

METODA ANALIZY STATYSTYCZNEJ EFEKTU KOLMATACJI I FILTROWANIA

STANISŁAW BOROWIK i BRUNON REDMER (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Rozpatrzmy układ złożony z trzech elementów, które nazywać będziemy płynem, cząsteczkami zawiesiny lub zawiesiną oraz ośrodkiem porowatym. Interesujący dla nas jest taki układ, w którym dyspersyjna zawiesina zawieszona w płynie przepływa przez nieruchomy ośrodek porowaty, odpowiednio scharakteryzowany układem porów. Płyn jest elementem przenoszącym cząstki zawiesiny i dla rozważanych przez nas przepływów właściwości «nośne» nie mają istotnego znaczenia. Przedstawione tu zagadnienie sprowadza się do poszukiwania zależności między ilością cząstek zawiesiny przed i po przejściu ich przez ośrodek porowaty. W celu rozwiązania tego problemu zastosowano metodę przyjętą w zagadnieniach filtrowania płynów, a aparat matematyczny oparto na analizie statystycznej. Rozważany problem ma podstawowe znaczenie dla praktycznej oceny materiałów filtracyjnych oraz oceny czystości płynnego czynnika roboczego w urządzeniach hydraulicznych i pneumatycznych. Jest on próbą teoretycznego ujęcia oceny filtrów i uzyskanej czystości czynnika roboczego.

Przed dokładnym wyjaśnieniem tej metody przedstawione zostaną niektóre pojęcia. Na podstawie [4] filtrowaniem nazywamy proces rozdzielania cząstek zawiesiny i innych cząstek niejednorodnych w warunkach przemysłowych. Możliwe to jest dzięki istnieniu zależności między wymiarami porów a wymiarami cząstek zawiesiny; taki proces nazywać będziemy filtrowaniem wymiarowym.

W procesie filtrowania wymiarowego wykorzystane jest zjawisko kolmatacji. Kolmatacja [3] jest to zatrzymywanie w ośrodku porowatym cząstek zawiesiny znajdujących się w płynie podczas przepływu przez ten ośrodek. Jeżeli zachowane zostaną pewne warunki, to wynikiem procesu kolmatacji będzie zmiana koncentracji cząstek zawiesiny w płynie po jej przejściu przez ośrodek porowaty. Rozważać będziemy tylko zjawisko kolmatacji na skutek istnienia różnic wymiarów cząstek zawiesiny i porów, które (przez analogię do filtrowania wymiarowego) określimy terminem kolmatacji wymiarowej.

U podstaw przedstawionej metody badania kolmatacji i filtrowania leżą następujące założenia. Koncentracja objętościowa cząstek zawiesiny jest bardzo mała i mieści się w granicach 0,0001 do 0,01%. Prędkość przepływu płynu jest taka, że

zapewnia równomierne przenoszenie cząstek zawiesiny i nie zachodzi proces sedymentacji. Cząstki zawiesiny mają kształty kuliste o promieniach dowolnych. Ośrodek porowaty traktujemy jako przegrodę o skończonej grubości i bardzo dużej powierzchni. Ostatnie założenie jest konieczne ze względu na to, że w rozważaniach nie jest uwzględniona dynamika procesu kołmatacji. Dodatkowe założenia dotyczą braku jakichkolwiek oddziaływań fizyko-chemicznych, które by wpływały na zmianę wymiarów zawiesiny cząstek i porów (np. założenie o nieistnieniu koagulacji cząstek zawiesiny, obliteracji porów).

2. Kryterium oceny filtrowania

We wszelkich typach urządzeń hydraulicznych i pneumatycznych istotne znaczenie ma czystość czynnika roboczego. Scharakteryzować ją można przez określenie ilości i wymiarów cząstek zawiesiny. W przypadku kiedy te liczby przekraczają pewne ustalone z góry granice, należy oczyścić czynnik roboczy, tj. wyeliminować z płynu całość lub część cząstek zawiesiny przez zastosowanie odpowiedniego urządzenia. W celu właściwej oceny urządzenia oczyszczającego, którym jest najczęściej przegroda porowata, stosowane są różnorodne kryteria.

Rozpatrzmy podstawowe i najczęściej stosowane wskaźniki oceny filtrowania, mianowicie współczynnik odfiltrowania e_f [2] i przepuszczania e_p ; są one określone w sposób następujący:

$$(2.1) \quad e_f = \frac{N_1 - N_2}{N_1} = 1 - e_p,$$

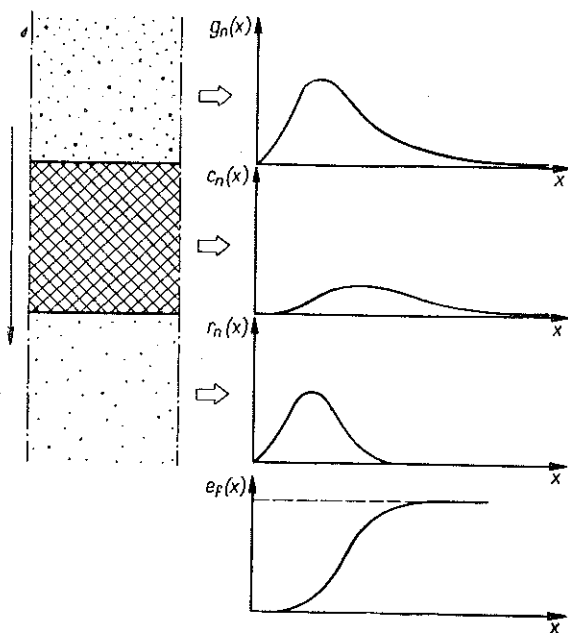
gdzie N_1 i N_2 oznaczają pewne wielkości charakteryzujące zanieczyszczenie płynu (np. ilość cząsteczek, ciężar, ich objętość itp.), odpowiednio przed i po filtrowaniu dla danej dyspersyjności (najczęściej dla promienia cząstki). Wykres współczynnika e_f lub e_p w zależności od zmiennej dyspersyjności określa charakterystykę odfiltrowania lub charakterystykę przepuszczania. Należy zwrócić uwagę na fakt, że zarówno N_1 jak i N_2 mogą być wyrażone przez dowolne wielkości, ale związane w sposób jednoznaczny z cechą charakteryzującą zawiesinę. Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że N_1 i N_2 wyrażać będą liczbę cząstek zawiesiny o promieniu x . Istniejące metody pomiarowe pozwalają na określenie ilości i wymiarów cząstek zawiesiny w płynie, a zatem możliwe jest ustalenie funkcji określającej w przybliżeniu ilość cząstek w zależności od ich wymiarów. Jeżeli te funkcje dla określonej metody pomiarowej i dla płynu odpowiednio przed i po filtrowaniu oznaczymy przez $g_n(x)$ i $r_n(x)$, to wyrażając funkcję określającą ilość cząstek zatrzymanych w przegrodzie porowatej przez $c_n(x)$ otrzymamy

$$(2.2) \quad g_n(x) = c_n(x) + r_n(x).$$

Współczynniki odfiltrowania i przepuszczania możemy zatem przedstawić w postaci

$$(2.3) \quad e_f(x) = \frac{g_n(x) - r_n(x)}{g_n(x)} = \frac{c_n(x)}{g_n(x)},$$

$$e_p(x) = \frac{r_n(x)}{g_n(x)}.$$



Rys. 1

Wykresy funkcji (2.2) i (2.3)₁ przedstawia rys. 1.

3. Analiza statystyczna

Stosowane w dotychczasowej praktyce metody badań filtrowania, oparte na analizie pomiarów ilości cząstek przed i po filtrowaniu, sprawiają duże trudności. Wykażemy niżej, że w celu określenia charakterystyki odfiltrowania wystarczy zbadanie samej tylko przegrody porowatej, a co za tym idzie wyeliminowanie w dużej mierze pracochłonnych i złożonych pomiarów.

Ze względu na przypadkowy charakter występowania porów określonego rozmiaru w materiale filtrującym oraz cząstek w płynie scharakteryzujemy rozkład porów filtru oraz rozkłady zawiesiny przed i po filtrowaniu przez rozkłady prawdopodobieństwa odpowiednich zmiennych losowych. Niech zmienna losowa ξ_f dana za pomocą funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f(y)$ określa ilość porów filtru, a zmienne losowe ξ_g i ξ_h , dane za pomocą funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $g(x)$ i $h(x)$, określają ilości cząstek zawiesiny w płynie odpowiednio przed i po filtrowaniu. Parametr x oznacza tak jak poprzednio promień cząstki, a y wymiar poru przyjęty jako promień koła wpisanego w najmniejszy jego przekrój poprzeczny.

Z warunku normalizacji znajdziemy

$$(3.1) \quad g(x) = \frac{g_n(x)}{A},$$

gdzie

$$A = \int_0^{\infty} g_n(x) dx.$$

Analogicznie do (2.2) niech

$$(3.2) \quad g(x) = c(x) + r(x),$$

gdzie

$$(3.3) \quad c(x) = \frac{c_n(x)}{A}, \quad r(x) = \frac{r_n(x)}{A}.$$

Gęstość dla cząstek zawiesiny po filtrowaniu jest równa

$$(3.4) \quad h(x) = \frac{r(x)}{B},$$

gdzie

$$B = \int_0^{\infty} r(x) dx.$$

Dla dalszych rozważań celowe jest wprowadzenie zmiennej losowej ξ_k określonej przez funkcję rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $k(y)$ charakteryzującą własności hydrodynamiczne porów. Funkcja $k(y)$ określa udział porów o danym promieniu y w przepływie mieszaniny przez przegrodę porowatą w odróżnieniu od wprowadzonej uprzednio funkcji $f(y)$, która charakteryzowała jedynie własności geometryczne porów. Natężenie przepływu zawiesiny zależy od parametru y nie tylko wskutek różnic przekroju poru, lecz również ze względu na różnice oporu przypadającego na jednostkowe natężenie przepływu wskutek dysypacji lepkiej. W przypadku porów cylindrycznych i przepływu laminarnego, w którym natężenie przepływu jest proporcjonalne do kwadratu przekroju, funkcja $k(y)$ przyjmie postać

$$(3.5) \quad k(y) = \frac{y^4}{C} f(y),$$

gdzie

$$C = \int_0^{\infty} y^4 f(y) dy.$$

Istnieją metody pomiarowe pozwalające na bezpośrednie wyznaczenie zarówno funkcji $k(y)$ jak i $f(y)$.

Oznaczmy przez $q(x, y)$ funkcję gęstości prawdopodobieństwa łącznego rozkładu zmiennych losowych ξ_g i ξ_k . Rozkład ten charakteryzować będzie prawdopodobieństwo natrafienia cząstki zawiesiny o promieniu x na por materiału filtrującego o wymiarze y .

Funkcje $c(x)$ i $r(x)$ otrzymamy całkując gęstość $q(x, y)$ względem y w przedziałach, dla których odpowiednio $y \leq x$ oraz $y > x$; mamy więc

$$(3.6) \quad c(x) = \int_0^x q(x, y) dy, \quad r(x) = \int_x^{\infty} q(x, y) dy.$$

W przyjętym modelu procesu filtrowania każdej cząstce zawiesziny znajdującej się w płynie przyporządkowane jest niezależnie od jej wymiaru x jednakowe prawdopodobieństwo natrafienia na por określonego wymiaru y . Wskutek tego zmienne losowe ξ_g i ξ_k możemy rozpatrywać jako niezależne i stąd

$$(3.7) \quad q(x, y) = g(x) k(y).$$

Podstawiając (3.7) do (3.6) otrzymujemy

$$(3.8) \quad c(x) = g(x) K(x), \quad r(x) = g(x) [1 - K(x)],$$

gdzie

$$(3.9) \quad K(x) = \int_0^x k(y) dy.$$

Równanie (3.8)₁ określa efekt kolmatacji wymiarowej, a (3.8)₂ efekt filtrowania wymiarowego.

Z (2.3), (3.1), (3.3) i (3.8)₁ wynika, że

$$(3.10) \quad e_f(x) = K(x).$$

Wzór (3.10) ma ogromne znaczenie praktyczne, pozwala bowiem wyznaczyć współczynnik odfiltrowania przy znajomości tylko samego rozkładu porów. Stosowane metody wyznaczania współczynnika $e_f(x)$, polegające na liczeniu ilości cząstek w płynie przed i po jego przejściu przez filtr (np. z zastosowaniem analizatorów fotoelektrycznych, ultradźwiękowych, izotopowych, elektrostatycznych itd.), odzwierciedlają wprawdzie dość dokładnie rzeczywiste parametry filtrowania, ale ze względu na to, że wymagają one bardzo rozbudowanej aparatury pomiarowej, nie mogą być powszechnie stosowane. Natomiast w oparciu o zależność (3.10) skomplikowane pomiary ilości cząstek zawiesziny w płynie, prowadzące do określenia współczynnika $e_f(x)$, można zastąpić o wiele prostszym pomiarem rozkładu porów filtra. Istnieją materiały filtracyjne o takiej budowie, że pracują tylko powierzchniowo (np. sita filtracyjne, tkaniny itp.). Dla takich materiałów możliwe jest określenie funkcji gęstości $f(y)$ drogą bardzo prostych pomiarów mikroskopowych i następnie wyznaczenie współczynnika odfiltrowania $e_f(x)$ wykorzystując zależności (3.5) i (3.9). Dla materiałów filtrujących o budowie bardziej złożonej i pracujących wewnątrz (np. spieki metalowe, ceramiczne), istnieją metody, wykorzystujące zjawisko napięcia powierzchniowego cieczy, pozwalające w łatwy sposób określić bezpośrednio funkcję $k(y)$. Należy nadmienić, że ze względu na skomplikowany charakter procesu kolmatacji zaproponowana metoda wyznaczania współczynnika $e_f(x)$ może prowadzić do wyników obarczonych błędami, niemniej jednak jako metoda porównawcza dla różnych materiałów filtracyjnych może być stosowana z powodzeniem.

4. Analiza filtrów kulkowych

Przedstawiona wyżej metoda analizy statystycznej przykładowo zostanie zastosowana do często stosowanych w urządzeniach hydraulicznych i pneumatycznych metalowych filtrów spiekanych z kulek. Filtry spiekane zbudowane są na ogół z wąskich frakcji kulek; przyjmujemy, że ich średnice wahają się w granicach od d_{k1} do d_{k2} . Wymiary kulek oraz proces technologiczny produkcji filtrów określają rozkład porów.

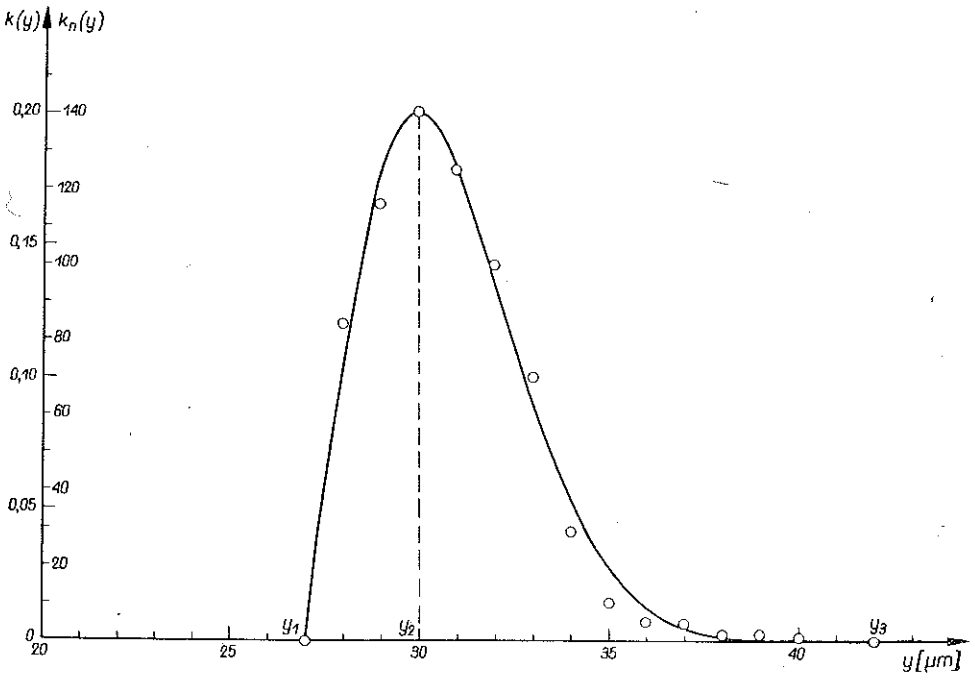
W Katedrze Automatyki Mechanicznej Politechniki Warszawskiej przeprowadzono badania wielkości charakteryzujących strukturę wewnętrzną próbek metalowych filtrów spiekanych z kulek CuSn10. W celu określenia rozkładu porów tych filtrów zastosowano metodę pośrednią «pęcherzyków gazowych». Metoda ta oparta jest na jednoczesnym pomiarze ciśnienia i natężenia przepływu powietrza przenikającego przez nasycony cieczą ośrodek porowaty [1]. Próbkę filtrów nasycony alkoholem etylowym o napięciu powierzchniowym $0,022 \text{ N/m}$ i lepkości $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ w 20°C umieszczono w porometrze laboratoryjnym KAM-PL-1. Wartość odczytanego ciśnienia w momencie pojawienia się pierwszego pęcherzyka powietrza odpowiada początkowemu punktowi zależności jednostkowego natężenia przepływu (prędkości pozornej) od ciśnienia. Zwiększając ciśnienie i mierząc odpowiadające mu natężenia przepływu możemy określić zależność przepływu przez odkryte i odkrywane w czasie zwiększania ciśnienia pory o coraz mniejszych wymiarach. Wykorzystując graficzno-analityczną metodę różniczkowania otrzymanej krzywej oraz znane wzory wyznaczono krzywe $k_n(y)$ podziału porów.

Przeprowadzona badania próbek filtrów wykonanych z kulek o stosunkowo mało różniących się wymiarach średnic od 0,06 do 0,75 mm i grubościach ścianki filtra 1 większych od 10 ($d_{k1} + d_{k2}$). Dane wyjściowe czterech próbek z serii badanych filtrów podane są w tablicy 1 w kolumnach 1, 2 i 3. Z otrzymanych drogą doświadczalną krzywych podziału porów umieszczono w tablicy w kolumnach 4, 5, 6 promień poru najmniejszego y_1 , promień poru odpowiadającego maksimum krzywej y_2 oraz promień poru największego y_3 .

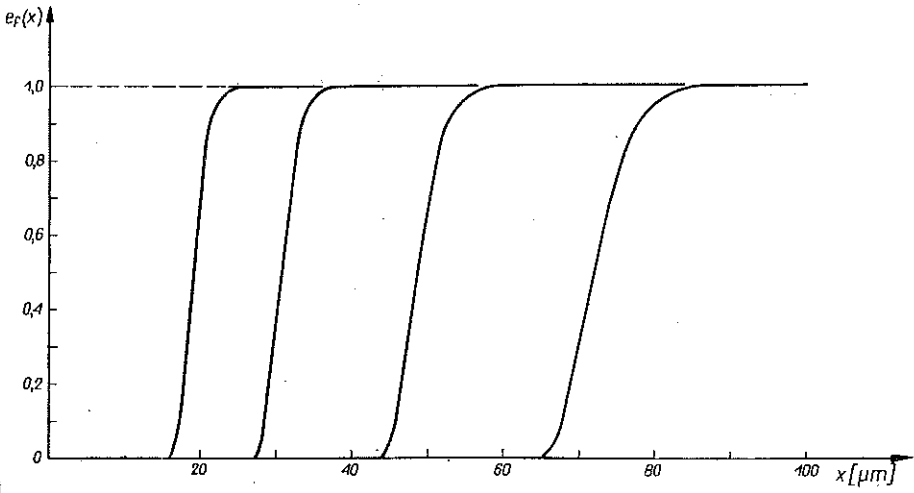
Tablica 1

	Dane wyjściowe			Dane doświadczalne		
	d_{k1} [mm]	d_{k2} [mm]	1 mm	y_1 μm	y_2 μm	y_3 μm
	1	2	3	4	5	6
Filtr 1	0,06	0,15	3	16	18,5	25
Filtr 2	0,15	0,20	5	27	30	42
Filtr 3	0,30	0,40	8	44	48	64
Filtr 4	0,60	0,75	15	65	71	88

Przeprowadzone badania wykazały, że rozkład porów takich filtrów można dość wiernie aproksymować rozkładem Rayleigha, czego ilustracją jest rys. 2, na którym przykładowo podano punkty doświadczalne krzywej podziału $k_n(y)$ oraz jej apro-



Rys. 2



Rys. 3

ksymację dla filtra 2. A zatem na podstawie rozważań z p. 3 funkcje gęstości $k(y)$ dla spiekanych filtrów kulkowych można przedstawić w postaci ogólnej

$$(4.1) \quad k(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < b, \\ \frac{y-b}{a^2} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) & \text{dla } y \geq b, \end{cases}$$

gdzie $a = y_2 - y_1$, $b = y_1$, a charakterystyki odfiltrowania

$$(4.2) \quad e_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < b, \\ 1 - \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right) & \text{dla } x \geq b. \end{cases}$$

Wykresy charakterystyk odfiltrowania przedstawia rys. 3.

Na podstawie (3.4), (3.8)₂ i (4.1) otrzymamy dla spiekanych filtrów kulkowych równanie efektu filtrowania wymiarowego oraz gęstość rozkładu cząstek po filtrowaniu w następujących postaciach:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} r(x) &= \begin{cases} g(x) & \text{dla } x < b, \\ g(x) \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right) & \text{dla } x \geq b; \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} \frac{g(x)}{B} & \text{dla } x < b, \\ \frac{g(x)}{B} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right) & \text{dla } x \geq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Literatura cytowana w tekście

1. J. W. AMYX, D. M. BASE, R. L. WHITING, *Petroleum Reservoir Engineering, Physical Properties*, Mc Graw-Hill, New York 1960.
2. S. BOROWIK, *Kryterium wymiarowej efektywności filtrowania dla oceny charakterystyk metrologicznych porowatych materiałów filtracyjnych*.
3. J. LI TWINISZYN, *The phenomenon of colmatage*, Arch. Mech. Stos., 4, 18 (1966).
4. В. А. Жутиков, *Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий*, Госхимиздат, Москва 1961.

Резюме

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭФФЕКТА КОЛЬМАТАЖА И ФИЛЬТРОВАНИЯ

Вопрос оценки эффекта фильтрования жидкостей и газов в гидравлических и пневматических устройствах является существенным аспектом комплекса явлений, сопутствующих кольматированию частиц суспензии в пористой преграде. В работе дается метод статистического анализа этих явлений, при предположении упрощенной модели процесса кольматирования, состоящего в принятии шарообразных частиц суспензии в жидкости, характеризующейся функцией плотности распределения, а также идеальной структуры пористой среды,

описанной с помощью двух функций плотности распределения „геометрической” и „гидродинамической” пор.

В принятой модели предполагается, что вероятность попадания частиц в пор, определенного размера — одинаковы и не зависят от размеров частиц.

Получено уравнение колюматирования и фильтрования и доказывается, что характеристика фильтрования зависит от геометрических и гидродинамических свойств пористой преграды. (формула 3.10).

В экспериментальной части работы дается описание исследования внутренней структуры металлических фильтров, спекаемых из шариков и аппроксимацию распределения пор таких фильтров, функцией распределения Рейлейя. Согласно выведенной зависимости (3.10) приводятся диаграммы характеристик фильтрования четырех фильтров, определенных путем интегрирования функцией плотности распределения пор.

S u m m a r y

A METHOD OF STATISTICAL ANALYSIS OF THE COLMATAGE AND FILTRATION EFFECT

The problem of analysis of the filtration effect of liquids and gases in hydraulic and pneumatic installations is essential for the phenomena accompanying the colmatage of particles of a suspension in a porous wall.

The method of statistical analysis of these phenomena proposed in the present paper is based on a simplified model of the colmatage process consisting in assuming that the particles of the liquid suspension considered (and characterized by a distribution density function) are spherical and that the structure of the porous body (described by two distribution density functions of pores: "geometric" and "hydraulic") is perfect.

The probability of meeting a pore of definite dimension is assumed to be independent of the size of the particle. As a result the equations of the colmatage and filtration are obtained. It is shown also that the filtration characteristic depends only on the geometric and hydraulic properties of the porous wall (Eq. 3.10).

The experimental part of the paper contains a discussion of the results of tests of the internal structure of filters of sintered metal balls and the approximation to the distribution of pores in such filters by the Rayleigh distribution. According to the relation (3.10) derived diagrams of filtration characteristics of four filters are plotted by integrating the distribution density function of pores.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1967 r.