

ZAKŁAD BADAWCZY BUDOWLANIA		
POZNAN -		
L. dz. 30 Cr/35/4/68		
Wpł. 1 CZE 19.68		
B.	Prof.	L. W.
L. B.	L. CN.	My.

NAPRĘŻENIA MOMENTOWE W ZAGADNIENIU KONTAKTOWYM DLA PASMA NIESKOŃCZONEGO

ALINA DUSZA, MAREK SOKOŁOWSKI (WARSZAWA)

Wstęp

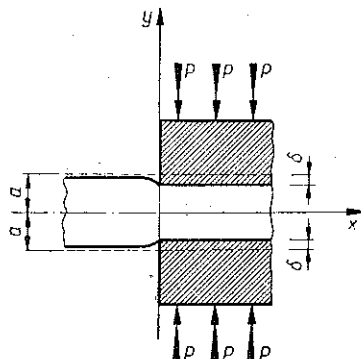
W pracy rozpatrzono dwa zagadnienia kontaktowe: statyczne i dynamiczne, których rozwiązania w zakresie klasycznej teorii sprężystości są znane i prowadzą do nieskończonych koncentracji naprężeń. Celem pracy jest porównanie wyników otrzymanych przy założeniu, że ośrodek jest zdolny do przenoszenia naprężeń momentowych — z wynikami klasycznymi. W szczególności interesujący jest wpływ naprężeń momentowych na koncentracje naprężeń, występujące w punktach nieciągłości w warunkach brzegowych.

W pierwszej części pracy rozważono nieskończoną warstwę sprężystą ściskaną dwoma sztywnymi, półnieskończonymi blokami. Wpływ naprężeń momentowych przejawia się w istotnym wzroście naprężeń normalnych pod krawędziami bloku. Część druga pracy zawiera rozwiązanie podobnego zadania, jednak w ujęciu quasi-statycznym przy założeniu, że bloki przemieszczają się po powierzchni warstwy ze stałą prędkością. Podobnie jak w przypadku pierwszym i tutaj istnienie naprężeń momentowych wpływa na wzrost naprężeń normalnych na powierzchni warstwy, a ponadto i na krytyczną wartość prędkości ruchu bloków, przy której następuje rezonans z falami powierzchniowymi typu Rayleigha.

Oba te zagadnienia rozwiązane zostały za pomocą przybliżonej wersji metody Wienera-Hopfa opracowanej przez W. T. KOITERA. Odnosne rozwiązania mają więc charakter przybliżony, jednak wyniki dotyczące nieskończonych koncentracji naprężeń są w zasadzie ściśle dzięki spełnieniu warunków postulowanych przez W. T. KOITERA [1].

1. Zagadnienie statyczne

Rozważmy nieskończenie długą warstwę sprężystą $|y| < a$, ściskaną między dwoma półnieskończonymi blokami doskonale sztywnymi (rys. 1). Przyjmijmy, że siły działające na bloki wywołują stałe przemieszczenie pionowe δ na krawędzi warstwy

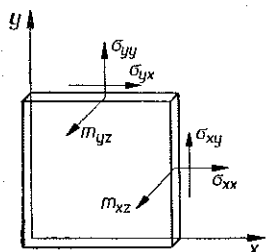


Rys. 1

dla dodatniej wartości x . Zakładamy ponadto, że przez powierzchnię styku bloków sztywnych i warstwy sprężystej nie przenoszą się ani naprężenia styczne, ani naprężenia momentowe. Przy tych założeniach zagadnienie sprowadza się do rozwiązywania podstawowego układu równań równowagi dla ośrodka z naprężeniami momentowymi przy następujących, nieciągłych warunkach brzegowych:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{yx}(x, \pm a) &= m_{yz}(x, \pm a) = 0, \\ \sigma_{yy}(x, \pm a) &= 0, \quad x < 0, \\ v(x, \pm a) &= \mp \delta, \quad x > 0. \end{aligned}$$

We wzorach tych podobnie jak i w dalszej części pracy wprowadzono oznaczenia jak na rys. 2. Funkcje σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{yx} są składowymi asymetrycznego tensora naprężeń w sensie klasycznym; m_{xz} i m_{yz} składowymi tensora naprężeń momentowych, a u i v przemieszczeniami. Symbole μ , ν i E oznaczają odpowiednio stałe Lamégo i Poissona oraz moduł Younga. Położenie odpowiednich składowych pokazuje w płaskim stanie naprężenia rys. 2.



Rys. 2

Zgodnie z pracą R. MINDLINA [2] zagadnienie płaskiego stanu naprężenia dla ośrodka z naprężeniami momentowymi można uprościć przez wprowadzenie funkcji φ i ψ stanowiących uogólnienie funkcji naprężeń Airy'ego znanej z klasycznej teorii sprężystości. Zakładając, że naprężenia wyrażają się za pomocą tych funkcji:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, & \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, & \sigma_{yx} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ m_{xz} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, & m_{yz} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \end{aligned}$$

przekształcimy układ równań równowagi i równanie ciągłości odkształceń do następującej postaci:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \nabla^4 \varphi &= 0, & \nabla^2 \varphi - l^2 \nabla^4 \psi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} (\psi - l^2 \nabla^2 \psi) &= 2(1 - \nu) l^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi. \end{aligned}$$

W powyższych równaniach l jest dodatkową stałą materiałową o wymiarze długości, której sens fizyczny można związać z geometryczną charakterystyką mikrostruktury rozważanego materiału.

Warunki brzegowe (1.1) po uwzględnieniu związków (1.2) przybierają postać:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0, & y = \pm a, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, & y = \pm a, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0, & y = \pm a, x < 0, \\ v(x, y) &= \mp \delta, & y = \pm a, x > 0. \end{aligned}$$

Wprowadzamy następujące wykładnicze transformaty Fouriera w postaci zespolonej podając zarazem obszary ich istnienia na płaszczyźnie zespolonej w :

$$\begin{aligned} S^+(w) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sigma_{yy}(\xi, a) e^{i w \xi} d\xi, & \text{Im } w > 0; \\ V^+(w) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty v(\xi, a) e^{i w \xi} d\xi, & \text{Im } w > 0; \\ V^-(w) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 v(\xi, a) e^{i w \xi} d\xi, & \text{Im } w < \varepsilon_1; \\ \Phi(w) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi, \eta) e^{i w \xi} d\xi, & 0 < \text{Im } w < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1; \\ \Psi(w) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \psi(\xi, \eta) e^{i w \xi} d\xi, & 0 < \text{Im } w < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

We wzorach tych ε_1 i ε_2 oznaczają pewne liczby dodatnie, których wartość ustalić można w zasadzie po ostatecznym rozwiązaniu zagadnienia.

Uwzględniając symetrię zagadnienia, z równań (1.3)₁, (1.3)₂ otrzymujemy po transformacji wyrażenia na funkcje naprężeń w postaci

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Phi(w, \eta) &= \frac{a}{w} [A \operatorname{ch} w\eta + B w\eta \operatorname{sh} w\eta], \\ \Psi(w, \eta) &= C \operatorname{sh} w\eta + D \operatorname{sh} k\eta, \end{aligned}$$

gdzie

$$k = \sqrt{(l^2 w^2 + a^2)/l^2}.$$

Transformaty naprężeń $\sigma_{yy}(x, y)$, $\sigma_{yx}(x, y)$, $m_{yz}(x, y)$ oraz przemieszczenia $v(x, y)$ wyrazić można za pomocą (1.2) i (1.5) w postaci

$$\begin{aligned}
 S_{yy}(w, \eta) &= -\frac{w}{a} [A \operatorname{ch} w\eta + Bw\eta \operatorname{sh} w\eta] - \frac{iw}{a^2} [Cw \operatorname{ch} w\eta + Dk \operatorname{ch} k\eta], \\
 S_{yx}(w, \eta) &= \frac{iw}{a} [A \operatorname{sh} w\eta + B(\operatorname{sh} w\eta + w\eta \operatorname{ch} w\eta)] - \frac{w^2}{a^2} [C \operatorname{sh} w\eta + D \operatorname{sh} k\eta], \\
 M_y(w, \eta) &= \frac{1}{a} [Cw \operatorname{ch} w\eta + Dk \operatorname{ch} k\eta], \\
 V(w, \eta) &= \frac{1}{2\mu} \{ -A \operatorname{sh} w\eta + B[(1-2\nu) \operatorname{sh} w\eta - w\eta \operatorname{ch} w\eta] \} - \\
 &\quad - \frac{wi}{2\mu a} [C \operatorname{sh} w\eta + D \operatorname{sh} k\eta].
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Stałe całkowania A, B, C i D obliczamy z warunków brzegowych (1.4)₁, (1.4)₂ i (1.4)₃ oraz warunku ciągłości (1.3)₃ wyrażając je przez nieznaną transformatę $S^+(w)$ naprężenia σ_{yy} na krawędzi warstwy:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{a}{w} \frac{a^2 k (w \operatorname{ch} w + \operatorname{sh} w) + 4(1-\nu) w^2 l^2 p}{a^2 k (w + \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w) + 4(1-\nu) w^2 l^2 \operatorname{ch} w p} S^+(w), \\
 B &= \frac{a}{w} \frac{a^2 k \operatorname{sh} w}{a^2 k (w + \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w) + 4(1-\nu) w^2 l^2 p \operatorname{ch} w} S^+(w), \\
 C &= -\frac{a}{w} \frac{4i(1-\nu) a k w l^2 \operatorname{sh} w}{a^2 k (w + \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w) + 4(1-\nu) w^2 l^2 p \operatorname{ch} w} S^+(w), \\
 D &= \frac{a}{w \operatorname{ch} k} \frac{4i(1-\nu) a w^2 l^2 \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w}{a^2 k (w + \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w) + 4(1-\nu) w^2 l^2 p \operatorname{ch} w} S^+(w),
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

gdzie

$$p = k \operatorname{sh} w - w \operatorname{ch} w \operatorname{th} k.$$

Ostatni niewykorzystany dotąd warunek brzegowy (1.4) prowadzi po zastosowaniu wzorów transformacyjnych i (1.6), (1.7) do równania Wienera-Hopfa

$$\frac{(1-\nu)a}{\mu} S^+(w) H(w) - V^+(w) = V^-(w),
 \tag{1.8}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 H(w) &= \frac{1}{w} \frac{a^2 k \operatorname{sh}^2 w}{a^2 k (w + \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w) + 4(1-\nu) w^2 l^2 p \operatorname{ch} w}, \\
 V^+(w) &= -\frac{1}{w} \frac{\delta a i}{\sqrt{2\pi}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Jądro (1.9) równania (1.8) przy założeniu $l=0$ (co odpowiada pominięciu wpływu naprężeń momentowych) prowadzi do związku

$$H(w) = \frac{1}{w} \frac{\operatorname{sh}^2 w}{w + \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w}.$$

Równanie (1.8) staje się więc, jak należało przypuszczać, identyczne z równaniem otrzymanym w pracy [3]. Współczynnik $(1 - \nu)/\mu$ występujący w równaniu (1.8) odpowiada płaskiemu stanowi odkształcenia. W płaskim stanie naprężenia zostaje on zastąpiony współczynnikiem $2/E$.

Równanie (1.8) rozwiązujemy teraz w sposób przybliżony metodą Koitera [1] zastępując skomplikowane jądro (1.9) prostą funkcją $\bar{H}(w)$ spełniającą, jak wiadomo, trzy warunki:

1) $H(w)$ i $\bar{H}(w)$ powinny zachowywać się podobnie w obszarze regularności wszystkich transformat występujących w zadaniu (w naszym przypadku w sąsiedztwie osi $\text{Re } w$);

2) $H(w)$ i $\bar{H}(w)$ powinny przybierać identyczne wartości w otoczeniu punktów $\text{Re } w = 0$ i $\text{Re } w = \infty$;

3) $\bar{H}(w)$ powinien charakteryzować prosty rozkład zer i biegunów.

Przy spełnieniu tych warunków rozwiązania zagadnienia przybliżonego $\bar{\sigma}_{yy}(x, a)$ i $\bar{v}(x, a)$ są zbliżone do rozwiązań ścisłych $\sigma_{yy}(x, a)$ i $v(x, a)$ dla dowolnych x , a przyjmują wartości ścisłe, gdy $x \rightarrow 0$ i $x \rightarrow \pm\infty$.

Ponieważ z (1.9) wynika, że

$$H(w) = \frac{1}{2} + O(w), \quad \text{gdy } w \rightarrow 0;$$

$$H(w) = \frac{1}{(3 - 2\nu)w} + O(w^{-2}) \quad \text{gdy } w \rightarrow \infty,$$

przyjmujemy przeto

$$(1.10) \quad \bar{H}(w) = \frac{1}{(3 - 2\nu) \sqrt{w^2 + \frac{4}{(3 - 2\nu)^2}}}.$$

Podstawiając funkcję $\bar{H}(w)$ z (1.10) do (1.8) otrzymujemy zastępcze równanie Wienera-Hopfa, które rozwiązujemy drogą faktoryzacji starając się rozdzielić wyrażenia analityczne odpowiednio w półpłaszczyznach zespolonych $\text{Im } w > 0$ i $\text{Im } w < \varepsilon$. Jeśli to postępowanie okaże się możliwe dla pewnej dodatniej, choćby dowolnie małej liczby ε , to możliwe będzie odwrócenie otrzymanych transformat we wspólnym pasmie analityczności $0 < \text{Im } w < \varepsilon$.

Mnożąc obie strony (1.12) przez $\sqrt{w - 2i/(3 - 2\nu)}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \nu) a S^+(w)}{\mu (3 - 2\nu) \sqrt{w + \frac{2i}{3 - 2\nu}}} + K \frac{\sqrt{w - 2i/(3 - 2\nu)}}{w} &= \\ &= V^-(w) \sqrt{w - \frac{2i}{3 - 2\nu}}, \quad K = \frac{\delta a i}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Wyraz zawierający stałą K może być rozłożony na dwie części analityczne odpowiednio w górnej i dolnej półpłaszczyźnie. Po przekształceniu mamy

$$(1.11) \quad \frac{a(1-\nu)}{\mu(3-2\nu)} \sqrt{\frac{2i}{w+\frac{2i}{3-2\nu}}} S^+(w) + \sqrt{-\frac{2i}{3-2\nu}} \frac{K}{w} = \\ = \sqrt{\frac{2i}{w-\frac{2i}{3-2\nu}}} V^-(w) - \left(\sqrt{\frac{2i}{w-\frac{2i}{3-2\nu}}} - \sqrt{-\frac{2i}{3-2\nu}} \right) \frac{K}{w}.$$

Zgodnie z twierdzeniem Liouville'a obie strony powyższego równania przedstawiają funkcję całkowitą typu

$$a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots$$

Jedynie założenie, że wszystkie współczynniki a_0, a_1, \dots są równe zeru, prowadzi do naprężeń skończonych w nieskończoności. A więc (1.15) jest równoważne dwu równaniom:

$$(1.12) \quad \frac{a(1-\nu)}{\mu(3-2\nu)} \sqrt{\frac{2i}{w+\frac{2i}{3-2\nu}}} S^+(w) + \sqrt{-\frac{2i}{3-2\nu}} \frac{K}{w} = 0, \\ \sqrt{\frac{2i}{w-\frac{2i}{3-2\nu}}} V^-(w) - \left(\sqrt{\frac{2i}{w-\frac{2i}{3-2\nu}}} - \sqrt{-\frac{2i}{3-2\nu}} \right) \frac{K}{w} = 0.$$

Po przekształceniach i zastosowaniu odwrotnej transformacji Fouriera otrzymujemy

$$(1.13) \quad \bar{\sigma}_{yy}(\xi, a) = -\frac{K\mu\sqrt{-2i}\sqrt{3-2\nu}}{(1-\nu)a^2\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{w+\frac{2i}{3-2\nu}}}{w} e^{i w \xi} dw, \quad \xi > 0, \\ \bar{v}(\xi, a) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}a} \int_{\Gamma} \left(1 - \frac{\sqrt{-\frac{2i}{3-2\nu}}}{\sqrt{\frac{2i}{w-\frac{2i}{3-2\nu}}}} \right) \frac{e^{-i w \xi}}{w} dw, \quad \xi < 0.$$

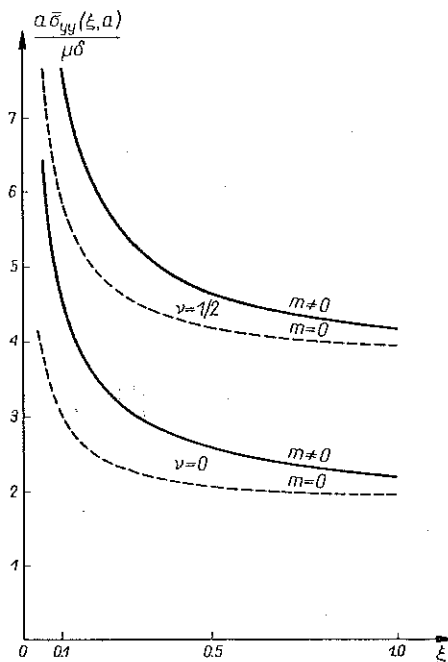
Całki w (1.13) obliczamy metodą residuów. Dla obliczenia całki (1.13)_I zamykamy drogę całkowania w dolnej półpłaszczyźnie, uwzględniamy biegun w punkcie $w = 0$ i punkt rozgałęzienia w $w = \sqrt{-2i/(3-2\nu)}$. Ostatecznie przyjmujemy

$$(1.14) \quad \bar{\sigma}_{yy}(\xi, a) = -\frac{2\delta\mu}{a(1-\nu)} \left(\sqrt{3-2\nu} \frac{e^{-\frac{2}{3-2\nu}\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} + \operatorname{erf} \sqrt{\frac{2\xi}{3-2\nu}} \right).$$

Rozwiązanie analogicznego zagadnienia przy pominięciu naprężeń momentowych (ośrodek klasyczny) ma postać [4]

$$(1.15) \quad \bar{\sigma}_{yy}(\xi, a) = -\frac{2\delta\mu}{a(1-\nu)} \left(\frac{e^{-2\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} + \operatorname{erf} \sqrt{2\xi} \right).$$

Jak widać, wzory te różnią się od siebie współczynnikiem $\sqrt{3-2\nu}$, wpływającym w sposób istotny na koncentrację naprężeń w punkcie $\xi = 0$. Ponadto, jak widać, $\bar{\sigma}_{yy}(\xi, a)$ nie zależy w sposób jawny od charakterystycznej długości l , nie ma więc przejścia granicznego ze wzoru (1.14) do (1.15). Do podobnego wniosku doszli E. STERNBERG i R. MUKI [5] rozpatrując na innej drodze problem skończonego stempla wciskanego w półpłaszczyznę i stwierdzając także wzrost naprężenia o $\sqrt{3-2\nu}$. Dla porównania na rys. 3 przedstawiono wykresy przybliżonych wartości



Rys. 3

$\bar{\sigma}_{yy}(\xi, a)$ z uwzględnieniem i bez uwzględnienia wpływu naprężeń momentowych (linie ciągłe i kreskowane) dla dwóch skrajnych wartości współczynnika Poissona $\nu = 0$ oraz $\nu = 1/2$. Wzrost współczynnika koncentracji naprężeń wynosi więc od 41% do 73%, a jeszcze w odległości $x = a/2$, $\xi = 1/2$ można się spodziewać 10%–20% wzrostu naprężeń normalnych, spowodowanych istnieniem naprężeń momentowych. Jednakże te ostatnie liczby mają charakter jedynie przybliżony i zależą zapewne w dużej mierze od wartości l .

2. Zagadnienie quasi-statyczne

Przechodząc do zagadnienia quasi-statycznego rozważmy problem przedstawiony na rys. 1 przy dodatkowym założeniu, że doskonale sztywne bloki, wciskane na głębokość δ w nieograniczoną warstwę sprężystą, poruszają się ze stałą prędkością c w dodatnim kierunku osi x . I w tym przypadku chodzi o określenie wpływu naprężeń momentowych na przebieg procesu.

Równania różniczkowe ruchu dwuwymiarowego z naprężeniami momentowymi mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + 2l^2 \mu \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega_z &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - 2l^2 \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega_z &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

gdzie λ, μ oznaczają stałe Lamégo, $e = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ oznacza dylatację, a ω_z składową obrotu elementu ośrodka wokół osi z .

Wprowadzając potencjały $\varphi(x, y, t)$ i $\psi(x, y, t)$ określone za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, & v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ e &= \nabla^2 \varphi, & \omega_z &= -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi, \end{aligned}$$

równania (2.1) możemy zastąpić przez układ równań:

$$(2.2) \quad (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi = \rho \ddot{\varphi}, \quad \mu \nabla^2 \psi - l^2 \mu \nabla^4 \psi = \rho \ddot{\psi}.$$

Warunki brzegowe zagadnienia są następujące:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{yx}(x, \pm a) &= \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - l^2 \mu \nabla^4 \psi = 0, \\ m_{yz}(x, \pm a) &= -2l^2 \mu \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = 0, \\ \sigma_{yy}(x, \pm a) &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \quad x < ct, \\ v(x, \pm a) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mp \delta, \quad x > ct. \end{aligned}$$

Zakładamy, że proces ma charakter quasi-statyczny, trwa od chwili $t = -\infty$, a w chwili $t = 0$ krawędzie bloków znajdują się w położeniu przedstawionym na rys. 1.

W celu wyeliminowania zmiennej czasowej t wprowadzamy zmienną pomocniczą $x' = x - ct$. Niech

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

oznacza prędkość fal podłużnych,

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

prędkość fal poprzecznych oraz

$$\gamma^2 = 1 - \left(\frac{c}{c_1}\right)^2, \quad \beta^2 = 1 - \left(\frac{c}{c_2}\right)^2.$$

Przy tych oznaczeniach równania (2.3) przyjmują postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \gamma^2 \varphi_{,x'x'} + \psi_{,yy} &= 0, \\ \beta^2 \psi_{,x'x'} + \psi_{,yy} - I^2(\psi_{,x'x'x'x'} + 2\psi_{,x'x'yy} + \psi_{,yyyy}) &= 0. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu pracy zakładamy, że oba współczynniki β^2 i γ^2 są zawsze dodatnie, a więc że prędkość c nie przekracza prędkości propagacji fal sprężystych w ośrodku.

Posługując się transformacjami całkowitymi Fouriera wprowadzonymi w poprzednim punkcie, rozwiązanie układu równań (2.4) przy uwzględnieniu symetrii można napisać w sposób następujący:

$$\Phi(w, \eta) = A \operatorname{ch} \gamma w \eta, \quad \Psi(w, \eta) = B \operatorname{sh} s w \eta + C \operatorname{sh} p w \eta.$$

Tutaj podobnie jak poprzednio w jest parametrem transformacji, $\eta = y/a$, a ponadto

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{1 + \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2w^2 \lambda^2}}, & p &= \sqrt{1 + \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2w^2 \lambda^2}}, \\ \Delta &= 1 + 4w^2 \lambda^2 (1 - \beta^2), & \lambda &= \frac{l}{a}. \end{aligned}$$

Pierwsze trzy warunki brzegowe (2.3) w postaci przetransformowanej prowadzą do układu równań

$$(2.5) \quad \begin{aligned} S_{yy}(w) &= \frac{A\mu w^2}{a^2} (1 + \beta^2) \operatorname{ch} \gamma w + \frac{2i\mu w^2}{a^2} (Bs \operatorname{ch} s w + Cp \operatorname{ch} p w), \\ S_{yx}(w) &= \frac{\mu w^2}{a^2} \{-2A i \gamma \operatorname{sh} \gamma w + B(1 + s^2) \operatorname{sh} s w + C(1 + p^2) \operatorname{sh} p w\} - \\ &\quad - \frac{l^2 \mu w^4}{a^4} \{B(1 - s^2)^2 \operatorname{sh} s w + C(1 - p^2)^2 \operatorname{sh} p w\}, \\ M_{yz}(w) &= \frac{2\mu l^2 w^3}{a^3} \{Bs(1 - s^2) \operatorname{ch} s w + Cp(1 - p^2) \operatorname{ch} p w\}, \\ V(w) &= \frac{A\gamma w}{a} \operatorname{sh} \gamma w + \frac{iw}{a} (B \operatorname{sh} s w + C \operatorname{sh} p w), \end{aligned}$$

z którego wyznaczamy stałe A , B i C :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A &= -\frac{tk \operatorname{th} sw - r \operatorname{th} pw}{D\mu w^2 \operatorname{sh} \gamma w} a^2 S^+(w), \\ B &= -\frac{2i\gamma t a^2}{D\mu w^2 \operatorname{ch} sw} S^+(w), \\ C &= \frac{2i\gamma a^2}{D\mu w^2 \operatorname{ch} pw} S^+(w), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} D &= (-tk \operatorname{th} sw + r \operatorname{th} pw) (1 + \beta^2) \operatorname{cth} sw + 4\gamma (ts - p), \\ t &= \frac{p(1 - p^2)}{s(1 - s^2)}, \\ k &= (1 + s^2) - \frac{l^2 w^2}{a^2} (1 - s^2)^2, \\ r &= (1 + p^2) - \frac{l^2 w^2}{a^2} (1 - p^2)^2. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe stałe do ostatniego warunku brzegowego (2.3) po przekształceniach otrzymujemy poszukiwane równanie Wienera-Hopfa:

$$(2.7) \quad \frac{a}{\mu} S^+(w) H(w) + \frac{M}{w} = V^-(w), \quad M = \frac{\delta a i}{\sqrt{2\pi}}.$$

Jądro tego równania ma w naszym przypadku postać bardzo złożoną:

$$(2.8) \quad H(w) = \frac{\gamma(1 - \beta^2)f(w)}{w \left[8\gamma \sqrt{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{w^2 \lambda^2}} - (1 + \beta^2)^2 f(w) \operatorname{cth} w\gamma \right]},$$

gdzie

$$f(w) = s(\sqrt{\lambda} + 1) \operatorname{th} wp + p(\sqrt{\lambda} - 1) \operatorname{th} ws.$$

Łatwo sprawdzić, że przechodząc we wzorze (2.8) do granicy $\lambda \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$H(w) = \frac{\gamma(1 - \beta^2) \operatorname{th} \gamma w \operatorname{th} \beta w}{w[4\beta\gamma \operatorname{th} \gamma w - (1 + \beta^2)^2 \operatorname{th} \beta w]}.$$

Jest to wyrażenie identyczne z otrzymanym w pracy [4], w której rozważano analogiczne zagadnienie z pominięciem wpływu naprężeń momentowych.

W celu zastąpienia równania (2.7) równaniem uproszczonym i zastosowania metody Koitera należy przeprowadzić dyskusję wyrażenia (2.8) w przedziale $0 < w < \infty$ (funkcja jest symetryczna), w szczególności wyznaczyć wartości $H(w)$

w punktach $w = 0$ i $w = \infty$. W tym celu przedstawimy funkcję $H(w)$ w innej postaci. Stosując nową zmienną $u = w\lambda$ i wprowadzając oznaczenie

$$(2.9) \quad G(u) = \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{u^2}} \sqrt{\Delta} \operatorname{th} \frac{\gamma u}{\lambda}}{s(u) (\sqrt{\Delta} + 1) \operatorname{th} \frac{p(u) u}{\lambda} + p(u) (\sqrt{\Delta} - 1) \operatorname{th} \frac{s(u) u}{\lambda}},$$

otrzymujemy

$$(2.10) \quad H(u) = \frac{\gamma \lambda (1 - \beta^2)}{(1 + \beta^2)^2} \frac{\frac{1}{u} \operatorname{th} \frac{\gamma u}{\lambda}}{\frac{8\gamma}{(1 + \beta^2)^2} G(u) - 1}.$$

Funkcje $p(w, \lambda)$, $s(w, \lambda)$ i $\Delta(w, \lambda)$ określone poprzednio stają się, dzięki wprowadzeniu nowej zmiennej $u = w\lambda$, $\lambda \neq 0$, funkcjami jednej zmiennej

$$p(u) = \sqrt{1 + \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2u^2}}, \quad s(u) = \sqrt{1 + \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2u^2}}, \quad \Delta(u) = 1 + 4(1 - \beta^2)u^2.$$

Zastąpienie funkcji $H(u)$ prostym wyrażeniem typu

$$(2.11) \quad \bar{H}(u) = \frac{C_1}{\sqrt{C_2^2 + u^2}}$$

analogicznym do (1.14) jest, jak można łatwo zauważyć, możliwe jedynie pod warunkiem, że mianownik (2.10) pozostaje dodatni i ograniczony dla dowolnej rzeczywistej wartości u . Gdyby dla pewnego $u = u_0$ zachodziło

$$G(u_0) = \frac{(1 + \beta^2)^2}{8\gamma},$$

to zamiast (2.10) należałoby posłużyć się wyrażeniem typu

$$\bar{h}(u) = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2 w^2}}{(w_0^2 - w^2)}.$$

W pracy [4] stwierdzono, że tego rodzaju założenie prowadzi do rozwiązań niecałkowalnych; wspólne pasmo regularności transformacji, o którym była mowa w pierwszej części pracy, przestaje istnieć i następuje rezonans z falami powierzchniowymi Rayleigha.

We wspomnianej pracy [4], w której rozważano ośrodek bez naprężeń momentowych, rezonans taki następował wtedy, gdy prędkość bloków sztywnych c osiągała prędkość propagacji fal Rayleigha c_R . W omawianym tu przypadku uwzględniającym naprężenia momentowe krytyczna wartość prędkości zależy od dodatkowego parametru λ ; zjawisko wpływu naprężeń momentowych na propagację fal po-

wierzchniowych stwierdził poprzednio C. RYMARZ [6], który rozpatrywał to zagadnienie dla przypadku półprzestrzeni sprężystej.

W celu stwierdzenia tego zjawiska przedyskutujemy zachowanie się funkcji $G(u)$ w przedziale $(0, \infty)$. Funkcja ta przyjmuje następujące wartości graniczne przy $u \rightarrow 0$ i $u \rightarrow \infty$:

$$(2.12) \quad \lim_{u \rightarrow 0} G(u) = \frac{\gamma}{2}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} H(u) = \frac{\gamma^2 (1 - \beta^2)}{4\gamma^2 - (1 + \beta^2)^2}$$

oraz

$$(2.13) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} G(u) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} H(u) = \frac{\lambda\gamma (1 - \beta^2)}{u [4\gamma - (1 + \beta^2)^2]}.$$

Porównując z kolei wartości graniczne (2.12) i (2.13) z wartościami wyprowadzonymi w pracy [4], w której wpływ naprężeń momentowych był pominięty, stwierdzić można zgodność granic $\lim_{w \rightarrow 0} H$, podczas gdy dla $w \rightarrow \infty$ stosunek

$$(2.14) \quad \frac{[\lim_{w \rightarrow 0} H(w)]_{m \neq 0}}{[\lim_{w \rightarrow 0} H(w)]_{m=0}} = \frac{4\beta\gamma - (1 + \beta^2)^2}{4\gamma - (1 + \beta^2)^2} = F(c)$$

jest różny od jedności. W przypadku statycznym $c = 0$ otrzymujemy

$$F(0) = \frac{1}{3 - 2\nu},$$

zgodnie z wynikami poprzedniego rozdziału oraz pracy [3]. Stosunek ten nie zależy, jak widać, od parametru λ , a jedynie od stosunku prędkości c do prędkości propagacji fal podłużnych i poprzecznych oraz od stałej Poissona ν . Przy wzrastającej prędkości stosunek ten maleje do wartości 0 dla $c \rightarrow c_R$.

Granice $G(u)$, gdy $u \rightarrow 0$ i $u \rightarrow \infty$, określone wzorami (2.12) i (2.13), pozwalają stwierdzić, że mianownik wyrażenia (2.10) pozostaje w tych punktach dodatni, gdyż przy $0 < c < c_2$:

$$\frac{8\gamma}{(1 + \beta^2)^2} G(0) = \frac{4\gamma^2}{(1 + \beta^2)^2} > 1,$$

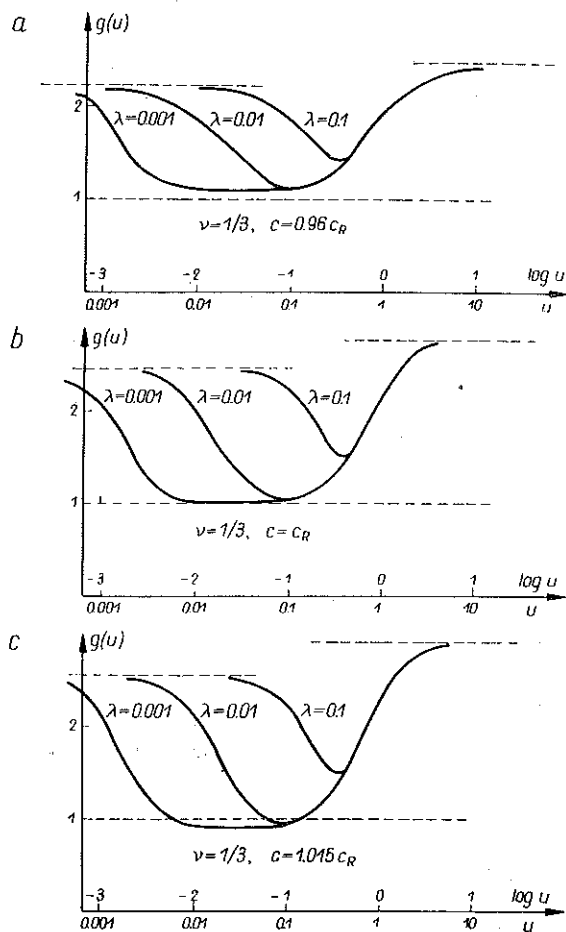
$$\frac{8\gamma}{(1 + \beta^2)^2} G(\infty) = \frac{4\gamma}{(1 + \beta^2)^2} > 1.$$

Na rys. 4a, b, c pokazano (w skali półlogarytmicznej) wykres funkcji

$$(2.15) \quad g(u) = \frac{8\gamma}{(1 + \beta^2)^2} G(u)$$

w przedziale $(0, \infty)$ dla trzech przypadków prędkości c : mniejszej, równej oraz większej od prędkości propagacji fal powierzchniowych Rayleigha c_R . W każdym z tych przypadków rozważono ponadto trzy wartości parametru $\lambda = 0,001$, $\lambda = 0,01$ i $\lambda = 0,1$. Z wykresów tych wynika w sposób oczywisty, że tak długo jak

$c < c_R$, funkcja $g(u)$ pozostaje większa od jedności i rezonans z falami powierzchniowymi nie może wystąpić. Gdy $c > c_R$, dobór odpowiednio małej wartości parametru λ doprowadza do rezonansu; przy $c = c_R$ rezonans występuje jedynie, gdy



Rys. 4

$\lambda \rightarrow 0$. Obserwację tę potwierdza prosta analiza wzoru (2.9): przy dostatecznie małych ustalonych wartościach $u \ll 1$ i przy $\lambda \rightarrow 0$ otrzymujemy następujące związki przybliżone:

$$\sqrt{A} + 1 \approx 2, \quad \sqrt{A} - 1 \approx 2(1 - \beta^2)u^2,$$

$$\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{u^2}} \approx \frac{\beta}{u}, \quad p(u) \approx \beta, \quad s(u) \approx \frac{1}{u},$$

$$\text{th} \frac{su}{\lambda} \approx \text{th} \frac{pu}{\lambda} \approx \text{th} \frac{\gamma u}{\lambda} \approx 1,$$

z których wynika graniczna wartość $G(u)$:

$$G(u) \approx \frac{\beta/u}{\frac{2}{u} + 2\beta(1-\beta^2)u^2} \approx \frac{\beta}{2}.$$

Tak więc przy $\lambda \rightarrow 0$ i $u \ll 1$ mianownik wyrażenia (2.10) przyjmuje minimalną wartość

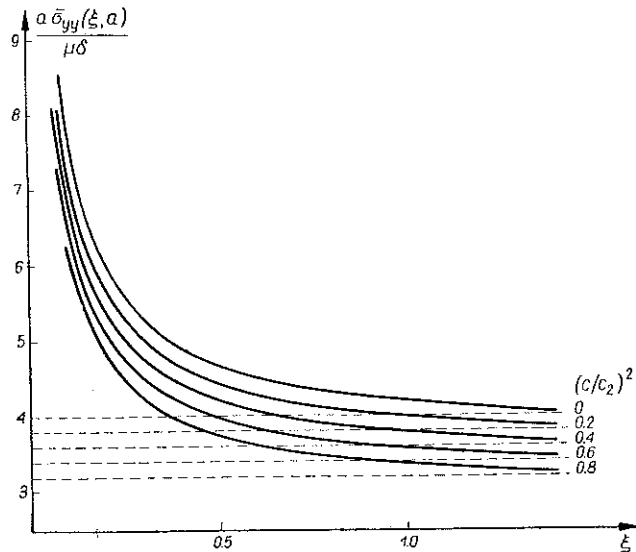
$$\frac{4\beta\gamma}{(1+\beta^2)^2} - 1,$$

która, jak wiadomo, jest zawsze dodatnia dla $c < c_R$; równanie

$$4\beta\gamma - (1+\beta^2)^2 = 0$$

jest bowiem dobrze znanym równaniem określającym prędkość propagacji fal Rayleigha na powierzchni ciała sprężystego [7].

Z rys. 4a, b i c oraz przeprowadzonej analizy przybliżonej funkcji (2.9) wynika więc, że naprężenia momentowe wpływają na zwiększenie się prędkości krytycznej ruchu sztywnych bloków; wzrost ten może być znaczny przy większych wartościach parametru λ .



Rys. 5

Przy dostatecznie małych wartościach prędkości $c < c_R$ mianownik wyrażenia (2.10), a więc i (2.8), pozostaje dodatni dla dowolnych rzeczywistych w . Biorąc pod uwagę graniczne wartości (2.12) i (2.13) możemy więc podobnie jak w pierwszej części pracy zastąpić jądro $H(w)$ równania Wienera-Hopfa (2.7) jądrem przybliżonym

$$(2.16) \quad \bar{H}(w) = \frac{B}{\sqrt{w^2 + C^2}},$$

gdzie

$$A = \frac{\gamma^2 (1 - \beta^2)}{4\gamma^2 - (1 + \beta^2)^2}, \quad B = \frac{\gamma (1 - \beta^2)}{4\gamma - (1 + \beta^2)^2}, \quad C = \frac{B}{A}.$$

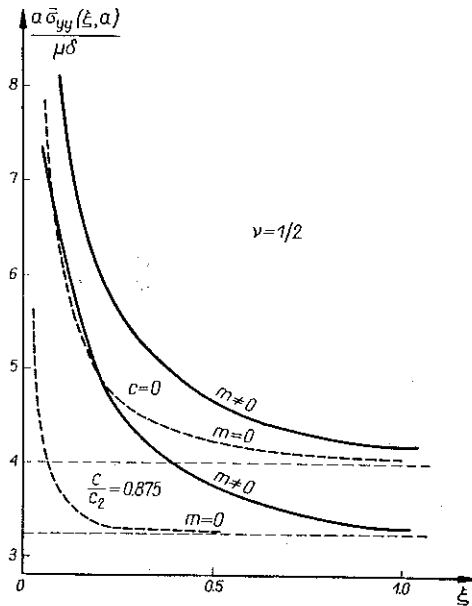
Przeprowadzając faktoryzację w sposób analogiczny do zastosowanego w pierwszej części pracy [wzory (2.15)–(2.17)] otrzymujemy po retransformacji wzór na przybliżony rozkład naprężeń normalnych pod powierzchnią bloków sztywnych:

$$(2.17) \quad \bar{\sigma}_{yy}(\xi, a) = -\frac{\mu\delta}{aA} \left(\frac{e^{-C\xi}}{\sqrt{\pi C\xi}} + \operatorname{erf} \sqrt{C\xi} \right)$$

gdzie $\xi = x'/a$.

Podobnie jak poprzednio wzór (2.17) jest ściśły, gdy $\xi \rightarrow 0$ i $\xi \rightarrow \infty$. Tak więc ścisła wartość współczynnika koncentracji naprężenia σ_{yy} w punkcie $y = \pm a$, $\xi = 0$ wynosi

$$(2.18) \quad N' = \frac{\mu\delta}{a\sqrt{\pi AB}} = \frac{\mu\delta}{a} \frac{\sqrt{[4\gamma - (1 + \beta^2)^2][4\gamma^2 - (1 + \beta^2)^2]}}{\gamma(1 - \beta^2)\sqrt{\pi\gamma}}.$$



Rys. 6

W punkcie 1 niniejszej pracy otrzymaliśmy współczynnik koncentracji

$$(2.19) \quad N = \frac{2\mu\delta}{a(1 - \nu)} \frac{\sqrt{3 - 2\nu}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Łatwo można sprawdzić, że gdy $c \rightarrow 0$, a więc gdy $\beta \rightarrow 1$ i $\gamma \rightarrow 1$, wzór (2.18) sprowadza się do (2.19).

Na rys. 5 przedstawiono wykres funkcji $\bar{\sigma}_{yy}(\xi, a)$ według wzoru (2.17) dla $\nu = 1/2$ i kilku wartości stosunku c/c_2 ; obserwujemy tu, podobnie jak w przypadku pominięcia wpływu naprężeń momentowych rozpatrzonym w pracy [4], zmniejszanie się naprężeń $\bar{\sigma}_{yy}(\xi, a)$ przy wzroście prędkości c .

Na rys. 6 pokazano wykres naprężeń $\bar{\sigma}_{yy}(\xi, a)$ dla $\nu = 1/2$ i dwóch wartości $c = 0$ i $c = 0,875c_2$. Linie ciągłe odpowiadają wzorowi (2.17), linie kreskowane — wzorowi wyprowadzonemu w pracy [4] i pomijającemu wpływ naprężeń momentowych. Tutaj podobnie jak i w przypadku statycznym omówionym w punkcie 1 (rys. 3) obserwujemy wzrost naprężenia i współczynnika jego koncentracji spowodowany naprężeniami momentowymi. Wzrost ten jest największy przy małych prędkościach $c \rightarrow 0$ i wynosi wtedy $\sqrt{3 - 2\nu}$; przy wzrastających prędkościach $c \rightarrow c_R$ analizy wzorów (2.18) i (2.19) wskazuje, że stosunek N'/N nieznacznie maleje.

Literatura cytowana w pracy

1. W. T. KOITER, *Approximate solutions of Wiener-Hopf type integral equations with applications*, Proc. Kon. Ned. Acad. Wet., 5, 57 (1954).
2. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress concentrations*, Experimental Mechanics, January 1963.
3. M. SOKOŁOWSKI, *Stresses in a rigidly clamped plate strip*, Arch. Mech. Stos., 2, 14 (1962).
4. M. MATCZYŃSKI, M. SOKOŁOWSKI, *Quasi-static problem of a rigidly clamped elastic layer*, Arch. Mech. Stos., 6, 19 (1967).
5. E. STERNBERG, R. MUKI, *The Influence of Couple-Stresses on Singular Stress Concentrations in Elastic Solids*, Z. angew. Math. Phys., 5, 16 (1965).
6. C. RYMARZ, *Fale powierzchniowe w ośrodku z naprężeniami momentowymi*, Mech. Teoret. i Stos., 3, 5 (1967).
7. W. M. EWING, W. S. JARDETZKY, F. PRESS, *Elastic Waves in Layered Media*, Mc Graw Hill, New York-Toronto-London 1957.

Резюме

МОМЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАЗРЫВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Бесконечный упругий слой или полоса пластинки подвергается сжатию двумя полу-бесконечными жесткими блоками. Рассматривается как статическая так и квази-статическая задача. В последней задаче принимается что блоки передвигаются с постоянной скоростью c по поверхности слоя. Моментные напряжения влияют в рассматриваемом случае на коэффициент концентрации напряжений такое-же влияние оказывают на критическое значение скорости c , при которой должен произойти резонанс с поверхностными волнами в среде типа Коссера.

S u m m a r y

COUPLE STRESSES IN THE DISCONTINUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM
OF AN INFINITE LAYER

An infinite elastic layer or a plate strip is compressed between two semi-infinite rigid blocks. Both the static and the quasi-static problems have been considered, the latter assuming that the blocks move at a constant velocity along the surfaces of the layer. The couple-stresses seem to be responsible for a considerable increase of the stress concentration factor; a similar influence is observed with respect to the critical value of velocity c at which a resonance with the surface waves in a Cosserat-type medium should be expected.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 września 1967 r.
