

O OSOBLIWOŚCI PEWNYCH NIEGLĄDKICH KONSTRUKCJI  
POWIERZCHNIOWYCH (II)

HENRYK FRĄCKIEWICZ, ADAM LEGAT (WARSZAWA)

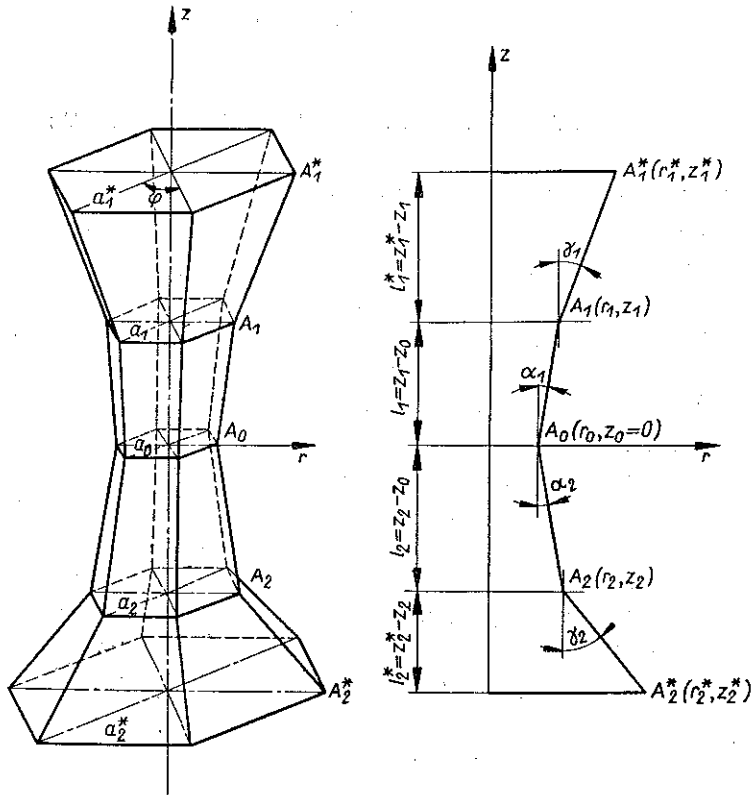
Praca niniejsza stanowi drugą część pracy [4], w której zdefiniowano pojęcie konstrukcji o postaci osobliwej, podano kryteria pozwalające na stwierdzenie, czy dana konstrukcja jest osobliwa (także [3]) i zbadano, poszukując konstrukcji o postaci osobliwej, grupę konstrukcji przestrzennych z jednym załomem podłużnicy. Obecnie zanalizujemy grupę konstrukcji o większej liczbie załomów. Zanim jednak przystąpimy do poszukiwania postaci osobliwych konstrukcji, wskażemy na możliwość nieco innej interpretacji statycznego kryterium sformułowanego w I części pracy [4].

Stwierdziliśmy, że w konstrukcji o postaci osobliwej skończone obciążenie zewnętrzne powoduje powstanie nieskończonej dużej siły wewnętrznych. Algebraiczny sens tego twierdzenia jest taki, że wyznacznik charakterystyczny układu liniowych równań równowagi [4], w którym to układzie wyrazami wolnymi są siły zewnętrzne, musi być równy zeru. Ponieważ współczynniki przy niewiadomych siłach wewnętrznych w równaniach równowagi zależą tylko od wymiarów konstrukcji, przeto i wartość wyznacznika charakterystycznego (a co za tym idzie także pewna własność konstrukcji, którą nazwaliśmy osobliwością konstrukcji) zależy tylko od jej wymiarów. Z drugiej strony, zerowanie się wyznacznika charakterystycznego jest warunkiem koniecznym istnienia niezerowych rozwiązań układu równań jednorodnych. Możemy zatem (abstrahując od jakiegokolwiek obciążenia zewnętrznego) zażądać wprost, aby wyznacznik charakterystyczny układu równań równowagi elementów konstrukcji był równy zeru i stąd otrzymać poszukiwany warunek osobliwości. Takie podejście do zagadnienia określenia warunku osobliwości jest korzystniejsze, ponieważ nie trzeba ustalać obciążenia zewnętrznego.

1. Konstrukcja z trzema załomami

W dalszym ciągu rozpatrzmy konstrukcję pokazaną na rys. 1. Podobnie jak konstrukcje rozpatrywane w części I i ta zbudowana jest z płaskich ścian zamykających sobą pewien jednospójny obszar, a więc spełnia konieczny warunek sztywności i jest statycznie wyznaczalna. Żądamy, aby ściana przenosiła tylko siły styczne do swoich krawędzi, natomiast pasy i rozpórki — siły styczne i normalne działające

wzdłuż ich osi (1). Dana konstrukcja różni się od uprzednio zbadanych większą liczbą załomów pasa, ma ich mianowicie trzy. Wszystkie wymiary rozpatrywanej konstrukcji daje się wyrazić przez współrzędne  $z, r$ . Ze względu jednak na prostotę zapisu i większą przejrzystość otrzymanych wyników będziemy posługiwać się tylko różnicami współrzędnych np.  $l_1 = z_1 - z_0$  lub  $a_i = 2r_i \sin \varphi/2$ . Zarówno  $l$  jak  $a$  mogą przybierać wartości dodatnie i ujemne.



Rys. 1

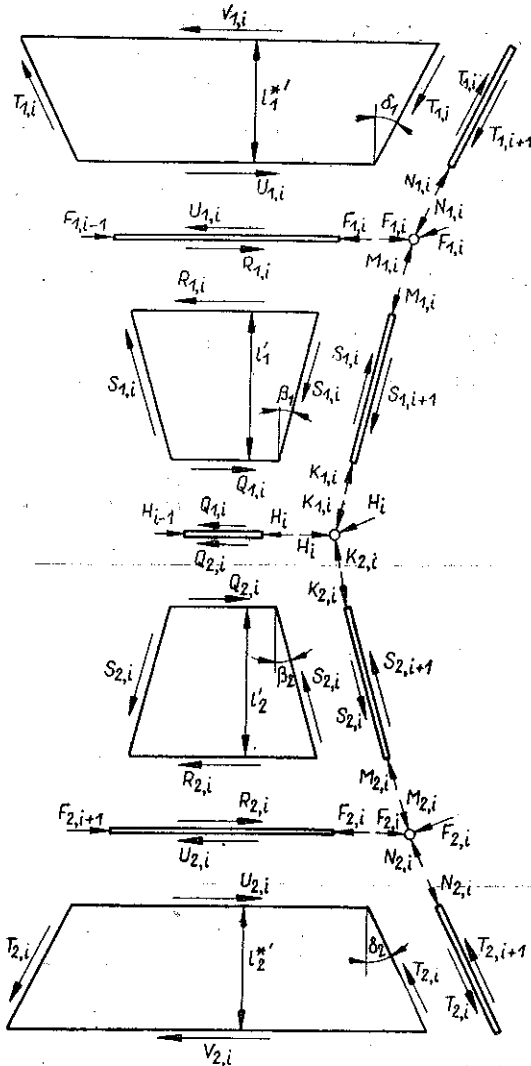
Układ równań równowagi elementów konstrukcji (rys. 2), o których była mowa powyżej, przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & T_{1,i} a_1^* \cos \delta_1 - U_{1,i} l_1'^* = 0, \\
 & N_{1,i} + T_{1,i} - T_{1,i+1} = 0, \\
 & U_{1,i} - R_{1,i} + F_{1,i} - F_{1,i+1} = 0, \\
 & M_{1,i} \cos \alpha_1 - N_{1,i} \cos \gamma_1 = 0, \\
 & M_{1,i} \sin \alpha_1 + 2F_{1,i} \sin \frac{\varphi}{2} - N_{1,i} \sin \gamma_1 = 0,
 \end{aligned}$$

(1) Przez ścianę rozumiemy płaski element konstrukcyjny (płaską kratownicę, płaski płat blachy), który może przenosić wymienione siły.

(1.1)  
[c.d.]

$$\begin{aligned}
 S_{1,i} a_1 \cos \beta_1 - Q_{1,i} l_1' &= 0, \\
 S_{1,i} a_0 \cos \beta_1 - R_{1,i} l_1' &= 0, \\
 K_{1,i} - M_{1,i} + S_{1,i} - S_{1,i+1} &= 0, \\
 Q_{1,i} + Q_{2,i} + H_i - H_{i-1} &= 0, \\
 K_{1,i} \cos \alpha_1 - K_{2,i} \cos \alpha_2 &= 0, \\
 K_{1,i} \sin \alpha_1 + K_{2,i} \sin \alpha_2 - 2H_i \sin \frac{\varphi}{2} &= 0, \\
 K_{2,i} - M_{2,i} + S_{2,i} - S_{2,i+1} &= 0,
 \end{aligned}$$



Rys. 2

$$\begin{aligned}
 S_{2,i} a_0 \cos \beta_2 - R_{2,i} l'_2 &= 0, \\
 S_{2,i} a_2 \cos \beta_2 - Q_{2,i} l'_2 &= 0, \\
 M_{2,i} \sin a_2 + 2F_{2,i} \sin \frac{\varphi}{2} - N_{2,i} \sin \gamma_1 &= 0, \\
 M_{2,i} \cos a_2 - N_{2,i} \cos \gamma_2 &= 0, \\
 U_{2,i} - R_{2,i} + F_{2,i} - F_{2,i+1} &= 0, \\
 N_{2,i} + T_{2,i} - T_{2,i+1} &= 0, \\
 T_{2,i} a_2^* \cos \delta_2 - U_{2,i} l'_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

(1.1)  
[c. d.]

Siły  $H, F, K, M$  i  $N$  zmieniają się wg zależności

$$N_i = N_0 \cos ni\varphi,$$

natomiast pozostałe siły, a więc  $Q, R, S, T$  i  $U$  wg zależności

$$U_i = U_0 [\cos ni\varphi - \cos n(i-1)\varphi], \quad i = 1, 2, 3, \dots, k,$$

gdzie  $i$  oznacza numer kolejnego pasa (naroża, ściany),  $k$  ilość pasów oraz  $n$  liczbę całkowitą, która musi być dzielnikiem  $k$  i spełniać następującą nierówność:  $1 < n \leq k/2$ .

Można udowodnić, że warunek zerowania się wyznacznika charakterystycznego układu (1.1) sprowadza się po wykonaniu pewnych podstawień do postaci:

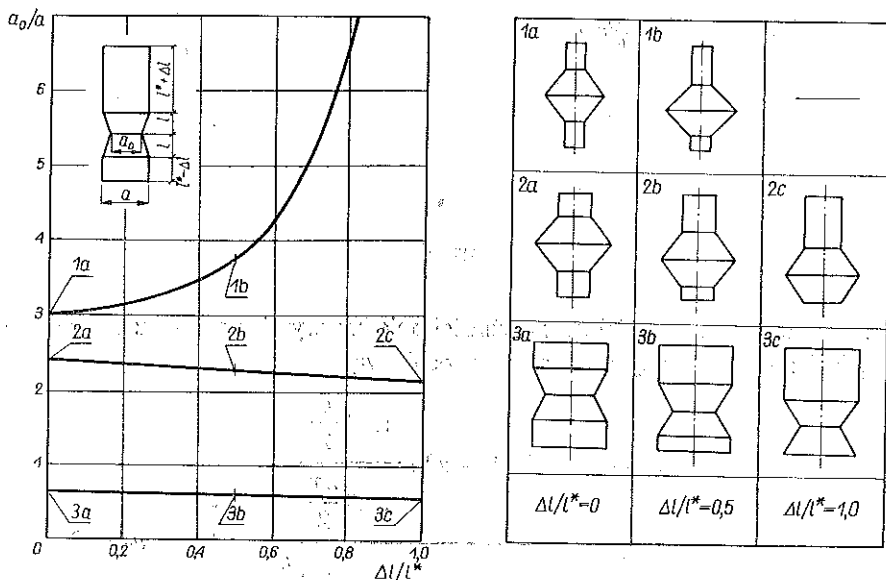
$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad & \frac{1}{l_1} \left[ \frac{(a_1^* - a_1)l_1 - (a_1 - a_0)l_1^* - a_1 l_1 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}}{a_0 l_1^* + a_1^* l_1 - [(a_1^* - a_1)l_1 - (a_1 - a_0)l_1^*] \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}} a_1 + a_1 - a_0 \right] + \\
 & + \frac{1}{l_2} \left[ \frac{(a_2^* - a_2)l_2 - (a_2 - a_0)l_2^* - a_2 l_2 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}}{a_0 l_2^* + a_2^* l_2 - [(a_2^* - a_2)l_2 - (a_2 - a_0)l_2^*] \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}} a_2 + a_2 - a_0 \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Jak widać, spełnienie powyższego warunku zależy od jedenastu niezależnych parametrów, z których  $a_0$  występuje w stopniu najwyższym, mianowicie w trzecim.

Znaczy to, że możemy dowolnie założywszy pozostałe wymiary znaleźć trzy różniące się wymiarem  $a_0$  konstrukcje, spełniające kryterium osobliwości. Konstrukcję taką, dla której warunek osobliwości jest stopnia trzeciego, nazwiemy konstrukcją o trzech stopniach swobody geometrycznej zmienności.

Przykładowo zbadano dokładniej czteropodłużnicową konstrukcję o kwadratowych wręgach. Przyjęto, że  $a_1 = a_2 = a_1^* = a_2^* = a$ ,  $l_1 = l_2 = l$ ,  $l_1^* = l^* + \Delta l$ ,  $l_2^* = l^* - \Delta l$ . Po podstawieniu powyższych danych do (1.2) i oznaczając  $x = a_0/a$ ,  $m = l^*/l$ ,  $k = \Delta l/l$  otrzymamy warunek osobliwości dla danej konstrukcji w postaci:

$$(1.3) \quad 2(m^2 - k^2)x^3 - 4(2m^2 - 2k^2 + m)x^2 + (10m^2 - 10k^2 + 9m + 2)x - 4m^2 + 4k^2 - 4m - 1 = 0.$$



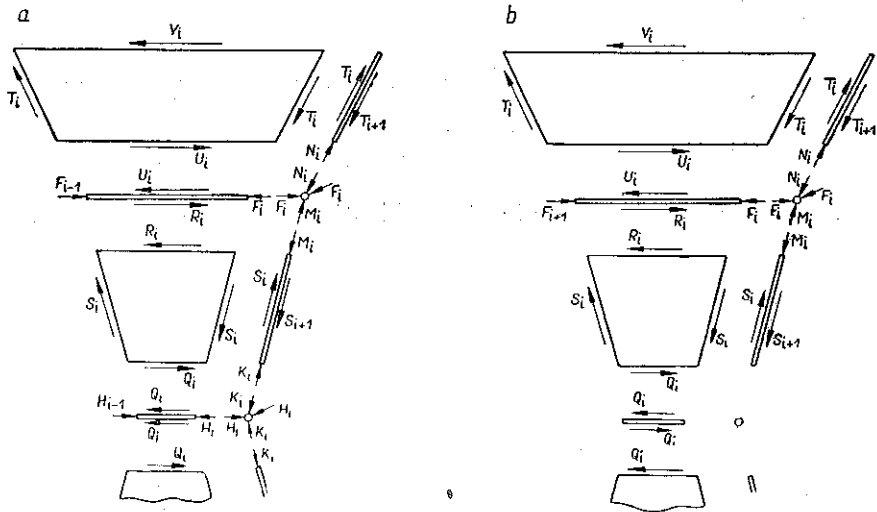
Rys. 3

Rozwiązanie powyższego równania dla  $m = 1$  i  $0 \leq k \leq 1$  pokazano na wykresie (rys. 3). Wartość  $k = 0$  odpowiada symetrycznemu położeniu załomu podłużnicy w równej odległości od ścian górnej i dolnej; gdy  $k$  wzrasta, załom przesuwa się wzdłuż podłużnicy i przy  $k = 1$  znajduje się w skrajnym zewnętrznym położeniu przy dolnej lub górnej ścianie. Każdy punkt krzywej na wykresie wyznacza kształt konstrukcji osobliwej. Dla większej przejrzystości na dołączonym rysunku pokazano kilka takich kształtów odpowiadających wskazanym punktom na wykresie.

## 2. Konstrukcje symetryczne z trzema załomami podłużnicy

W przypadku konstrukcji symetrycznych względem płaszczyzny środkowej wręgi (tzn. gdy  $a_1 = a_2$ ,  $a_1^* = a_2^*$ ,  $l_1 = l_2$ ,  $l_1^* = l_2^*$ ) można uprościć zadanie przyjmując z góry możliwość powstania w konstrukcji bądź symetrycznego, bądź antysy-

metrycznego samorozważonego układu sił wewnętrznych względem środkowej wręgi (rys. 4). Otrzymamy teraz dwa równania: jedno — drugiego, drugie —



Rys. 4

pierwszego stopnia, określające zależności między wymiarami konstrukcji, które muszą być spełnione, aby stała się ona osobliwą:

$$(2.1) \quad \frac{(a^* - a)l - (a - a_0)l^* - a^*l \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}}{a_0 l^* - a^*l - [(a^* - a)l - (a - a_0)l^*] \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}} a + a - a_0 = 0$$

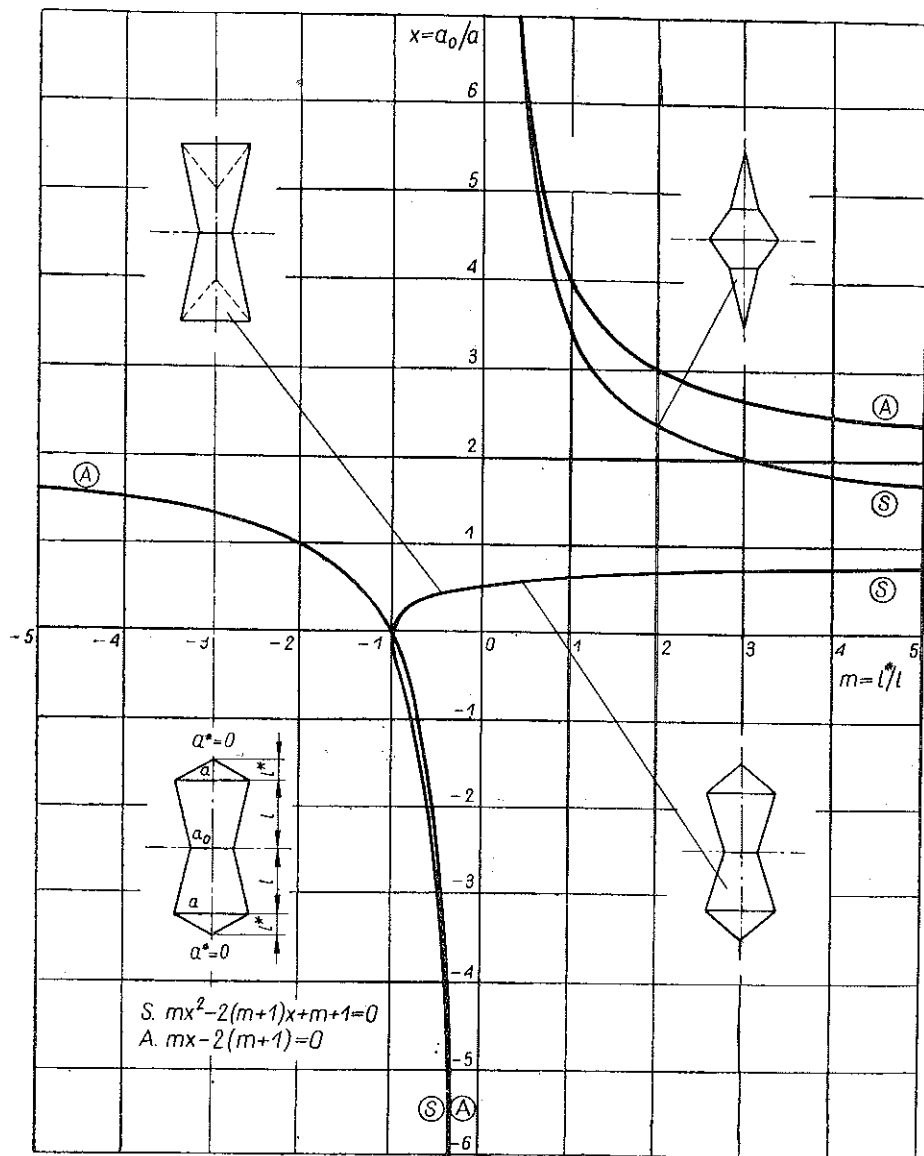
oraz

$$(2.2) \quad \left( a^* \frac{l}{l^*} + a_0 \right) \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}} - (a^* - a) \frac{l}{l^*} + a - a_0 = 0.$$

Wpływ poszczególnych parametrów na powstanie postaci osobliwej konstrukcji o kwadratowych wręgach ( $\varphi = \pi/2$ ) pokazano na wykresach (rys. 5, 6 i 7).

Na rys. 5 pokazano rozwiązanie dla  $a^*/a = 0$ , na rys. 6. dla  $a^*/a = 1$  i na rys. 7 dla  $a^*/a_0 = 2$ . Podano również równania, w jakie przechodzą równania (2.1) i (2.2) po podstawieniu powyższych danych i oznaczeniu jak poprzednio:  $x = a_0/a$  i  $m = l^*/l$ . Odpowiadające rozwiązaniom tych równań krzywe zostały

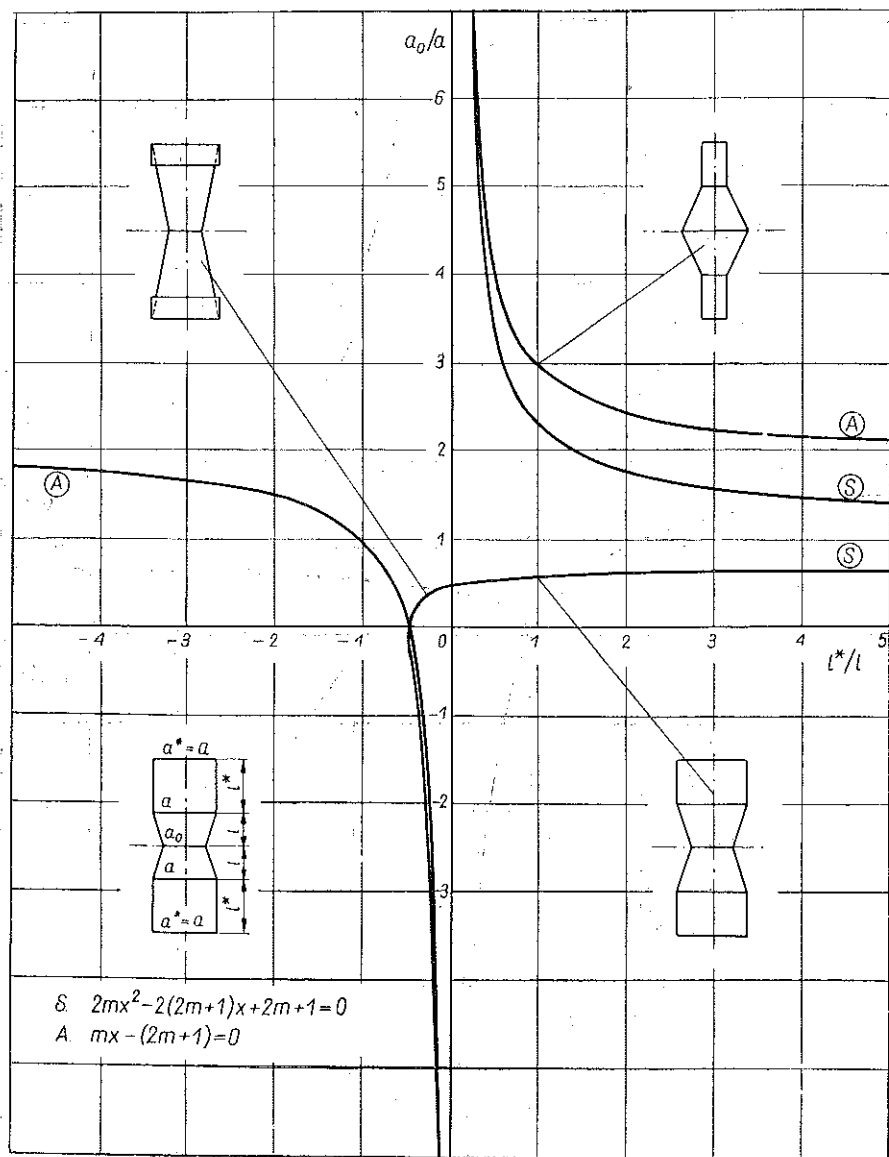
oznaczone:  $S$  dla symetrycznego i  $A$  dla antysymetrycznego rozkładu sił wewnętrznych. Podobnie jak na rys. 3 tak i tutaj punkty krzywych na wykresie określają kształty konstrukcji osobliwych. Największe znaczenie techniczne mają te konstruk-



Rys. 5

cje, których kształty odpowiadają obszarowi wykresu dla  $a_0/a > 0$  i  $l^*/l > -1$ . We wszystkich trzech przypadkach ( $a^*/a = 0$ ,  $a^*/a = 1$  oraz  $a^*/a_0 = 2$ ) dla  $l^*/l \rightarrow \infty$  krzywe  $S$  dążą do asymptoty  $a_0/a = 1$ , krzywa  $A$  do asymptoty  $a_0/a = 2$ .

W dwóch pierwszych przypadkach ( $a^*/a = 0$  i  $a^*/a = 1$ ) dla  $l^*/l \rightarrow \infty$   $a_0/a$  dąży asymptotycznie do nieskończoności, w trzecim przypadku ( $a^*/a_0 = 2$ ) asymptotą pionową jest linia  $l^*/l = -2$ . Na wykresie umieszczono dodatkowo rysunki przed-

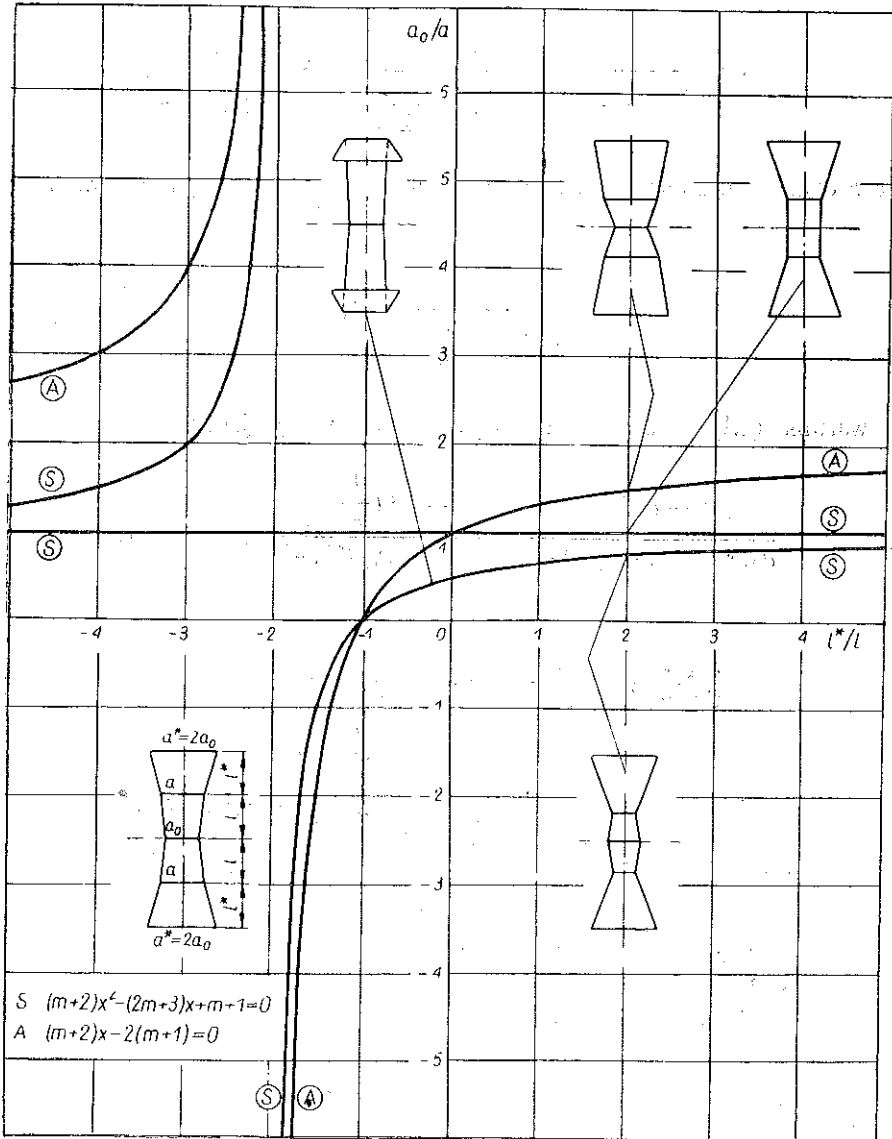


Rys. 6

stawiające kształty konstrukcji osobliwych we wskazanych punktach wykresu. Kształty konstrukcji odpowiadające linii A różnią się od odpowiadających górnej linii S tylko silniejszym załamaniem podłużnicy.



W pozostałym obszarze wykresu ściany konstrukcji bądź pokrywają się, bądź przenikają wzajemnie i dlatego nie wydaje się, aby mogły mieć one jakieś techniczne zastosowanie.



Rys. 7

Na uwagę zasługuje jeszcze jeden fakt. Porównując mianowicie otrzymane wyniki z wynikami otrzymanymi poprzednio [4] dla konstrukcji z jednym załomem widać, że konstrukcja zbudowana przez połączenie dwóch osobliwych (po usunięciu wspólnej ściany) jest także konstrukcją osobliwą.

## 3. Konstrukcje stożkowe

Podobnie jak w I części pracy tak i tutaj możemy przejść w granicy do gładkiej powłoki stożkowej podstawiając (rys. 1)

$$r_0 = \frac{a_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad r = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad r^* = \frac{a^*}{2 \sin \frac{\varphi}{2}},$$

gdzie  $r$  oznacza promień koła opisanego na wrędze konstrukcji. Ponieważ

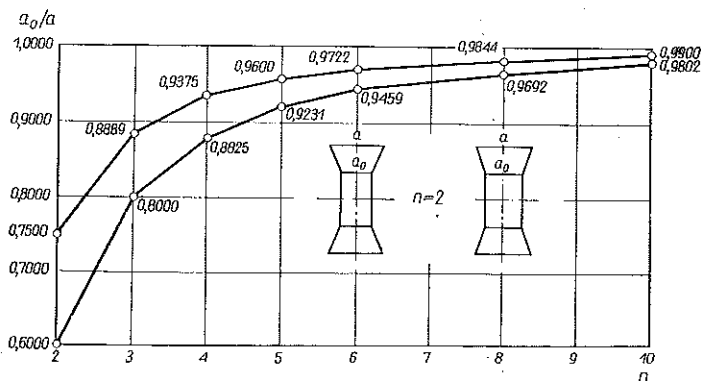
$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = n^2,$$

więc warunki (2.1) i (2.2) przedstawiają się teraz następująco:

$$(3.1) \quad \frac{(a^* - a)l - (a - a_0)l^* - a^*l \frac{1}{n^2}}{a_0l^* - a^*l - [(a^* - a)l - (a - a_0)l^*]n^2} a + a - a_0 = 0$$

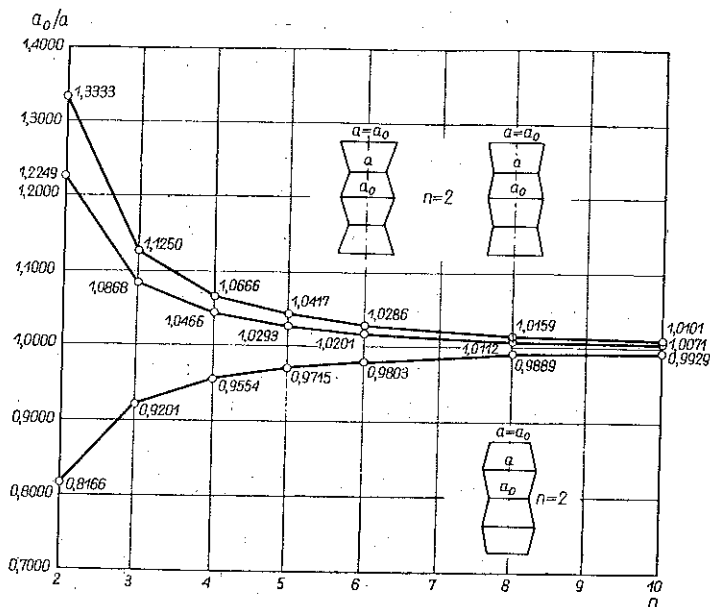
oraz

$$(3.2) \quad \left(a_0 \frac{l}{l^*} + a_0\right) \frac{1}{n^2} - (a^* - a) \frac{l}{l^*} + (a - a_0) = 0.$$



Rys. 8

Wykresy na rys. 8 i 9 przedstawiają zależności między stosunkami promieni podstaw stożków  $r_0/r$  a częstotliwością zmian obciążenia po obwodzie. Widać, że ze wzrostem liczby półfal  $n$  stosunki tych promieni szybko dążą do jedności i przy  $n = 10$  różnica między promieniami podstaw jest rzędu 1%.



Rys. 9

#### 4. Inne konstrukcje

Jeśli założymy, że konstrukcja rozpatrywana ma o jeden załom mniej od poprzednio rozpatrywanej (a więc ma dwa załomy), co można zrealizować zakładając np.  $a_2^* = a_2$  i  $l_2^* = 0$ , to warunek osobliwości (1.2) przybiera następującą postać:

$$(4.1) \quad \frac{1}{l_1} \left\{ \frac{(a_1^* - a_1) l_1 - (a_1 - a_0) l_1^* - a_1^* l_1 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}}{a_1 + a_1 - a_0} + \frac{a_0 l_1^* - a_1^* l_1 - [(a_1^* - a_1) l_1 - (a_1 - a_0) l_1^*] \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{a_2 - a_0} \right\} + \frac{1}{l_2} \left\{ -a_2 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}} + a_2 - a_0 \right\} = 0.$$

Jak widać z powyższego konstrukcja z dwoma załomami jest konstrukcją o dwóch stopniach geometrycznej zmienności.

Jeśli założymy ponadto, że  $a_1^* = a_1$  i  $h_1^* = 0$ , to warunek osobliwości dla konstrukcji z jednym tylko załomem przechodzi w liniowy warunek wyprowadzony w części I:

$$(4.2) \quad a_0 = \frac{a_1 l_2 + a_2 l_1}{l_1 + l_2} \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}} \right).$$

Przeprowadzając tą samą drogą jak poprzednio (p. 1.2) obliczenie dla konstrukcji pokazanej na rys. 10 (z pięcioma załomami podłużnicy) otrzymamy pięć rozwiązań będących pierwiastkami poniższych równań, które są warunkami osobliwości przy symetrycznym i antysymetrycznym rozkładzie sił wewnętrznych:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} 4 \frac{l^*}{l} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 - \left( 16 \frac{l^*}{l} + 4 \right) \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \left( 20 \frac{l^*}{l} + 9 \right) \frac{a_0}{a} - 4 \left( 2 \frac{l^*}{l} + 1 \right) &= 0, \\ 4 \frac{l^*}{l} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 - \left( 9 \frac{l^*}{l} + 4 \right) \frac{a_0}{a} + 4 \frac{l^*}{l} + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Zależność  $a_0/a$  od  $l^*/l$  pokazano na wykresie (rys. 10). Krzywe te mają ten sam charakter co krzywe na rys. 5–7 i nie wymagają oddzielnego komentarza.

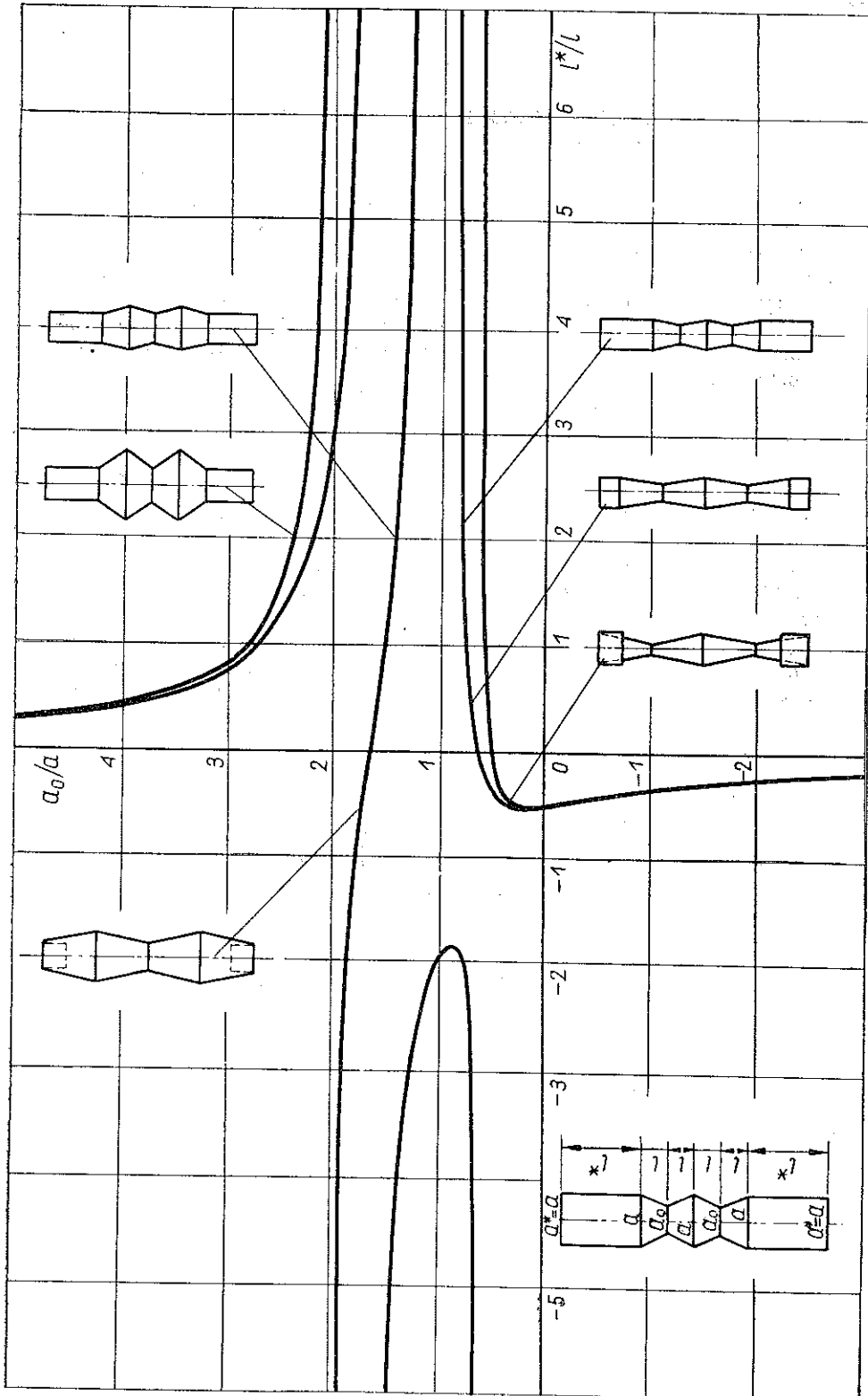
## 5. Wnioski

Pość stopni swobody geometrycznej zmienności, a co za tym idzie kształtów, jakie może konstrukcja przyjmować (gdy ustalone są wszystkie parametry geometryczne z wyjątkiem jednego) pozostając przy tym konstrukcją osobliwą, jest równa ilości załomów podłużnicy.

Przeprowadzona analiza wykazuje, że klasa konstrukcji osobliwych zawiera w sobie olbrzymią różnorodność kształtów. Wszystkie te konstrukcje mają jednak jedną wspólną cechę, mianowicie zgodnie z [2] są konstrukcjami, których powierzchnie mają wklęsłości. Podana metoda pozwala analizować również inne technicznie ważne klasy konstrukcji powierzchniowych. Zwrócić ponadto należy uwagę na brak jakichkolwiek zależności między wymiarami gabarytowymi mierzonymi wzdłuż osi konstrukcji i wzdłuż promienia. Stąd przy zachowaniu określonych ściśle stosunków  $a_0/a$  i  $l^*/l$  konstrukcje osobliwe będą mogły być zarówno bardzo smukłe jak i bardzo krępe.

## Literatura cytowana w tekście

1. В. З. Власов, *Избранные труды*, Изд. АН СССР, Москва 1962.
2. А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, Гостехиздат, 1950.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *The geometry of a discrete set of points on a surface*, Arch. Mech. Stos., 2, 19 (1967).
4. H. FRĄCKIEWICZ, A. LEGAT, *O osobliwości pewnych niégładkich konstrukcji powierzchniowych*, Rozpr. Inżyn., 2, 15 (1967).



Rys. 10

## Резюме

О СИНГУЛЯРНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕГЛАДКИХ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ (II)

На основе приведенных в работе [4] статических критериев сингулярности выводятся зависимости между геометрическими параметрами конструкции, при удовлетворении которым эти конструкции становятся сингулярными т.е. ведут себя как механизм под влиянием известных нагрузок. В основном, работа касается осесимметрических, негладких поверхностных конструкций с большим числом изломов образующей, но в предельном случае полученные формулы справедливы, для конусных оболочек. Для нескольких проанализированных типов конструкций изготовлены диаграммы, определяющие размеры сингулярной конструкции.

## Summary

## THE SINGULARITY OF SOME NON-SMOOTH SURFACE STRUCTURES (II)

Making use of the static singularity criterion derived in Ref. [4] relations are obtained between the geometrical parameters of the structure. The satisfaction of these relations makes a structure singular that is behaving as a mechanism under the action of certain loads. The paper is concerned, in principle, with axially symmetric angular shells with more than one angular point of the longeron. In the limit case, however, the relations obtained are also valid for conical shells. For a few of the structure types analysed diagrams of dimensions of singular structures are plotted.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
KATEDRA MECHANIKI OGÓLNEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lipca 1967 r.*

---