1959, 54-61.
15. M. MARTIN, B. LE FUR, *Écoulement laminaire d'un fluide non newtonien dans un tuyau. Applications aux boues de forage*, Colloque de l'Association de Recherche sur les Techn. de Forage, IFP Paris, Juin 1963, Commun. Nr 3.
16. E. M. MERRILL, *Pseudoplastic Flow — Viscometry, Correlations of shear stress vs. shear rate, and prediction of laminar flow in tubes*, J. of Colloid Sci., 11 (1956), 1-14.
17. A. B. METZNER, J. C. REED, *Flow of Non-Newtonian fluids-correlation of the laminar, transition, and turbulent flow regions*, A.I.Ch.E.J. (1955), 434-440.
18. A. B. METZNER, M. GRAHAM PARK, *Turbulent flow characteristics of viscoelastic fluids*, J. Fluid Mech., vol. 20, 1964, 291-303.
19. W. OSTWALD, *Über die Geschwindigkeitsfunktion der Viskosität disperser Systeme*, Kolloid-Ztg., 36 (1925), 99-117.
20. S. ОКА, *The Principles of Rheometry. Rheology — Theory and Applications*, New York 1959, 17-82.
21. W. PARZONKA, *Reologiczne zachowanie się jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych*, IPW, Wrocław 1966.
22. W. PARZONKA, *Mixtures homogènes sol-eau. Mesures viscosimétriques et comportement rhéologique*, Laboratoires de Mécanique des Fluides, Université de Grenoble, 1967.
23. W. PARZONKA, *Comportement rhéologique des mixtures homogènes sol-eau*, Arch. Hydrotechniki, 14 (1967), 297-340.
24. W. PARZONKA, *Teoria wiskozymetrów dla jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych*, Rozpr. Inżyn. (w druku).
25. W. PARZONKA, J. VOČADLO, *Modèle à trois paramètres pour les corps viscoplastiques. Solution pour le viscosimètre rotatif type Couette*, C.R. Acad. Sc. Paris, 264 (1967), 745-748.
26. W. PARZONKA, W. WOLSKI, *Przybliżone określanie charakterystyk plastyczno-lepkiego płynnienia jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych za pomocą pojedynczego cylindra wiskotestera*, Arch. Hydrotechniki (w druku).
27. M. REINER, *Über die Strömung einer elastischen Flüssigkeit in einer Kapillare*, Kolloid-Ztg., 39 (1926), 80-87.
28. M. REINER, *Deformation, Strain and Flow*, London 1960.
29. M. REINER, R. RIWLIN, *Über die Strömung einer elastischen Flüssigkeit im Couette Apparat*, Kolloid-Ztg., 43 (1927), 43.
30. J. F. RIPKEN, M. PILCH, *Studies of the Reduction of Pipe Friction with the Non-Newtonian Additive CMC*, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Minneapolis, Minnesota 1963.
31. K. STEIGER-TRIPPI, A. ORY, *De l'interprétation des courbes d'écoulement*, C.R. de Conférence de Dr Epprecht, Zurich 1960.
32. D. G. THOMAS, *Transport Characteristics of Suspensions*, part IV. A.I.Ch.E. J., 8 (1962), 266-271.
33. J. ULBRECHT, P. MITSCHKA, *Chemické inženýrství newtonovských kapalin*, Praha 1965.
34. J. R. VAN WAZER, J. W. LYONS, K. Y. KIM, R. K. COLWELL, *Viscosity and Flow Measurement*, New York-London 1963.
35. J. VOČADLO, *Praca doktorska*, ČSAV, Praga 1967.

36. R. N. WELTMAN, *Friction factors for flow of Non-Newtonian materials in pipelines*, Ind. Eng. Chem., 48 (1956), 386-7.
37. R. N. WELTMAN, P. W. KUHN, *An Automatic Viscometer for Non-Newtonian Material*. NACA Techn. Note 3510, Washington 1955.
38. W. L. WILKINSON, *Non-Newtonian Fluids Mechanics, Mixing and Heat Transfer*, Pergamon Press, 1960.
39. М. П. Волярович, *Исследование реологических свойств дисперсных систем*, Коллоидный Журн., 3, 16 (1954).

Резюме

ХАРАКТЕРИСТИКА ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ,
С ПОМОЩЬЮ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ

В работе дается обзор формул, служащих для описания кривых течения неньютоновских жидкостей. Констатируется, что двухпараметровые формулы Бингема и де Вель-Освальда, часто не достаточны для точного описания, тогда как многочисленные формулы для сложных тел не удобны в применении. Большие достоинства проявляет предложенная в последнее время (1967) формула Вочадли, представленная в тензорном виде и упрощающаяся для ротационных и капиллярных вискозиметров до формулы

$$\tau = (\tau_0^{1/n} + k\dot{G})^n \quad \text{для } \tau > \tau_0,$$

$$\dot{G} \quad \text{для } \tau \leq \tau_0.$$

Эта формула является обобщенной формулой, по отношению формул Ньютона, де Вель-Освальда и Бингема.

В работе дается: решение модели Вочадли для ротационного вискозиметра типа Куэт, графический метод определения реологических постоянных τ_0 , K , n и преобразование измерительной кривой в действительную кривую течения. Этот метод был успешно применен для описания кривых течения, однородных грунто-водных смесей. Подтверждается, что формула Вочадли лучше годится для описания движения этих смесей, чем применяемые, до сих пор, модели Бингема и де Вель-Освальда.

Summary

DESCRIPTION OF LAMINAR FLOW OF NON-NEWTONIAN LIQUIDS
BY MEANS OF A RHEOLOGIC THREE-PARAMETER MODEL

The present paper contains a review of equations for describing the curves of flow of non-Newtonian liquids. It is found that the two-parameter equations of Bingham and de Waele—Ostwald are often insufficient for accurate description. On the other hand many formulae for complex bodies are not convenient. Considerable advantages are offered by the recent (1967) Vočadlo equation expressed in a tensor form and reducing for rotating and capillary viscometers to the formulae

$$\tau = (\tau_0^{1/n} + K\dot{G})^n \quad \text{for } \tau > \tau_0,$$

$$\dot{G} = 0 \quad \text{for } \tau \leq \tau_0.$$

This is a generalization of the formulae of Newton, de Waele-Ostwald and Bingham.

The paper contains also a solution of the problem of the Vočadlo model as applied to the rotating viscometer constants τ_0 , K , n and the transformation of the measurement curve into the real flow curve. This method is applied successfully to the description of flow curve of homogeneous soil-water mixtures. It is found that the Vočadlo equation describes in a more perfect manner the motion of such mixtures than the models of Bingham and de Waele-Ostwald hitherto used.

WYŻSZA SZKOŁA ROLNICZA, WROCŁAW

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 listopada 1967 r.
