

PEWNE ZAGADNIENIE NIEOGRANICZONEJ PŁYTY
NA PODŁOŻU NIELINIOWO-SPRĘŻYSTYM

MARTA NIEMIEC, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Zagadnienia płyt na podłożu liniowo-sprężystym dla różnych modeli podłoża (podłoże Winklera, Weighardta, Schultzego, Pasternaka, półprzestrzeń sprężysta itp.), różnych przypadków obciążenia i warunków brzegowych były przedmiotem prac wielu autorów. Problem płyty na podłożu nieliniowo-sprężystym badany był w znacznie mniejszej liczbie przypadków, choć i tu wymienić można by kilka prac, między innymi [5]. Tę stosunkowo niewielką jeszcze liczbę opracowań przypisać należy w pierwszym rzędzie charakterystycznym trudnościom matematycznym, właściwym zadaniom nieliniowym.

W pracy niniejszej rozważamy problem kołowo-symetrycznie obciążonej płyty nieograniczonej, leżącej na nieliniowym podłożu winklerowskim. W odróżnieniu od istniejących rozwiązań dotyczących szczególnych postaci nieliniowości w pracy niniejszej podamy rozwiązanie dla dostatecznie ogólnej postaci funkcji opisującej własności nieliniowe podłoża. Równocześnie położymy nacisk na dobór takiej metody rozwiązania problemu, która umożliwiłaby szczegółową analizę jego poprawności. Cel ten osiągnąć można na drodze sprowadzenia równania płyty do pewnego nieliniowego operatora tożsamościowego w przestrzeni funkcyjnej o odpowiednio przyjętej metryce, co z kolei pozwala na zastosowanie znanego twierdzenia Banacha-Cacciopoli o punkcie stałym.

Następnie rozpatrzmy szczegółowo przykład płyty obciążonej siłą skupioną zamieszczając odpowiednie wzory na ugięcia, momenty zginające i siły poprzeczne.

2. Ogólne sformułowanie i rozwiązanie problemu

Rozważamy kołowo-symetryczne zagadnienie nieograniczonej płyty (rys. 1) leżącej na podłożu nieliniowo-sprężystym o reakcji

$$(2.1) \quad p(r) = kw + F(w),$$

gdzie k oznacza stałą Winklera (współczynnik podatności podłoża). Problem rozpatrywać będziemy na gruncie klasycznej teorii płyt cienkich, a założenie o fun-

kcji $F(w)$ podamy w trakcie wywodu. Zadanie sprowadza się więc do rozwiązania równania

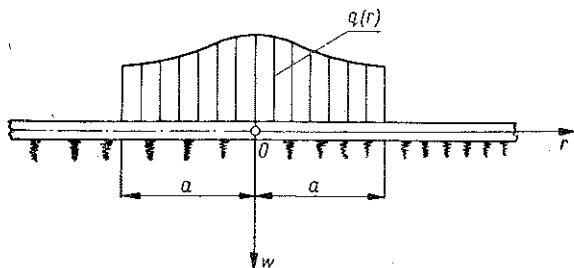
$$D\Delta\Delta w = q(r) - p(r),$$

które po wykorzystaniu (2.1) można zapisać w postaci

$$(2.2) \quad D\Delta\Delta w + kw = q(r) - F(w),$$

gdzie

$$\Delta\Delta = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2$$



Rys. 1

oznacza biharmoniczny operator dla przypadku kołowej symetrii, a

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

sztwność płyty. Do rozwiązania problemu użyjemy funkcji Greena dla kołowo-symetrycznego obciążenia płyty na podłożu Winklera [1]

$$(2.3) \quad G(x, \xi) = -\frac{\xi l^3}{D} \begin{cases} \text{kei } x \text{ ber } \xi + \text{ker } x \text{ bei } \xi, & \xi < x; \\ \text{ber } x \text{ kei } \xi + \text{bei } x \text{ ker } \xi, & \xi > x. \end{cases}$$

Tutaj przyjęto następujące oznaczenia:

$$x = \frac{r}{l}, \quad \xi = \frac{\rho}{l}, \quad l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}}$$

oraz $\text{ker } z$, $\text{kei } z$, $\text{ber } z$, $\text{bei } z$ są funkcjami Kelvina.

Funkcja (2.3) spełnia równanie

$$D\Delta\Delta w + kw = \delta(x - \xi),$$

w którym $\delta(z)$ jest osiowo-symetryczną deltą-dystrybucją Diraca. Na tej podstawie rozwiązanie równania (2.2) możemy ogólnie przedstawić za pomocą wzoru

$$w(x) = \int_0^{\infty} G(x, \xi) [q(\xi) - F(w)] d\xi,$$

a następnie

$$(2.4) \quad w(x) = f(x) - \int_0^{\infty} G(x, \xi) F(w) d\xi,$$

gdzie

$$(2.5) \quad f(x) = \int_0^{\infty} G(x, \xi) q(\xi) d\xi = \int_0^{\frac{a}{l}} G(x, \xi) q(\xi) d\xi = \\ = -\frac{l^3}{D} \left[\text{kei } x \int_0^x \xi \text{ber } \xi q(\xi) d\xi + \text{ker } x \int_0^x \xi \text{bei } \xi q(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \text{ber } x \int_0^{\frac{a}{l}} \xi \text{kei } \xi q(\xi) d\xi + \text{bei } x \int_0^{\frac{a}{l}} \xi \text{ker } \xi q(\xi) d\xi \right].$$

Związek (2.4) jest nieliniowym równaniem całkowym II rodzaju z jądrem regularnym. Wprowadzając operator

$$L = f(x) - \int_0^{\infty} G(x, \xi) F d\xi$$

napiżemy (2.4) krótko $w = Lw$.

Przyjmując w przestrzeni $C^4(0, \infty)$ funkcji $w(x)$ klasy C^4 metrykę

$$d(w_n, w_m) = \max |w_n - w_m|$$

wykażemy, że operator L jest zwarty, tzn. że

$$d(L_n, L_m) = \max |L(w_n) - L(w_m)| \leq ad(w_n, w_m), \\ 0 < a < 1,$$

co w myśl znanego twierdzenia Banacha-Cacciopoli o punkcie stałym (przestrzeń $C^4(0, \infty)$ jest zupełna) dowodzi istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (2.4) w postaci granicy ciągu iteracji

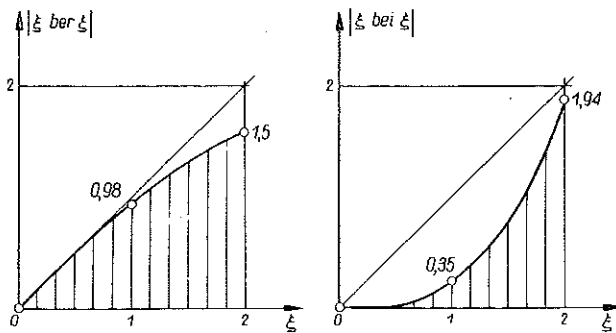
$$(2.6) \quad w_n(x) = f(x) - \int_0^{\infty} G(x, \xi) F(w_{n-1}) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \\ w_0 = f(x).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$d(L_n, L_m) = \max \left| - \int_0^{\infty} G(x, \xi) F(w_n) d\xi + \int_0^{\infty} G(x, \xi) F(w_m) d\xi \right| = \\ = \max \left| - \int_0^{\infty} G(x, \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi \right| = \\ = \lambda \max \left| \int_0^x (\text{kei } x \xi \text{ber } \xi + \text{ker } x \xi \text{bei } \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\infty} (\operatorname{ber} x \xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x \xi \operatorname{ker} \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi \Big| \leq \\
 \leq & \lambda \max \left| \int_0^x (\operatorname{kei} x \xi \operatorname{ber} \xi + \operatorname{ker} x \xi \operatorname{bei} \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi \right| + \\
 & + \lambda \max \left| \int_0^{\infty} (\operatorname{ber} x \xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x \xi \operatorname{ker} \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi \right| = \\
 & = \lambda \max I_I + \lambda \max I_{II}
 \end{aligned}$$

gdzie $\lambda = l^3/D$ oraz I_I i I_{II} oznaczają wyszczególnione wyżej moduły całek. W dalszym ciągu dla dogodnego szacowania funkcji Kelvina ograniczymy się do przedziału $x \in [0, 2]$, co odpowiada zmienności $r \in [0, 2l]$ (dla takich wartości r ugięcia, momenty i siły poprzeczne będą największe, jeśli ograniczymy się do obciążeń dzia-



Ry. 2

łających w obrębie środka płyty). Ponadto przedział $[x, \infty)$ rozbijemy na dwa przedziały $[x, 10]$ i $(10, \infty)$, co pozwoli w drugim przedziale na zastosowanie wyrażień asymptotycznych dla funkcji $\operatorname{ker} \xi$ i $\operatorname{kei} \xi$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
 I_I & \leq \int_0^x |\operatorname{kei} x \xi \operatorname{ber} \xi + \operatorname{ker} x \xi \operatorname{bei} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi \leq \\
 & \leq |\operatorname{kei} x| \int_0^x |\xi \operatorname{ber} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi + |\operatorname{ker} x| \int_0^x |\xi \operatorname{bei} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi.
 \end{aligned}$$

Dla $0 < x \leq 2$ mamy [3]

$$|\operatorname{kei} x| \leq 0,8, \quad |\operatorname{ker} x| \leq K, \quad |\xi \operatorname{ber} \xi| \leq 2, \quad |\xi \operatorname{bei} \xi| \leq 2.$$

Stąd i na podstawie rys. 2 mamy oczywistą relację

$$\begin{aligned}
 I_I & \leq 0,8 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \max |F(w_n) - F(w_m)| + K \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \max |F(w_n) - F(w_m)| = \\
 & = 2 \cdot (0,8 + K) \max |F(w_n) - F(w_m)|.
 \end{aligned}$$

Dotychczas nie założyliśmy o funkcji $F(w)$. Przyjmijmy dalej, że jest ona przedstawiona wykresem na rys. 3 — dokładnie zaś, że spełnia warunek Lipschitza:

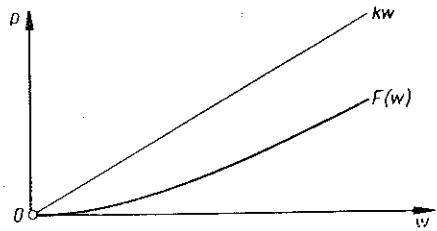
$$(2.7) \quad |F(w_n) - F(w_m)| < k |w_n - w_m|.$$

Stąd

$$(2.8) \quad I_I < 2(0,8+K)k \max |w_n - w_m|.$$

Podobnie dla całki I_{II} otrzymujemy

$$I_{II} = \left| \int_x^\infty (\operatorname{ber} x\xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x\xi \operatorname{ker} \xi) \times \right.$$

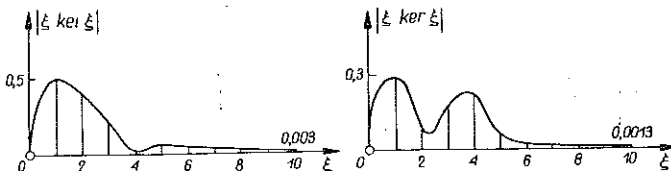


Rys. 3

$$\begin{aligned} \times [F(w_n) - F(w_m)] d\xi &= \left| \int_x^{10} (\operatorname{ber} x\xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x\xi \operatorname{ker} \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi + \right. \\ &+ \left. \int_{10}^\infty (\operatorname{ber} x\xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x\xi \operatorname{ker} \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_x^{10} (\operatorname{ber} x\xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x\xi \operatorname{ker} \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi \right| + \\ &+ \left| \int_{10}^\infty (\operatorname{ber} x\xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x\xi \operatorname{ker} \xi) [F(w_n) - F(w_m)] d\xi \right|. \end{aligned}$$

Oznaczając ostatnie całki odpowiednio przez I_{II}^1 i I_{II}^2 znajdziemy kolejno

$$\begin{aligned} I_{II}^1 &\leq \int_x^{10} |\operatorname{ber} x\xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x\xi \operatorname{ker} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi \leq \\ &\leq |\operatorname{ber} x| \int_x^{10} |\xi \operatorname{kei} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| + |\operatorname{bei} x| \int_x^{10} |\xi \operatorname{ker} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi. \end{aligned}$$



Rys. 4

Z nierówności $|\operatorname{ber} x| \leq 1$, $|\operatorname{bei} x| < 1$ dla $0 < x \leq 2$ i rys. 4 otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_x^{10} |\xi \operatorname{kei} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi &\leq \\ &\leq \max |F(w_n) - F(w_m)| \int_x^{10} |\xi \operatorname{kei} \xi| d\xi < \max |F(w_n) - F(w_m)| \times \\ &\times \int_0^{10} |\xi \operatorname{kei} \xi| d\xi < \max |F(w_n) - F(w_m)| \left(0,5 \cdot 1 + \frac{0,5+0,003}{2} \cdot 9 \right) = \\ &= 2,76 \max |F(w_n) - F(w_m)|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_x^{10} |\xi \ker \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi &\leq \\
 &\leq \max |F(w_n) - F(w_m)| \int_x^{10} |\xi \ker \xi| d\xi < \max |F(w_n) - F(w_m)| \times \\
 &\times \int_0^{10} |\xi \ker \xi| d\xi < \max |F(w_n) - F(w_m)| \left(0,3 \cdot 4 + \frac{0,3 + 0,0013}{2} \cdot 6 \right) = \\
 &= 2,1 \max |F(w_n) - F(w_m)|.
 \end{aligned}$$

Stąd

$$I_{II}^1 < (2,76 + 2,10) \max |F(w_n) - F(w_m)| = 4,86 \max |F(w_n) - F(w_m)|.$$

Podobnie

$$\begin{aligned}
 I_{II}^2 &= \int_{10}^{\infty} |\operatorname{ber} x \xi \operatorname{kei} \xi + \operatorname{bei} x \xi \ker \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi \leq \\
 &\leq |\operatorname{ber} x| \int_{10}^{\infty} |\xi \operatorname{kei} \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi + |\operatorname{bei} x| \times \\
 &\quad \times \int_{10}^{\infty} |\xi \ker \xi| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi,
 \end{aligned}$$

a wykorzystując wzory asymptotyczne dla funkcji $\operatorname{kei} \xi$ i $\ker \xi$ znajdziemy

$$\begin{aligned}
 I_{II}^2 &< |\operatorname{ber} x| \int_{10}^{\infty} \xi \left| -\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \right| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi + \\
 &+ |\operatorname{bei} x| \int_{10}^{\infty} \left| \xi \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \right| |F(w_n) - F(w_m)| d\xi < \\
 &< \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{10}^{\infty} \sqrt{\xi} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} d\xi + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{10}^{\infty} \sqrt{\xi} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} d\xi \right) \max |F(w_n) - \\
 &\quad - F(w_m)| = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \max |F(w_n) - F(w_m)| \int_{10}^{\infty} \sqrt{\xi} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} d\xi.
 \end{aligned}$$

Po obliczeniu całki mamy

$$I_{II}^2 < 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \max |F(w_n) - F(w_m)| \cdot 0,015 = 0,0375 \max |F(w_n) - F(w_m)|.$$

Biorąc otrzymane oszacowania dla całek I_{II}^1 i I_{II}^2 i korzystając z własności (2.7) dostajemy

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad I_{II} &< 4,86 \max |F(w_n) - F(w_m)| + 0,0375 \max |F(w_n) - F(w_m)| < \\
 &< 4,90k \max |w_n - w_m|.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie więc na podstawie (2.8) i (2.9) będzie

$$\begin{aligned} d(L_n, L_m) &= \lambda (I_I + I_{II}) < \lambda [2k (0,8 + K) \max |w_n - w_m| + \\ &+ 4,90k \max |w_n - w_m|] = 2\lambda k (3,25 + K) \max |w_n - w_m| = \\ &= 2\lambda k (3,25 + K) d(w_n, w_m). \end{aligned}$$

Jeśli więc tylko

$$\alpha = 2\lambda k (3,25 + K) < 1,$$

to operator L będzie zwarty i rozwiązanie równania (2.4) istnieje, jest jednoznaczne i może być wyznaczone z procesu iteracji (2.6) z dowolną dokładnością, przy czym błąd n -tego przybliżenia wynosi [2]

$$d(w_n, w^*) = \varepsilon \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(w_0, w_1),$$

gdzie w^* oznacza rozwiązanie ścisłe.

Stała K występująca we wzorze na α jest kresem górnym funkcji $\ker x$ w przedziale $x > 0$. Dla $x \rightarrow 0$, $\ker x \rightarrow \infty$, lecz wtedy należy wziąć pod uwagę całkę I_{II} (a nie I_I), która jest ograniczona dla wszystkich $0 \leq x \leq 2$. Gdyby więc obrać przykładowo przedział $0,01 \leq x \leq 2$, to

$$K = \ker 0,01 \approx 4,72,$$

a wtedy

$$\alpha = 2 \frac{l^3}{D} k (3,25 + 4,72) \approx \frac{16}{l} \left[\frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right].$$

Dla $x = 0$ $d(L_n, L_m) = \lambda I_{II} < 4,9\lambda k \max |w_n - w_m|$;
skąd

$$\alpha = 4,9 \frac{l^3}{D} k = \frac{4,9}{l} \left[\frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right].$$

W ten sposób przy założeniu (2.7) dowiedliśmy istnienia rozwiązania równania (2.4), a więc i (2.2) w postaci zbieżnego ciągu kolejnych przybliżeń dla $0,01 \leq x \leq 2$ przy $\alpha = 16/l < 1$ i $x = 0$ przy $\alpha = 4,9/l < 1$. Przeprowadzony dowód pozwala na wyznaczenie ugięć, momentów zginających i sił poprzecznych dla różnych przypadków obciążenia i odporu. W szczególności zajmiemy się dalej płytą obciążoną siłą skupioną, leżącą na podłożu o charakterystyce analitycznej.

3. Płyta na podłożu o charakterystyce analitycznej pod działaniem siły skupionej

Nieliniowość podłoża określona jest funkcją

$$(3.1) \quad F(w) = \sum_{m=2}^{\infty} c_m w^m.$$

Zgodnie z (2.6) rozwiązaniem jest granica ciągu

$$(3.2) \quad w_n(x) = f(x) - \int_0^\infty G(x, \xi) \sum_{m=2}^{\infty} c_m w_{n-1}^m(\xi) d\xi = \\ = f(x) - \sum_{m=2}^{\infty} c_m \int_0^\infty G(x, \xi) w_{n-1}^m(\xi) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dla $q(\xi) = P\delta(\xi)/2\pi\xi l$ otrzymujemy znany rezultat

$$(3.3) \quad w_0(x) = f(x) = P \int_0^\infty G(x, \xi) \frac{\delta(\xi)}{2\pi\xi l} d\xi = \frac{P}{2\pi l} \left[\frac{G(x, \xi)}{\xi} \right]_{\xi=0} = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \text{kei } x.$$

Pierwsze przybliżenie wyznaczmy ze wzoru

$$w_1(x) = w_0(x) - \sum_{m=2}^{\infty} c_m \int_0^\infty G(x, \xi) w_0^m(\xi) d\xi = \\ = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \text{kei } x - \sum_{m=2}^{\infty} c_m (-1)^m \left(\frac{Pl^2}{2\pi D} \right)^m \int_0^\infty G(x, \xi) \text{kei}^m \xi d\xi.$$

Wykorzystując postać funkcji $G(x, \xi)$ znajdziemy

$$w_1(x) = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \text{kei } x - \sum_{m=2}^{\infty} c_m (-1)^m \left(\frac{Pl^2}{2\pi D} \right)^m \left[\int_0^x -\frac{\xi l^3}{D} (\text{kei } x \text{ber } \xi + \right. \\ \left. + \text{ker } x \text{bei } \xi) \text{kei}^m \xi d\xi + \int_x^\infty -\frac{\xi l^3}{D} (\text{ber } x \text{kei } \xi + \text{bei } x + \text{ker } \xi) \text{kei}^m \xi d\xi \right]$$

i dalej

$$w_1(x) = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \text{kei } x + \frac{l^3}{D} \sum_{m=2}^{\infty} c_m (-1)^m \left(\frac{Pl^2}{2\pi D} \right)^m \left[\text{kei } x \int_0^x \xi \text{ber } \xi \text{kei}^m \times \right. \\ \times \xi d\xi + \text{ker } x \int_0^x \xi \text{bei } \xi \text{kei}^m \xi d\xi + \text{ber } x \int_x^\infty \xi \text{kei}^{m+1} \xi d\xi + \\ \left. + \text{bei } x \int_x^\infty \xi \text{ker } \xi \text{kei}^m \xi d\xi \right].$$

Wprowadzając oznaczenia

$$I_{1m}(x) = \int_0^x \xi \operatorname{ber} \xi \operatorname{kei}^m \xi \, d\xi,$$

$$I_{2m}(x) = \int_0^x \xi \operatorname{bei} \xi \operatorname{kei}^m \xi \, d\xi,$$

$$I_{3m}(x) = \int_x^\infty \xi \operatorname{kei}^{m+1} \xi \, d\xi,$$

$$I_{4m}(x) = \int_x^\infty \xi \operatorname{ker} \xi \operatorname{kei}^m \xi \, d\xi,$$

otrzymamy

$$(3.4) \quad w_1(x) = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \operatorname{kei} x + \frac{l^3}{D} \sum_{m=2}^{\infty} c_m (-1)^m \left(\frac{Pl^2}{2\pi D}\right)^m [\operatorname{kei} x I_{1m}(x) + \\ + \operatorname{ker} x I_{2m}(x) + \operatorname{ber} x I_{3m}(x) + \operatorname{bei} x I_{4m}(x)].$$

Obliczając

$$\operatorname{kei}^m \xi = \left(-\frac{\xi^2}{4} \ln \xi - \frac{\pi}{4} + 1,1159 \cdot \frac{\xi^2}{4} + \dots\right)^m \approx \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \times \\ \times \left(-\frac{\xi^2}{4} \ln \xi - \frac{\pi}{4}\right)^{m-i} \left(\frac{1,1159}{4} \xi^2\right)^i = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \left(-\frac{\pi}{4}\right)^j \times \\ \times (0,279)^i \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} \xi^{2m-2j} \ln^{m-i-j} \xi$$

$$i \leq m, \quad m \geq 2, \quad j \leq m - i,$$

dostaniemy

$$I_{1m}(x) = \int_0^x \xi \operatorname{ber} \xi \operatorname{kei}^m \xi \, d\xi = \int_0^x \xi \left(1 - \frac{\xi^4}{64} + \dots\right) \operatorname{kei}^m \xi \, d\xi \approx \\ \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \left(-\frac{\pi}{4}\right)^j 0,279^i \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} \int_0^x \xi^{2(m-j)+1} \ln^{m-i-j} \xi \, d\xi.$$

Podobnie dla drugiej całki mamy

$$I_{2m}(x) = \int_0^x \xi \left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^6}{26 \cdot 62} + \dots\right) \operatorname{kei}^m \xi \, d\xi \approx \frac{1}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \times \\ \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)^j 0,279^i \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} \int_0^x \xi^{2(m-j)+3} \ln^{m-i-j} \xi \, d\xi.$$

Wykonując analogiczne działania dla pozostałych całek otrzymamy (przy równoczesnym wykorzystaniu wyrażeń asymptotycznych dla funkcji $\text{kei } \xi$ i $\text{ker } \xi$)

$$I_{3m}(x) = \int_x^\infty \xi \text{kei}^{m+1} \xi d\xi = \int_x^1 \xi \text{kei}^{m+1} \xi d\xi + \int_1^\infty \xi \text{kei}^{m+1} \xi d\xi = \\ = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1-i} \left(-\frac{\pi}{4}\right)^j 0,279^i \left(-\frac{1}{4}\right)^{m+1-i-j} \int_x^1 \xi^{2(m-j)+3} \ln^{m+1-i-j} \xi d\xi + \\ + \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{m+1} \omega_{3m}(x),$$

gdzie

$$\omega_{3m}(x) = \int_1^\infty \xi^{1-\frac{m+1}{2}} \sin^{m+1} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{m+1}{\sqrt{2}}\xi} d\xi, \\ I_{4m}(x) = \int_x^\infty \xi \text{ker } \xi \text{kei}^m \xi d\xi = \int_x^1 \xi \left(-\ln \xi + 0,1159 + \frac{\pi}{16} \xi^2 + \dots\right) \times \\ \times \text{kei}^m \xi d\xi + \int_1^\infty \xi \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \right] \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \times \right. \\ \times \sin \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \left. \right]^m d\xi = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \left(-\frac{\pi}{4}\right)^j 0,279^i \times \\ \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} \left[(-1) \int_x^1 \xi^{2(m-j)+1} \ln^{m-i-j+1} \xi d\xi + 0,1159 \int_x^1 \xi^{2(m-j)+1} \times \right. \\ \times \ln \xi^{m-i-j} d\xi + \frac{\pi}{16} \int_x^1 \xi^{2(m-j)+3} \ln^{m-i-j} \xi d\xi \left. \right] + (-1)^m \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{m+1} \omega_{4m}(x),$$

przy czym

$$\omega_{4m}(x) = \int_1^\infty \xi^{1-\frac{m+1}{2}} \cos \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \sin^m \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{m+1}{\sqrt{2}}\xi} d\xi.$$

Obliczając występujące w wyrażeniach $I_{1m}(x), \dots, I_{4m}(x)$ elementarne całki typu $\int \xi^{2m-k} \ln^{m-l} \xi d\xi$ dostaniemy po szeregu prostych przekształceń

$$I_{1m}(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{s=0}^{m-i-j} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \left(\frac{\pi}{4}\right)^j \binom{m-i-j}{s} \cdot 0,279^i \times \\ \times \left(\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} \frac{(-1)^{m-i+s} s!}{(2m-2j+2)^{s+1}} x^{2m-2j+2} \ln^{m-i-j-s} x,$$

$$I_{2m}(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{s=0}^{m-i-j} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \binom{m-i-j}{s} \left(\frac{\pi}{4}\right)^j \cdot 0,279^i \times \\ \times \left(\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} (-1)^{m-i+s} \frac{s!}{(2m-2j+4)^{s+1}} x^{2m-2j+4} \ln^{m-i-j-s} x,$$

$$I_{3m}(x) = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{m-1+i} \sum_{s=0}^{m-i-j+1} \binom{m+1}{i} \binom{m+1-i}{j} \binom{m-i-j+1}{s} \left(\frac{\pi}{4}\right)^j \cdot 0,279^i \times \\ \times \left(\frac{1}{4}\right)^{m-i-j+1} \cdot (-1)^{m-i+s+2} \frac{s!}{(2m-2j+4)^{s+1}} x^{2m-2j+4} \ln^{m-i-j-s+1} x + \\ + \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{m-i+1} \binom{m+1}{i} \binom{m-i+1}{j} \left(\frac{\pi}{4}\right)^j \cdot 0,279^i \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1-i-j} \times \\ \times (-1)^{2m-2i-j+2} \frac{(m-i-j+1)!}{(2m-2j+4)^{m-i-j+2}},$$

$$(3.5) \quad I_{4m}(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{s=0}^{m-i-j+1} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \binom{m-i-j+1}{s} \left(\frac{\pi}{4}\right)^j \cdot 0,279^i \times \\ \times \left(\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} (-1)^{m-i+s+2} \frac{s!}{(2m-2j+2)^{s+1}} x^{2m-2j+2} \ln^{m-i-j-s+1} x + \\ + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{s=0}^{m-i-j} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \binom{m-i-j}{s} \left(\frac{\pi}{4}\right)^j \cdot 0,279^i \left(\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} \times \\ \times (-1)^{m-i+s+1} s! \ln^{m-i-j-s} x \left[0,1159 \cdot \frac{x^{2m-2j+2}}{(2m-2j+2)^{s+1}} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{16} \frac{x^{2m-2j+4}}{(2m-2j+4)^{s+1}} \right] + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \left(\frac{\pi}{4}\right)^j \cdot 0,279^i \left(\frac{1}{4}\right)^{m-i-j} \times \\ \times \left[(-1)^{2m-2i-j+2} \frac{(m-i-j+1)!}{(2m-2j+2)^{m-i-j+2}} + 0,1159 \cdot (-1)^{2m-2i-j} \times \right. \\ \left. \times \frac{(m-i-j)!}{(2m-2j+2)^{m-i-j+1}} + \frac{\pi}{16} (-1)^{2m-2i-j} \frac{(m-i-j)!}{(2m-2j+4)^{m-i-j+1}} \right].$$

Podstawiając powyższe wielkości do wzoru (3.4) otrzymamy postać pierwszego przybliżenia powierzchni ugięcia płyty. W wyrażeniach $I_{3m}(x)$ i $I_{4m}(x)$ pominięto wyrazy ω_{3m} i ω_{4m} jako małe, co widać wprost z ich postaci.

W podobny sposób można obliczyć dalsze przybliżenia $w_2(x)$, ..., $w_n(x)$. Poniżej przytoczymy gotowe wzory do obliczenia ugięć oraz sił wewnętrznych dla przypadku $m = 2$.

4. Nieliniowość kwadratowa

Niechaj reakcja podłoża ma postać

$$(4.1) \quad p(w) = kw + c_2 w^2.$$

Zerowe przybliżenie pozostaje bez zmian, a więc ma postać (3.3). Pierwsze przybliżenie wg (3.4) przedstawia się następująco:

$$(4.2) \quad w_1(x) = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \operatorname{kei} x + \frac{l^3}{D} c_2 \left(\frac{Pl^2}{2\pi D} \right)^2 [\operatorname{kei} x I_{12}(x) + \operatorname{ker} x I_{22}(x) + \\ + \operatorname{ber} x I_{32}(x) + \operatorname{bei} x I_{42}(x)],$$

gdzie zgodnie z (3.5) dla $m = 2$ mamy po wykonaniu prostych działań:

$$\begin{aligned} I_{12}(x) &= 0,010 x^6 \ln^2 x - 0,026 x^6 \ln x + 0,098 x^4 \ln x + 0,017 x^6 + \\ &\quad - 0,134 x^4 + 0,308 x^2, \\ I_{22}(x) &= 0,002 x^8 \ln^2 x - 0,005 x^8 \ln x + 0,016 x^6 \ln x + 0,003 x^8 + 0,021 x^6 + \\ &\quad + 0,038 x^4, \\ (4.3) \quad I_{32}(x) &= 0,0019 x^8 \ln^3 x - 0,0030 x^8 \ln^2 x + 0,0091 x^8 \ln x + \\ &\quad + 0,0245 x^6 \ln^2 x - 0,0629 x^6 \ln x + 0,1157 x^4 \ln x + \\ &\quad - 0,0042 x^8 + 0,0410 x^6 - 0,1579 x^4 + 0,242 x^2 - 0,1213, \\ I_{42}(x) &= 0,010 x^6 \ln^3 x + (-0,002 x^8 - 0,010 x^6 + 0,098 x^4) \ln^2 x + \\ &\quad + (0,004 x^8 + 0,016 x^6 - 0,170 x^4 + 0,308 x^2) \ln x - 0,002 x^8 + \\ &\quad + 0,011 x^6 + 0,024 x^4 - 0,190 x^2 + 0,157. \end{aligned}$$

Znajomość funkcji $I_{12}(x)$, ..., $I_{42}(x)$ łącznie ze wzorem (4.2) pozwala na wyznaczenie pierwszego przybliżenia dla momentów zginających i sił poprzecznych. Zgodnie z ogólnymi, znanymi formułami

$$(4.4) \quad \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ Q_r &= D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right), \end{aligned}$$

gdzie M_r oznacza moment w kierunku promieniowym, M_φ moment obwodowy, Q_r siłę poprzeczną — mamy dla zerowego przybliżenia

$$(4.5) \quad \begin{aligned} M_r^0 &= \frac{P}{2\pi} \left(\text{kei}'' x + \frac{\nu}{x} \text{kei}' x \right), \\ M_\varphi^0 &= \frac{P}{2\pi} \left(\frac{1}{x} \text{kei}' x + \nu \text{kei}'' x \right), \\ Q_r^0 &= \frac{P}{2\pi l} \left(\frac{1}{x^2} \text{kei}' x - \frac{1}{x} \text{kei}'' x - \text{kei}''' x \right). \end{aligned}$$

Dla pierwszego przybliżenia otrzymujemy po uwzględnieniu (4.2) i wykonaniu szeregu elementarnych przekształceń

$$(4.6) \quad \begin{aligned} M_r^1 &= M_r^0 - c_2 l \left(\frac{Pl^2}{2\pi D} \right)^2 \left[A(x) + \frac{\nu}{x} B(x) \right], \\ M_\varphi^1 &= M_\varphi^0 - c_2 l \left(\frac{Pl^2}{2\pi D} \right)^2 \left[\frac{1}{x} B(x) + \nu A(x) \right], \\ Q_r^1 &= Q_r^0 + c_2 l \left(\frac{Pl^2}{2\pi D} \right)^2 \left[C(x) + \frac{1}{x} A(x) - \frac{1}{x^2} B(x) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.7) \quad \begin{aligned} A(x) &= \text{kei}'' x I_{12}(x) + 2 \text{kei}' x I'_{12}(x) + \text{kei} x I''_{12}(x) + \text{ker}'' x I_{22}(x) + \\ &\quad + 2 \text{ker}' x I'_{22}(x) + \text{ker} x I''_{22}(x) + \text{ber}'' x I_{32}(x) + 2 \text{ber}' x I'_{32}(x) + \\ &\quad + \text{ber} x I''_{32}(x) + \text{bei}'' x I_{42}(x) + 2 \text{bei}' x I'_{42}(x) + \text{bei} x I''_{42}(x), \\ B(x) &= \text{kei}' x I_{12}(x) + \text{kei} x I'_{12}(x) + \text{ker}' x I_{22}(x) + \text{ker} x I'_{22}(x) + \\ &\quad + \text{ber}' x I_{32}(x) + \text{ber} x I'_{32}(x) + \text{bei}' x I_{42}(x) + \text{bei} x I'_{42}(x), \\ C(x) &= \text{kei}''' x I_{12}(x) + 3 \text{kei}'' x I'_{12}(x) + 3 \text{kei}' x I''_{12}(x) + \text{kei} x I'''_{12}(x) + \\ &\quad + \text{ker}''' x I_{22}(x) + 3 \text{ker}'' x I'_{22}(x) + 3 \text{ker}' x I''_{22}(x) + \text{ker} x I'''_{22}(x) + \\ &\quad + \text{ber}''' x I_{32}(x) + 3 \text{ber}'' x I'_{32}(x) + 3 \text{ber}' x I''_{32}(x) + \text{ber} x I'''_{32}(x) + \\ &\quad + \text{bei}''' x I_{42}(x) + 3 \text{bei}'' x I'_{42}(x) + 3 \text{bei}' x I''_{42}(x) + \text{bei} x I'''_{42}(x). \end{aligned}$$

W oparciu o wyprowadzone wzory (4.2) i (4.6) podamy teraz przykład obliczeniowy dla konkretnych parametrów płyty i podłoża.

Niech odpowiednie dane wynoszą:

$$P = 60\,000 \text{ kG}, \quad E = 200\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad \nu = 0,20, \quad h = 20 \text{ cm}, \quad k = 6 \text{ kG/cm}^3,$$

$$c_2 = -6 \text{ kG/cm}^4.$$

Stąd

$$\begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{200000 \cdot 20^3}{12(1-0,20^2)} = 1,39 \cdot 10^8 \text{ kGcm}, \\ l &= \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = \sqrt[4]{\frac{1,39 \cdot 10^8}{6}} = 69,4 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Tablica 1

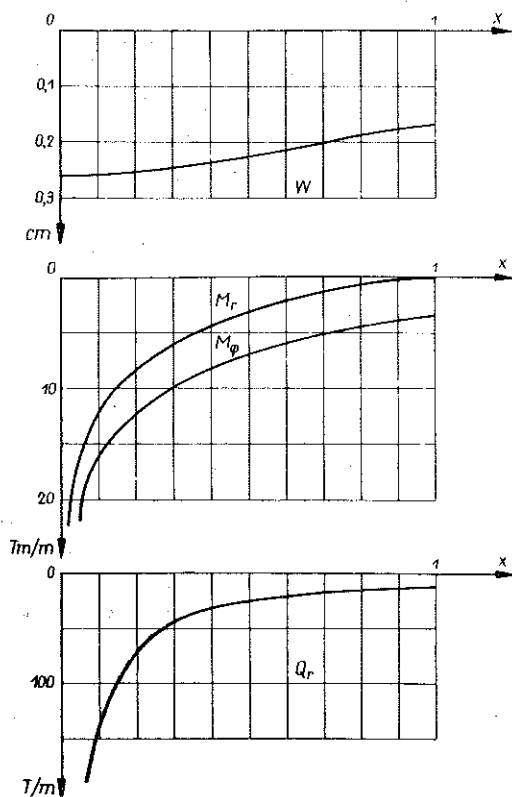
x	w_0 cm	w_1 cm	M_r^0 kGcm/cm	M_r^1 kGcm/cm	M_ϕ^0 kGcm/cm	M_ϕ^1 kGcm/cm	Q_r^0 kG/cm	Q_r^1 kG/cm
0,0	0,26012	0,26031	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,1	0,25731	0,25750	11.962,12664	11.966,30681	15.776,69162	15.780,96953	1.371,03060	1.371,11297
0,2	0,25108	0,25127	8.034,59340	8.039,05036	11.823,94821	11.828,22475	677,31377	677,42249
0,3	0,24280	0,24299	5.784,29991	5.788,08407	9.538,79976	9.543,06305	443,07519	443,25843
0,4	0,23310	0,23329	4.235,11632	4.239,02655	7.940,24628	7.945,76700	323,64701	323,90960
0,5	0,22243	0,22261	3.081,65589	3.085,24457	6.725,47931	6.730,04497	250,39671	250,67207
0,6	0,21111	0,21129	2.185,07174	2.188,42839	5.757,08439	5.761,82590	200,42525	200,79029
0,7	0,19945	0,19962	1.472,31169	1.474,49997	4.960,67244	4.965,38974	163,82280	164,32911
0,8	0,18759	0,18775	896,01119	897,52440	4.293,08060	4.297,77507	135,79684	136,42203
0,9	0,17570	0,17584	428,85924	428,65919	3.726,23391	3.730,54334	113,54725	114,27186
1,0	0,16394	0,16406	47,07807	45,27757	3.239,98335	3.243,80086	95,49989	96,17761

Ponieważ mamy

$$\frac{16}{l} = \frac{16}{69,4} < 1, \quad \frac{4}{l} = \frac{4}{69,4} < 1,$$

przeto możemy stosować metodę iteracji.

Wykorzystując wyprowadzone wzory na ugięcie, momenty zginające i siły poprzeczne otrzymamy wartości zestawione w tabelcy 1. Wykresy odpowiednich wielkości podano na rys. 5.



Rys. 5

Różnice w stosunku do podłoża liniowego są tutaj niewielkie. Jak widać, nie zachodzi też potrzeba wyznaczania dalszych przybliżeń.

5. Zakończenie

W pracy podaliśmy rozwiązanie nieliniowego równania całkowego (2.4), równoważnego wyjściowemu równaniu płyty (2.2), stosując metodę kolejnych przybliżeń. Szczególną uwagę zwrócono na dowód zbieżności procesu iteracji i ocenę błędów dla dostatecznie ogólnej postaci nieliniowości podłoża. Dowód, oparty na twierdzeniu Banacha-Cacciopoliego, przeprowadziliśmy przy tym dla prze-

działu $0,01 \leq x \leq 2$. Z uwagi na tę okoliczność pragniemy w zakończeniu przytoczyć dodatkowe objaśnienia. Należy zauważyć, że ograniczenie przedziału zmienności x podyktowane było przede wszystkim wygodą szacowania funkcji Kelvina, których postać określona odpowiednimi szeregami nastęrczała pewne trudności. Nie należy przeto wnosić, że tylko w wymienionym przedziale $[0,01; 2]$ jest zbieżny ciąg kolejnych przybliżeń rozważany w pracy. Wynika stąd jedynie, że w omawianym przedziale metoda iteracji może być stosowana na pewno; dla innych zaś wartości x należałoby przeprowadzić oddzielną, dodatkową analizę. Wybór przedziału miał również na celu umożliwienie wykorzystania pracy do takich praktycznych przypadków obciążeń, które działają w obrębie środka płyty. Obciążenia takie są typowe dla nawierzchni drogowych i płyt startowych lotnisk.

Również założenie (2.7) o funkcji $F(w)$ nie jest warunkiem koniecznym zwartości operatora L , lecz warunkiem wystarczającym. Być może udałoby się wykazać zwartość operatora i przy innym założeniu, ewentualnie przy przyjęciu innej metryki $d(w_n, w_m)$.

Dalszego opracowania wymagają przypadki płyt przy dowolnym, nie kołowo-symetrycznym obciążeniu, płyty pół-nieograniczone itp. Zagadnienia te stanowią będą przedmiot oddzielnej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. Б. Г. Кореньев, *Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в Бесселевых функциях*, Физматгиз, Москва 1960.
2. А. С. Кованько, И. Г. Соколов, *Теория функции действительного переменного и основы функционального анализа*, Изд. Львовск. Унив. 1961.
3. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
4. W. POGORZELSKI, *Równania całkowite i ich zastosowanie*, t. II, PWN, Warszawa 1958.
5. Ч. Придэ, *К расчету плит на упругом основании*, Труды Рязкск. Политехн. Инст., 18, 1966.
6. S. TIMOSZENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.

Резюме

НЕКОТОРАЯ ЗАДАЧА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В работе определяются изгибы, изгибающие моменты и поперечные силы в бесконечной пластинке на упругом нелинейном, винклеровом основании. Решение получено при использовании метода последовательных приближений. Показана сходимость и оценка погрешности процесса итерации, сводя квазилинейное уравнение пластинки (2.2) к нелинейному уравнению интегрального типа Гаммерштейна, решение которого основано на теореме Банаха-Качиполи с инвариантной точкой. Далее рассматривается подробно пластинка на аналитическом основании, загруженная сосредоточенной силой. Приводится числовой пример диаграммы прогиба и внутренних сил. Проблематика работы может найти применение к анализу напряжённого состояния в плитах дорожного покрытия и взлетных полос.

S u m m a r y

PROBLEM OF AN INFINITE PLATE
RESTING ON A NONLINEAR ELASTIC FOUNDATION

The quantities determined for an infinite plate resting on a nonlinear foundation of the Winkler type are the deflections, bending moments and shear forces. The solution is obtained by iteration. The convergence of the iteration process is shown and the error is estimated by reducing the quasi-linear equation of the plate (2.2) to a nonlinear integral equation of the Hammerstein type, the solution of which is based on the theorem of Banach-Cacciopoli on the invariant point. The problem of a plate resting on an analytic foundation and loaded by a concentrated force is studied in detail. A numerical example is done, giving diagrams of deflection and section forces.

The problem considered is of importance for the analysis of the state of stress in road and runway plates.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 listopada 1967 r.
