

ROZWIĄZANIE PEWNEGO PROBLEMU QUASI-STATYCZNEJ  
TEORII BĘBNÓW

ANDRZEJ TYLIKOWSKI, ERNEST CZOGAŁA (GLIWICE)

Wstęp

W pracy niniejszej rozwiązano problem przemieszczeń w lepkosprężystym bębnie, na który działa ruchome obciążenie. Pominięto siły bezwładności. Model ten jest pewnym przybliżeniem bębna rzeczywistego, jeśli prędkości przesuwania obciążenia są małe. Ten sposób obliczeń jest szeroko stosowany w obliczeniach wolnobieżnych kół pędnych (KÖPPE) [5, 6 i 7]. Rozwiązanie tego zagadnienia lepkosprężystego stanowi próbę uwzględnienia efektów reologicznych zachodzących w materiale bębna, o których występowaniu świadczą m.in. tłumienie drgań bębna i pełzanie wykładziny. Modelem dla naszych rozważań jest układ następujący: powłoka walcowa – pierścień kołowy sztywnie utwierdzony na brzegu wewnętrznym i połączony węzłem sztywnym z powłoką na konturze zewnętrznym.

Rozwiązanie otrzymano z rozwiązania dla stanu sprężystego za pomocą analogii sprężysto-lepkosprężystej Lee-Alfrey'a [3 i 4]. W obliczeniach uwzględniono wpływ sztywności tarcz na obroty brzegów powłoki. Przyjęto, że płyty oddziałują na płaszczyznę bębna tylko za pośrednictwem momentu zginającego, przy czym nie pojawiają się przemieszczenia promieniowe i styczne brzegu powłoki. Rozważanie teoretyczne zilustrowano przykładem, w którym przyjęto model Voigta-Kelvina, zakładając że materiał bębna jest nieściśliwy. Rozpatrzono przypadek obciążenia bębna odpowiadający typowej współpracy bębna z liną.

1. Zginanie płyty pierścieniowej obciążonej na brzegu momentem rozłożonym

Punktem wyjścia dla powyższego zagadnienia jest problem zginania cienkiej pierścieniowej płyty, utwierdzonej sztywnie na wewnętrznym brzegu. Zewnętrzny brzeg tej płyty podparty przegubowo jest obciążony rozłożonym momentem zginającym, którego wektor jest styczny do konturu. Dla prostoty przyjęto układ współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$ .

Równanie równowagi płyty przyjęto za autorem [1] w postaci

$$(1.1) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) y = 0.$$

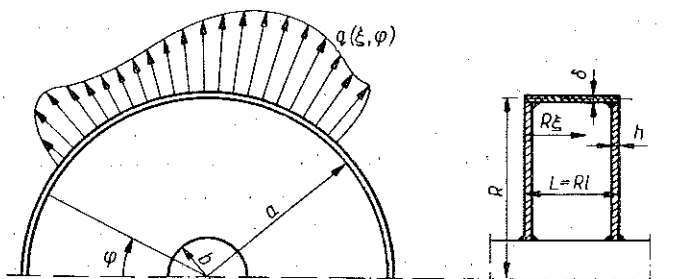
Sposób zamocowania płyty prowadzi do następujących warunków brzegowych: na brzegu wewnętrznym (sztywne utwierdzenie)

$$(1.2) \quad [y]_{r=b} = 0, \quad \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right) \right]_{r=b} = 0;$$

na brzegu wewnętrznym (zamocowanie przegubowe)

$$(1.3) \quad [y]_{r=a} = 0, \quad M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{r=a} = M(\varphi).$$

Warunek (1.3)<sub>2</sub> odpowiada równowadze sił wewnętrznych i zewnętrznych obciążenia na zewnętrznym konturze płyty. W równaniach powyższych przyjęto następujące oznaczenia:  $y$  oznacza przemieszczenie poprzeczne płyty,  $M$  zewnętrzny moment zginający,  $M_r$  moment zginający w płycie,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  sztywność płyty na zginanie,  $E$  moduł Younga,  $\nu$  współczynnik Poissona oraz  $a, b, h$  odpowiednie wymiary płyty (rys. 1).



Rys. 1

Ogólne rozwiązanie równania (1.1) ma postać

$$(1.4) \quad y = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} R'_n(r) \sin n\varphi.$$

Założono przy tym, że moment zewnętrzny jest funkcją parzystą względem kąta  $\varphi$ . Wobec powyższego obciążenie można przedstawić tylko w postaci szeregu kosinusów

$$(1.5) \quad M(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n M_n \cos n\varphi,$$

gdzie

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

oraz

$$(1.6) \quad M_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M(\varphi) \cos n\varphi d\varphi.$$

Rozwiązanie będzie również funkcją parzystą względem kąta:

$$(1.7) \quad y = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\varphi,$$

gdzie

$$R_0(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r,$$

$$(1.8) \quad R_1(r) = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r,$$

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{n+2} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2} \quad \text{dla } n > 1.$$

Stałe  $A_n, B_n, C_n$  i  $D_n$  ( $n = 0, n = 1, n > 1$ ) określamy na podstawie warunków brzegowych (1.2) i (1.3). Każdy z warunków (1.2) i (1.3) prowadzi do nieskończenie wielu równań, które otrzymamy przez porównanie współczynników przy  $\cos n\varphi$  po obu stronach równań (1.2) i (1.3). Otrzymujemy w ten sposób trzy układy równań ( $n = 0, n = 1, n > 1$ ) każdy o czterech niewiadomych.

Wprowadzając funkcje  $K_0(r), K_1(r), K_n(r)$  za pomocą wzorów

$$(1.9) \quad R_0(r) = M_0 K_0(r), \quad R_1(r) = M_1 K_1(r), \quad R_n(r) = M_n K_n(r) \quad n > 1.$$

równaniu (1.7) nadamy postać

$$(1.10) \quad y(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n K_n(r) M_n \cos n\varphi.$$

## 2. Układ powłoka-płyta

W celu znalezienia przemieszczeń układu powłoka-płyta oparto się na następujących założeniach: 1) płyta na obwodzie  $\varrho = a$  zamocowana jest przegubowo (rys. 1), 2) węzeł łączący powłokę z płytą jest sztywny oraz 3) na obwodzie  $\varrho = b$  płyta jest zamocowana sztywno.

Zgodność przemieszczeń wymaga, aby na styku płyty z powłoką spełnione były warunki nierozdzielności obrotów:

$$(2.1) \quad \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial w(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=x_j} = \theta_j(\varphi), \quad j = 1, 2,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = l,$$

gdzie  $w(\xi, \varphi)$  jest przemieszczeniem promieniowym płaszcza bębna. Określone jest ono za pomocą wzoru [2], str. 12 - 14,

$$(2.2) \quad w(\xi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{kn} B_{kn} \left[ q_{kn} - \frac{2}{L} \sum_{j=1}^2 M_{nj} \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi x_j}{l} \right] \sin \frac{k\pi \xi}{l} \cos n\varphi,$$

gdzie

$$\lambda_{kn} = \lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n \geq 1, \end{cases}$$

$$B_{kn} = \frac{R^2(1-\nu^2)}{E\delta} \frac{G_{wkn}}{\Omega_{kn}},$$

$$G_{wkn} = \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right)^2 + c^2 \left( \frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \left[ 2(1-\nu) \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right],$$

$$c^2 = \frac{\delta^2}{12R^2},$$

$$\Omega_{kn} = \nu(1+\nu) \frac{k^2 n^2 \pi^2}{l^2} \left\{ 1 + c^2 \left[ (2-\nu) \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} -$$

$$- \left( \frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) n^2 \left\{ 1 + c^2 \left[ (2-\nu) \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\}^2 -$$

$$- \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 + c^2 \left[ 2(1-\nu) \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} \nu^2 \frac{k^2\pi^2}{l^2} +$$

$$+ \left[ 1 + c^2 \left( \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right)^2 \right] \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right)^2 + \right.$$

$$\left. + c^2 \left( \frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \left[ 2(1-\nu) \frac{k^2\pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\}.$$

Kąt obrotu  $j$ -tej tarczy  $\theta_j(\varphi)$  jest równy

$$(2.3) \quad \theta_j(\varphi) = \left[ \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial r} \right]_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \theta_{nj} \cos n\varphi,$$

gdzie

$$(2.4) \quad \theta_{nj} = \left[ \frac{\partial R_{nj}(r)}{\partial r} \right]_{r=R} = \frac{M_{nj}}{k_n},$$

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{DW_0} \left[ \frac{(R^2 - b^2)^2}{Rb^2} - 4R \ln^2 \frac{R}{b} \right],$$

$$W_0 = \ln \frac{R}{b} \left[ (1+\nu) \ln \frac{R}{b} + 2 \right] - (R^2 - b^2) \left( \frac{1-\nu}{R^2} + \frac{3+\nu}{b^2} \right),$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{DW_1} \left\{ \left[ \frac{2R}{6} (R^2 - 3b^2) + 3 \frac{b}{R} (R^2 + b^2) \right] \left( \ln \frac{R}{b} + 1 \right) + \right.$$

$$+ \frac{R}{b} \left[ b^2 \left( 8 \ln \frac{R}{b} - 5 \right) - R^2 \right] - \frac{b}{R} \left[ R^2 - b^2 \left( 5 - 2 \ln \frac{R}{b} \right) \right] -$$

$$\left. - \frac{3R}{b} \left[ b^2 + R^2 \left( 2 \ln \frac{R}{b} - 1 \right) \right] \right\},$$

$$W_1 = 4b \left\{ \ln \frac{R}{b} \left[ \frac{R^2}{b^2} (\nu+3) + \frac{b^2}{R^2} (1-\nu) \right] + 2(1+\nu) - \nu \frac{b^2}{R^2} - \frac{R^2}{b^2} (2+\nu) \right\},$$

$$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{DW_n} \{ nR^{n-1} [(n+1)b^{-n+1}(R^{-2n+2} - b^{-2n+2}) - (R^2 - b^2)b^{-3n+1} - \\ - n(R^{-2n} - b^{-2n})b^{-n+3}] + \\ + nR^{-n+1} [b^{n+1}(R^{-2n+2} - b^{-2n+2}) + (n-1)b^{-n+1}(R^2 + b^2)] - \\ - (n+2)R^{n+1} [nb^{-n+1}(R^{-2n+2} - b^{-2n+2}) + (R^{-2n} - b^{-2n})(1-n)b^{-n+1}] - \\ - (n+2)R^{-n-3} [nb^{-n-1}(R^2 - b^2) + b^{n+1}(R^{-2n} - b^{-2n})] \}, \\ W_n = \begin{vmatrix} -nb^{-n-1} & b^{n+1} & (1-n)b^{-n+1} \\ R^{-2n} - b^{-2n} & R^2 - b^2 & R^{-2n+2} - b^{-2n+2} \\ n(1-\nu)R^{-n-2} & (2n+1+\nu)R^n & (1-n)(1-\nu)R^{-n} \end{vmatrix}.$$

Po podstawieniu (2.2) i (2.3) do (2.1) otrzymamy

$$(2.5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{kn} B_{kn} \left( q_{kn} - \frac{2}{L} \sum_{j=1}^2 M_{nj} \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi x_j}{l} \right) \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi x_j}{l} \cos n\varphi = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{M_{nj}}{k_n} \cos n\varphi.$$

Porównując odpowiednie współczynniki szeregów w równaniu (2.5) znajdziemy dla  $x_1 = 0$ :

$$(2.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_{kn} \left[ q_{kn} - \frac{2}{L^2} k\pi (M_{n1} + M_{n2} (-1)^k) \right] \frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n1}}{k_n}$$

i dla  $x_2 = l$

$$(2.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_{kn} \left[ q_{kn} - \frac{2}{L^2} k\pi (M_{n1} + M_{n2} (-1)^k) \right] (-1)^k \frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n2}}{k_n}.$$

### 3. Wyznaczenie przemieszczeń powłoki bębna

Należy podkreślić, że wzór na  $w(\xi, \varphi)$  odnosi się jedynie do obciążenia  $q(\xi, \varphi)$  parzystego względem kąta  $\varphi$ . W celu wyznaczenia przemieszczeń przy dowolnej formie obciążenia rozwiązano zagadnienie prowadzące do wyznaczenia funkcji wpływu. Obciążając powłokę siłą skupioną  $P = 1$  działającą w punkcie  $\xi = x$ ,  $\varphi = \pi$  prostopadle do powierzchni środkowej powłoki, otrzymano po rozwinięciu w szereg

$$(3.1) \quad q_{kn} = \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(3.2) \quad K_{kn}(x) = \lambda_{kn} \frac{1}{\Omega_{kn}} \left[ \frac{(-1)^n}{\pi R} \sin \frac{k\pi x}{l} - \frac{k\pi}{L} (M_{n1} + (-1)^k M_{n2}) \right],$$

przesuwając siłę jednostkową z położenia  $\varphi = \pi$  do położenia określonego współrzędną  $\psi$  oraz podstawiając (3.1) do (2.2) przy wykorzystaniu (3.2) i (2.2) znajdziemy

$$(3.3) \quad w^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi) = \frac{2R^2(1-\nu^2)}{LE\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn}(x) G_{vkn} \sin \times \\ \times \frac{k\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi).$$

Funkcja (3.3) przedstawia przemieszczenie promieniowe w punkcie  $\xi$ ,  $\varphi$  pojawiające się pod wpływem działania siły jednostkowej przyłożonej w punkcie  $x$ ,  $\psi$ .

Pozostałe składowe przemieszczenia (styczne  $v$  i wzdłużne  $u$ ) wyznaczono w analogiczny sposób:

$$(3.4) \quad u^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi) = \frac{2R^2(1-\nu^2)}{LE\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn}(x) G_{ukn} \frac{\cos k\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi), \\ v^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi) = \frac{2R^2(1-\nu^2)}{LE\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn}(x) G_{vkn} \frac{\sin k\pi\xi}{l} \sin n(\varphi - \psi),$$

gdzie

$$(3.5) \quad G_{ukn} = - \left\{ \frac{1+\nu}{2} \frac{k n^2 \pi}{l} \left\{ 1 + c^2 \left[ (2-\nu) \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} - \right. \\ \left. - \nu \frac{k\pi}{l} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + n^2 + c^2 \left[ 2(1-\nu) \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} \right\}, \\ G_{vkn} = - \left[ \left[ \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right] n \left\{ 1 + c^2 \left[ (2-\nu) \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + n^2 \right] \right\} - \right. \\ \left. - \nu \frac{1+\nu}{2} \frac{k^2 \pi^2}{l^2} n \right].$$

Stan przemieszczeń powłoki bębna dla dowolnego obciążenia normalnego można określić za pomocą następujących formuł całkowych:

$$(3.6) \quad \begin{cases} w(\xi, \varphi) \\ u(\xi, \varphi) \\ v(\xi, \varphi) \end{cases} = R^2 \int_S \int \begin{cases} w^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi) \\ u^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi) \\ v^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi) \end{cases} q(x, \psi) dx d\psi.$$

W dalszej części pracy założono, że obciążenie jest symetryczne; stąd we wzorze (3.1) należy podstawić  $x = l/2$ :

$$(3.7) \quad q_{kn} = \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Po podstawieniu (3.6) do (3.2)  $K_{kn}(x)$  przyjmuje postać

$$(3.8) \quad K_{kn} = \frac{\lambda_{kn}}{\Omega_{kn}} \left[ \frac{(-1)^n}{\pi R} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi}{L} M_{n1} + (-1)^k M_{n2} \right].$$

Wykorzystując (3.6) dla (2.6) i (2.7) otrzymano

$$(3.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_{kn} \left[ \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2} k\pi (M_{n1} + (-1)^k M_{n2}) \right] \frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n1}}{k_n},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{kn} \left[ \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2} k\pi (M_{n1} + (-1)^k M_{n2}) \right] (-1)^k \frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n2}}{k_n}.$$

Rozbijamy sumy we wzorach (3.9) na dwie części odpowiadające wskaźnikom parzystym i nieparzystym:

$$(3.10) \quad \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_{kn} \left[ \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2} k\pi (M_{n1} - M_{n2}) \right] \frac{k\pi}{L} -$$

$$- \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} B_{kn} \frac{2k\pi}{L} (M_{n1} + M_{n2}) \frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n1}}{k_n},$$

$$- \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_{kn} \left[ \frac{2(-1)^n}{\pi LR} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{2}{L^2} k\pi (M_{n1} - M_{n2}) \right] \frac{k\pi}{L} -$$

$$- \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} B_{kn} \frac{2\pi k}{L} (M_{n1} + M_{n2}) \frac{k\pi}{L} = \frac{M_{n2}}{k_n}.$$

Dodając równania (3.10) stronami oraz wyłączając przed znak sumy  $M_{n1} + M_{n2}$  otrzymano prosty związek

$$(3.11) \quad (M_{n1} + M_{n2}) \left( \frac{1}{k_n} + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} B_{kn} \frac{2k^2\pi^2}{L^3} \right) = 0.$$

Suma w równaniu (3.11) zależy jedynie od kształtu powłoki i własności fizykalnych jej materiału, natomiast  $k_n$  jest zależne od własności tarczy. Wobec powyższego są to wielkości od siebie niezależne, a zatem aby równanie (3.11) było spełnione, musi być spełniony warunek

$$(3.12) \quad M_{n1} + M_{n2} = 0.$$

Wynik ten jest intuicyjnie oczywisty ze względu na symetrię bębna i obciążenie zewnętrzne. Po podstawieniu (3.12) do (3.10) otrzymuje się wzór

$$(3.13) \quad M_{n1} = -M_{n2} \frac{\frac{2(-1)^n}{L^2 R} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_{kn} k \sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{1}{k_n} + \frac{4\pi^2}{L^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} B_{kn} k^2}.$$

W ten sposób wyznaczono współczynniki rozwinięcia momentu zginającego  $M_{nj}$  występujące w równaniu (3.8). Wzory (3.6) przy uwzględnieniu (3.3), (3.4) i (3.8) określają stan przemieszczeń powłoki bębna sprężystego.

## 4. Wyznaczenie pola przemieszczeń powłoki bębna lepkosprężystego

Po wykonaniu na równaniach (3.3) i (3.4) transformacji Laplace'a przy jednoczesnym zastosowaniu analogii sprężysto-lepkosprężystej [3 i 4] otrzymano

$$(4.1) \quad \begin{bmatrix} \bar{w}^{(1)}(w, \psi, \xi, \varphi, p) \\ \bar{u}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \\ \bar{v}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \end{bmatrix} = \frac{2R^2(1 - \bar{\nu}(p^2))}{L\bar{E}(p)\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_{kn}(p) \times \begin{bmatrix} \bar{G}_{wkn}(p) \sin \frac{k\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi) \\ \bar{G}_{ukn}(p) \cos \frac{k\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi) \\ \bar{G}_{vkn}(p) \sin \frac{k\pi\xi}{l} \sin n(\varphi - \psi) \end{bmatrix},$$

oraz

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} \bar{w}(\xi, \varphi, p) \\ \bar{u}(\xi, \varphi, p) \\ \bar{v}(\xi, \varphi, p) \end{bmatrix} = R^2 \int_S \int \begin{bmatrix} \bar{w}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \\ \bar{u}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \\ \bar{v}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \end{bmatrix} \bar{q}(x, \psi, p) dx d\psi.$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} G_w(x, \psi, \xi, \varphi, t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{w}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \}, \\ G_u(x, \psi, \xi, \varphi, t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{u}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \}, \\ G_v(x, \psi, \xi, \varphi, t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{v}^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, p) \} \end{aligned}$$

oraz wykonując odwrotną transformację Laplace'a na równaniach Laplace'a przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie otrzymano równania przemieszczeń dla bębna lepkosprężystego:

$$(4.4) \quad \begin{bmatrix} w(\xi, \varphi, t) \\ u(\xi, \varphi, t) \\ v(\xi, \varphi, t) \end{bmatrix} = R^2 \int_S \int \left( \int_0^t \begin{bmatrix} G_w(x, \psi, \xi, \varphi, t - \tau) \\ G_u(x, \psi, \xi, \varphi, t - \tau) \\ G_v(x, \psi, \xi, \varphi, t - \tau) \end{bmatrix} q(x, \psi, \tau) d\tau \right) dx d\psi.$$

Równania (4.4) mogą służyć jako podstawa do obliczeń w zastosowaniach. Otrzymane wyniki w formie zamkniętej są możliwe po przyjęciu konkretnego modelu reologicznego materiału bębna ( $\bar{E}(p)$  i  $\bar{\nu}(p)$ ) oraz rodzaju obciążenia  $q(\xi, \psi, \tau)$ .

Przykład. Rozpatrzmy zagadnienie współpracy bębna z linią. Przyjmujemy następujące założenia:

a) bęben jest wykonany z materiału nieściśliwego,  $\bar{\nu}(p) = 1/2$ , i przyjęto model Voigta

$$\frac{E_0}{\bar{E}(p)} = \frac{1}{1 + \lambda p};$$



- b) obciążenie zmienia swoje położenie ze stałą prędkością kątową  $\omega$ ;  
 c) bęben poddany jest obciążeniu odpowiadającemu współpracy bębna z linią (tzw. obciążeniu Eulera);  
 d) pominięto siły tarcia liny o bęben.

Wstępne obciążenia zewnętrzne przyjęto w postaci

$$(4.5) \quad q(x, \psi, \tau) = \frac{P}{2R^2} \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \delta(\psi - \omega\tau),$$

tj. jako siłę  $P$  promieniową wędrującą po obwodzie bębna.

Obliczenia przemieszczenia promieniowego, stycznego i wzdłużnego przebiegają w analogiczny sposób, dlatego w dalszej części przykładu zajęto się wyprowadzeniem wzoru określającego przemieszczenie promieniowe oraz przytoczono ostateczne wyniki pozostałych składowych przemieszczenia. Korzystając z założenia a) z równania (4.3) otrzymano

$$(4.6) \quad G_w(x, \psi, \xi, \varphi, t) = \frac{3R^2}{2L\delta\lambda E_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} e^{-\frac{t}{\lambda}} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi).$$

Podstawiając (4.5) i (4.6) do (4.4) i wykorzystując własności dystrybucji  $\delta$  Diraca uzyskano

$$(4.7) \quad w(\xi, \varphi, t) = \frac{3PR^2}{4L\delta\lambda E_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \times \\ \times \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \cos n(\varphi - \omega\tau) d\tau.$$

Po wykonaniu całkowania i uporządkowaniu otrzymano ostatecznie

$$(4.8) \quad w(\xi, \varphi, t) = \frac{3PR^2}{4L\delta\lambda E_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2 n^2 + 1} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi - \omega t) - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n\varphi - \sin n\varphi \right) \right\}.$$

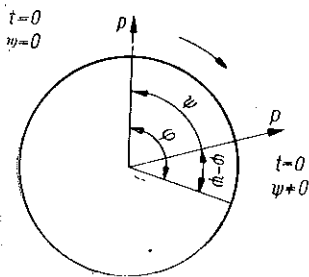
Jeżeli siła  $P$  przyłożona jest do powłoki w chwili  $t = 0$  w punkcie  $\psi$  (rys. 2), a nie  $\psi = 0$  jak we wzorze (4.8), to wzór

$$(4.9) \quad w(\xi, \varphi, \psi, t) = \frac{3PR^2}{4L\delta\lambda E_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2\omega^2 n^2 + 1} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi - \psi - \omega t) - \sin n(\varphi - \psi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{\lambda\omega n} \cos n(\varphi - \psi) - \sin n(\varphi - \psi) \right] \right\}$$

przedstawia odkształcenie powłoki bębna w punkcie  $\xi$ ,  $\varphi$  i czasie  $t$  pod wpływem siły skupionej  $P$  przyłożonej w punkcie  $\psi$ ; zatem jest to funkcja wpływu. Korzysta-

jąc z tego wzoru przemieszczenie promieniowe powłoki pojawiające się pod wpływem dowolnego obciążenia (zarówno o formie ciągłej jak i dyskretnej) można wyznaczyć za pomocą formuły

$$(4.10) \quad w(\xi, \varphi, t) = \int_0^{\psi_0} w(\xi, \varphi, \psi, t) P(\psi) d\psi.$$



Rys. 2

W przypadku obciążenia dyskretnego  $L(\psi)$  wyrazi się formą dystrybucyjną, a całkowe wzorze (4.10) przejdzie w sumę.

Jeśli uwzględnimy założenie c) we wzorze (4.10), to przemieszczenie promieniowe płaszczka bębna wyrazimy następująco:

$$(4.11) \quad w(\xi, \varphi, t) = - \int_0^{\psi_0} w(\xi, \varphi, \psi, t) P_0 e^{\alpha\psi} d\psi.$$

Wykonując całkowanie otrzymano składowe pola przemieszczeń:  
przemieszczenie promieniowe

$$(4.12) \quad w(\xi, \varphi, t) = \frac{3R^2 P_0}{4L\delta\lambda E_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{wkn} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2 \omega^2 n^2 + 1} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \left[ \frac{\cos n(\varphi - \omega t)}{\lambda\omega n} - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{\cos n\varphi}{\lambda\omega n} - \sin n\varphi \right) \right] \right\} \times \\ \times \left[ e^{\alpha\psi_0} (a \cos n\psi_0 + n \sin n\psi_0) - a \right] - \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \left[ \frac{\sin n(\varphi - \omega t)}{\lambda\omega n} + \right. \\ \left. + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{\sin n\varphi}{\lambda\omega n} + \cos n\varphi \right) \right] e^{\alpha\psi_0} (a \sin n\psi_0 - n \cos n\psi_0) + n \Big\};$$

przemieszczenie wzdłużne

$$(4.13) \quad u(\xi, \varphi, t) = \frac{3R^2 P_0}{4L\delta\lambda E_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n G_{ukn} \cos \frac{k\pi\xi}{l} \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2 \omega^2 n^2 + 1} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \left[ \frac{\cos n(\varphi - \omega t)}{\lambda\omega n} - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{\cos n\varphi}{\lambda\omega n} - \sin n\varphi \right) \right] \right\} \times \\ \times \left[ e^{\alpha\psi_0} (a \cos n\psi_0 + n \sin n\psi_0) - a \right] - \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \left[ \frac{\sin n(\varphi - \omega t)}{\lambda\omega n} + \right. \\ \left. + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{\sin n\varphi}{\lambda\omega n} + \cos n\varphi \right) \right] \times \\ \times \left[ e^{\alpha\psi_0} (a \sin n\psi_0 - n \cos n\psi_0) + n \right] \Big\};$$

переміщення стичне

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad v(\xi, \varphi, t) = & \frac{3R^2 P_0}{4L\delta\lambda E_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{kn} G_{vkn} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \frac{\lambda\omega n}{\lambda^2 \omega^2 n^2 + 1} \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{a^2 + n^2} \left[ \frac{\sin n(\varphi - \omega t)}{\lambda\omega n} + \cos n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{\sin n\varphi}{\lambda\omega n} + \cos n\varphi \right) \right] \times \right. \\
 & \times [e^{\alpha\varphi_0} (a \cos n\varphi_0 + n \sin n\varphi_0 - a)] - \frac{1}{a^2 + n^2} \left[ \frac{\cos n(\varphi - \omega t)}{\lambda\omega n} - \right. \\
 & \left. - \sin n(\varphi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{\cos n\varphi}{\lambda\omega n} - \sin n\varphi \right) \right] \times \\
 & \left. \times [e^{\alpha\varphi_0} (a \sin n\varphi_0 - n \cos n\varphi_0) + n] \right\}.
 \end{aligned}$$

#### Литература цитована в тексті

1. S. TIMOSZENKO, S. WOJNOWSKI-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
2. B. SKALMIERSKI, *Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych uźbrowanych*, Zeszyty Naukowe Pol. Śl., 73, 1967.
3. D. R. BLAND, *The theory of linear viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.
4. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
5. L. T. J. ATKINSON, G. L. TAYLOR, *Winding drums colliery*, Engineering, 1967, 524-530
6. O. POPOWICZ, *Maszyny wyciągowe, Bębny i koła pędne*, Gliwice 1964.
7. O. POPOWICZ, *Transport kopalniany, cz. 4, Wyciągi szybowe*, Wydawnictwo Górnicze, Katowice 1957.

#### Резюме

#### РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОЙ КВАЗИ-СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ БАРАБАНОВ

В настоящей работе решается задача касающаяся перемещений в вязко упругом барабане, подверженном подвижной нагрузке. Пренебрегается силой инерции. Эта модель является некоторым приближением действительного барабана, если скорости передвижения нагрузки малы. Этот способ расчета широко применяется в вычислениях в тихоходных ведущих колесах (Кепе) [5, 6, 7].

Решение этой задачи вязкоупругости является попыткой учета реологических эффектов происходящих в материале барабана, появление которых свидетельствует, между прочим, о затухании колебаний барабана и ползучести футеровки. Моделью для рассуждений авторов является следующая система: цилиндрическая оболочка, круговое кольцо, жестко зашплененное на краях соединенных с жестким узлом с оболочкой на наружном контуре.

Решение получено из решения для упругого состояния с помощью упруго-вязко упругой аналогии Ли-Альфре [3 и 4]. В расчетах учитывается влияние жесткости дисков на обороты краев оболочки. Принято, что пластинки воздействуют на кожух только посредством изгибающего момента, причем радиальные и касательные на краю перемещения края оболочки не появляются. Теоретически рассуждения иллюстрируются примером, в котором принято модель Фойгта-Кельвина, предполагая, что материала не подвергается сжатию. Рассматривается случай нагрузки барабана, соответствующей типичной совместной работе барабана с канатом.

## Summary

SOLUTION OF A CERTAIN QUASI-STATIC PROBLEM  
OF THE THEORY OF ROPE DRUMS

The problem solved in the present paper is that of displacement in a viscoelastic rope drum acted on by a moving load. The inertia forces are rejected. This model is an approximation to a real rope drum if the velocity of displacement of the load is small. This method finds wide application in computation of low-speed driving wheels (KÖPE) [5, 6 and 7].

The solution of the viscoelastic problem mentioned above and presented here is an attempt to study rheologic effects in the material of a rope drum, the occurrence of which is confirmed, among other phenomena, by the damping of drum vibration and the creep of the lining. The model under consideration is composed of a cylindrical shell and a circular ring with its inner edge clamped and its outer edge attached to the shell by means of a rigid node. The solution is obtained from that for the elastic state by means of the Lee-Alfrey elastic-visco-elastic analogy [3 and 4]. The influence of the rigidity of the disks on the rotation angle of the edges of the shell is taken into consideration. It is assumed that the action of the plates on the drum reduces to the bending moments only, there being no radial or tangential displacement of the edge. Theoretical considerations are illustrated by an example. The Voigt-Kelvin body is considered assuming that the material of the drum is incompressible. A typical case of cooperation between the drum and the rope is considered.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 lipca 1967 r.*